形状記憶合金で作られた柱の座屈現象について*

(第2報, 直柱の座屈と座屈抑制効果)

漆 山 雄 太^{*1}, David LEWINNEK^{*2}
裘 進 浩^{*3}, 谷 順 二^{*3}

Buckling of Shape Memory Alloy Columns

(2nd Report, Anti-Buckling Effect of Straight Columns)

Yuta URUSHIYAMA^{*4}, David LEWINNEK,
Jinhao QIU and Junji TANI

^{**} Honda R & D Co., Ltd. Tochigi R & D Center,
4630 Shimotakanezawa, Haga-machi, Haga-gun, Tochigi, 321-3393 Japan

The buckling characteristics of straight SMA (shape memory alloy) columns were investigated in this study. A parameter called anti-buckling capability was introduced and used to judge the stability of SMA columns under axial compression. The anti-buckling capability of SMA columns with different lengths and axial loads were calculated using a simple method. It was found for all considered lengths of columns that with the increase of axial load the anti-buckling capability decreases to a minimum value first, increases again to a maximum value and at last decreases monotonically to negative. This special anti-buckling capability versus axial load curve of SMA columns is due to the special non-linearity of stress-strain curve of the SMA. The anti-buckling capability at the minimum point can be either positive or negative depending on the length of a column. Since a SMA column buckles at the smallest value of the axial load, at which the anti-buckling capability becomes negative, the sign of the anti-buckling capability at the minimum point of the anti-buckling capability versus axial load curve is critical to the buckling load of column. If the anti-buckling capability at the minimum point is negative, the column buckles at a significantly low axial load. However, the absolute value of the negative anti-buckling capability is relatively small and it can easily be changed to positive by very simple strengthening so that the buckling load of the column can be significantly increased.

Key Words: Adaptive Structure, Buckling, Nonlinear Problem, Bending, Column Shape Memory Alloy, Lightweight

1. まえがき

柱の限界支持荷重の把握は工学的に大変重要な課題であり, これまで数多くの座屈の研究が行われて来た。現在では理論・実験ともに多数の研究とそれによって設計手段が確立され, 加えて近年では, 計算技術の進歩により, 複雑な形状でも弾塑性の座屈特性の算出がより容易になっている。

しかしながら, 座屈荷重の増加を計るため, 構造重量の増加と構造物の占有するスペースの確保, 形状の

複雑化などが必要になる事が多数ある。

このような座屈現象を対象に知的適合構造^①の応用が考えられる。知的適合構造(以下 Adaptive Structure)の研究は, ここ近年盛んであるが, Adaptive Structureの研究の方向性は, 一つにはセンサー・アクチュエータ・制御材料の複合化や制御の高度化による集積システムを使用する方向性と, 逆にシンプルな構成で結果として高機能, 高性能化を得る方向性がある。双方の研究ともに, 今後の普及のため重要であると確信する。しかしながら, 座屈抑制については双方の研究アプローチとも, その研究例は少ない。

本研究の第一報では形状記憶合金(以下 SMA)で作られた曲り柱が軸荷重にตอบสนองして, 座屈挙動と逆の挙動を示す直線化挙動を見出した^②。また, その要

* 原稿受付 2001 年 7 月 23 日。

^{*1} 正員, (株)本田技術研究所(〒321-3393 栃木県芳賀郡芳賀町下高根 4630)。

^{*2} Teradyne, Inc. (179 Lincoln Street Boston, Massachusetts U.S.A.)。

^{*3} 正員, 東北大学流体科学研究所(〒980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1)。

E-mail: yuta_urushiyama@n.t.rd.honda.co.jp

因が SMA のマルテンサイト双晶による応力歪み特性 (以下 双晶変形, TD-effect) による影響であると考えた。

そこで本報告では, 上記のような比較的シンプルな構成で Adaptive Structure への発展が期待できる座屈抑制効果について, 座屈に対するモーメントの許容値 (以下 Anti-buckling capability) を定義し, SMA で作られた直柱の座屈現象についてのべる。

2. SMA の座屈抑制効果

本研究で使用した SMA は Ti-Ni-Cu₁₀ である。変態温度 A_s は 51.9°C であり, 常温ではマルテンサイト相である。この SMA の圧縮試験で得られた応力歪み線図を図 1 に示す。

図 1 のグラフに示した歪 0.2%~4% 程度で生じる TD-effect がもたらす座屈抑制効果について考える。

直柱の座屈現象は圧縮荷重を受ける柱が, 微小な横撓みが生じた時にモーメントが発生し, このモーメントによってさらに横撓みが増えるという発散するループを繰り返す事で生じる。

このモーメントの発生については, 内部の応力分布の状態が大きく関係する。そこで, 圧縮荷重を受ける柱に, 微小な横撓みを与えた場合について, 弾性域, 弾塑性域, TD-effect それぞれの場合によって生じる柱の軸方向応力分布状態について考える (図 2)。

柱の座屈を抑制するモーメントは応力分布によって決定され, 圧縮荷重によってすでに塑性域に至った条件で, さらに微小な横撓みを与えると, 座屈を抑制するモーメントの発生は, 塑性域のため柱の圧縮側では応力が大きくなる。このため, 座屈を抑制するモーメントの発生は小さい。逆に SMA の TD-effect の場合は, 圧縮側で応力が大きくなる特徴がある^①。

TD-effect は低歪みでは応力が小さいが, 歪が 3% を超えると高い応力が発生する特徴がある。そのため, 柱が圧縮荷重により圧縮歪が 2~3% となる荷重条件で, さらに微小な横撓みを仮定すると, 柱の応力分布は曲りの内側ほど高い応力を発生するためである^②。

Fig.1 Stress and strain curve for SMA

したがって, 材料の応力ひずみ特性の違いについて整理すると, 座屈を抑制するモーメントは, 大きい順に SMA の TD-effect, 弾性域, 弾塑性域になると考えられる。

3. Anti-buckling capability

3.1 計算方法

図 3 に示すような両端全拘束条件とし, 軸荷重 F_0 と微小な横撓み δ が与えられた半径 r 長さ L の直柱について考える。

M_0 : 柱の固定端でのモーメントは

$$M_0 = \int_r 2 \cdot y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sigma_0 dy \quad (1)$$

M_m : 柱中央でのモーメントは

$$M_m = \int_{r+\delta}^{r-\delta} 2 \cdot y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sigma_m dy \quad (2)$$

と表すことが出来る。ここで,

σ_0 : 柱の固定端 $x=0$ における応力

Fig.2 Stress-strain curves and stress in columns

Fig.3 Forces and stress definition of columns

σ_m : 柱の中央 $x=L/2$ における応力

対称境界条件をもちい、長さ $L/2$ の柱に加わるモーメント M を(3)式に示す。

$$M = M_m + M_0 \quad (3)$$

ここで、 δ が与えられると、 M が δ の減少方向に働くか、増加方向に働くかを考えることで、座屈を評価する。すなわち $M\delta$ を定義し、その値の正負により座屈荷重に達したか否かがわかる。そこで軸荷重が受ける柱について、(4)式に示すように微小な横撓みと座屈を抑制するモーメントの比を **Anti-buckling capability** M/δ と定義する。

$$\frac{M}{\delta} = \frac{M_m + M_0}{\delta} \quad (4)$$

つぎに M の算出方法について記す。 M_0 , M_m は軸方向の応力分布によって決定されるため、それぞれ図4に示す座標により、 $x=0$ では(5)式、 $x=L/2$ では(6)式のように算出する。

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_r 2 \cdot y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sigma_{0j} dy \\ &= \sum_j y_j \cdot A_j \cdot \sigma_{0j} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_m &= \int_{r+\delta}^{r-\delta} 2 \cdot y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sigma_{mj} dy \\ &= \sum_j \{ (\delta + y_j) \cdot A_j \cdot \sigma_{mj} \} \\ &= F_0 \cdot \delta + \sum_j \{ y_j \cdot A_j \cdot \sigma_{mj} \} \end{aligned} \quad (6)$$

y_j : 柱横撓み方向に n 分割された j 番目の点の座標

A_j : 柱の断面を n 分割した j 番目の断面積

σ_{0j} : 柱の固定端 $(x, y) = (0, y_j)$ における応力

σ_{mj} : 柱の中央 $(x, y) = (L/2, y_j)$ における応力

以下 σ_{0j} , σ_{mj} の算出手順について記す。

直柱に加わる軸荷重 F_0 が与えられたとき、柱の応力の軸方向成分の断面平均 σ^0 を(7)式に示す。

$$\sigma^0 = \frac{F_0}{\sum_{j=1}^n A_j} \quad (7)$$

つぎに σ^0 に対応した歪み ε^0 を、図1に示した応力-歪み線図から得る。

さらに、圧縮荷重を受ける柱に微小な横撓みが与えられたことを考える。柱の変形は **cosine** 形状と仮定すると、各点 (x_i, y_j) における歪み ε_{ij} は、

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 + \frac{2\delta\pi^2}{L^2} \cos\left(\frac{2\pi x_i}{L}\right) \cdot y_j \quad (8)$$

である。再び、応力-歪み線図より、 ε_{ij} に対応する応力 σ_{ij} を得る。

よって、 σ_{ij} を(5),(6)式に与え、 o 点 ($i=0$) モーメント M_0 と中点 ($i=m$) の M_m を算出し(4)式より **Anti-buckling capability** を得る。

また、 y 軸方向の分割は20とした。

3.2 計算結果

計算時に与える微小な横撓み δ の値について検討結果を示す。 δ を図5に示すように0.3mmから0.03mmの範囲で確認を行なった。**Anti-buckling capability** の計算結果は δ を0.3mmとした場合には、15kN以上の荷重で0.1mm, 0.05mmの結果と異なり、0.1mm以下ではその値が収束すると考えられる。

以上の検討から、本研究では、 δ はSMAの直径3mmに対して、十分小さい値を0.1mmとし、**Anti-buckling capability** の算出を行った。

Anti-buckling capability の計算を柱の長さ30mm~45mmについて5mm刻みで行った結果を図6に示す。

Fig.4 Definition of column for calculation

Fig.5 Anti-buckling capability of SMA (φ 3mm, L 35mm) on lateral deflections δ

SMAのAnti-buckling capabilityの特徴は、長さにかかわらず荷重500N程度で極小値が存在する事である。柱の長さ35mm以下では、この極小値は正であり、座屈は発生しない。また500Nよりも荷重が増加すると、Anti-buckling capabilityが増加する領域がある。

柱の長さ $L=30\text{mm}$ を例にとれば、Anti-buckling capabilityは400Nで極小となり、3.4kNで極大となる。7.2kN以上では負になり座屈に至る。また、 $L=40\text{mm}$ では、極小値が負であるため、軸荷重400~700Nで座屈する領域がある。

比較のため、同様の計算を一般的な構造材に適用した場合について示す。図7には計算に用いたアルミ

Fig.6 Anti-buckling capability for SMA columns

Fig.7 Stress-strain curve for aluminum

Fig.8 Anti-buckling capability for elastic and plastic

材料の応力歪み線図を示し、図8には、SMAと同様に柱の長さ30~45mm、直径3mmとした時のAnti-buckling capabilityの計算結果を示す。SMAの特性とは異なり、極小値をもたずに、荷重の増加とともに、Anti-buckling capabilityは減少し続け、その符号が負となり、座屈が発生する軸荷重の領域は3.8kN以上のみである。

つぎに、SMAの応力歪み線図の傾きと座屈荷重の関係について述べる。柱の長さ $L=25\text{mm}$ から 45mm まで1mm刻みでAnti-buckling capabilityの計算を実施し、図9に座屈荷重と式(9)によって得た軸方向の座屈応力の関係を示す。

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{\sum_{j=1}^n A_j} \quad (9)$$

F_{cr} : 柱の座屈荷重

σ_{cr} : 座屈応力 (断面の平均値)

座屈応力が長さ38mmでは67MPa、長さ37mmでは725MPaとなり両者の間では座屈応力が著しく異

Fig.9 Numerical analysis of SMA buckling

Fig.10 Buckling stress range on S-S curve

なる結果となる。

図 10 は座屈応力の範囲を SMA の応力歪み線図上に示したものである。応力歪みカーブが下に凸となる領域は座屈が生じていない。これは TD-effect により、柱の受ける荷重の増加にしたがい、Anti-buckling capability が増加する傾向を有する。その結果 Anti-buckling capability は正となるため、座屈が抑制され、座屈現象が生じなかった領域であることが判る。

4. 実験値と計算値の比較

Anti-buckling capability の計算によって得た知見にもとづいて、SMA で作られた柱の座屈荷重計算値と実験値との比較を行う。実験は両端全拘束条件で $L=25\text{ mm}$ から 5 mm 刻みで 45 mm までの柱について実施した。結果、図 11 に示すように長さ 38 mm 以上の著しい座屈荷重の低下現象も含め、実験と計算の SMA 座屈荷重はよく一致している。

5. SMA の座屈荷重上昇のための手法

SMA の長さ 38 mm 以上の柱について Anti-buckling capability の極小値が負となったため座屈荷重が低下するが、この Anti-buckling capability の極小値は高荷重領域とは相対的に比較すれば僅かである。したがって、少ない曲げ剛性を付加すれば座屈抑制が可能と考えられる。その予測される効果は、 $L=40\text{ mm}$ 以上の場合でも $L=35\text{ mm}$ 以下の事例と同様に、高荷重の状態で生じる座屈と同等となり、座屈荷重の大幅な向上が得られると考えられる。

この仮説を確認するため、図 12 のような薄板チューブを外周に設置し、曲げ補強を行う事を考える。

簡単のため、チューブが SMA の柱に及ぼす効果は図 13 のようにチューブの中央と両端部でのみ生じ、チューブには 3 点曲げが加わると仮定する。

チューブ長を L_c 、SMA の長さを L とし、チューブの撓み δ_c が与えられた時、荷重 F_c と撓みの関係は、

Fig.11 Buckling in 3mm columns (fix-fix)

$$\delta_c = \frac{F_c \cdot L_c^3}{48EI} \quad (10)$$

ここで

E : ヤング率,

I : チューブの断面2次モーメント

d : チューブの内径, t : チューブの板厚とすると,

$$I = \frac{\pi}{64} \{ (d+2t)^4 - d^4 \} \quad (11)$$

である。

つぎに、(3)式で定義した M に対し、チューブによって追加されるモーメント M_c は、

$$M_c = \frac{F_c \cdot L_c}{4} = \frac{12EI\delta_c}{L_c^2} \quad (12)$$

チューブによって追加される Anti-buckling capability

Fig.12 SMA column and tube

Fig.13 Definitions of SMA column and tube

Table 1 Spec of tube

Young's modulus	Length	Diameter	Thickness
E	L_c	d	t
200 GPa	$L_c=L/2$	3mm	0.1mm

k_c は

$$k_c = \frac{M_c}{\delta} = \frac{12EI}{L_c^2} \cdot \frac{\delta_c}{\delta} \quad (13)$$

である。

この考え方により、直径 3mm の SMA に対し適用した補強チューブの緒元を表 1 に示す。なお、かんごう状態はしまりばめとした。

$L_c = L/2$ より、横撓みは $\delta_c = \delta/2$ となり、(13)式に代入すると、 $k_c = 35$ [N・m/mm] となる。一方、長さ 40mm の SMA の Anti-buckling capability は図 6 に示したように、-0.1 [Nm/mm] 程度である。

以上から、薄板チューブの曲げ剛性で座屈抑制には十分であると予測される。

チューブ適用の実験結果を図 14 に示す。

SMA の長さが 40mm、45mm の場合、薄板チューブによる補強により、Anti-buckling capability の極小値付近では座屈現象は発生せず、座屈荷重は大幅に向上することが確認できた。

実験で得られた補強後の SMA の座屈荷重と図 6 に示した Anti-buckling capability の関係について比較を行うと、長さ 40mm の例では、Anti-buckling capability の計算が荷重 4kN でその符号が正から負に

Fig.14 Buckling in SMA columns (fix-fix)

Fig.15 Buckling in Al columns (fix-fix)

至るのに対し、補強の実験結果は 3.8kN であった。また、長さ 45mm の場合には Anti-buckling capability の符号が正から負に至る荷重は 2.2kN に対し、補強の実験結果は 1.6kN であった。

また、Anti-buckling capability の極小値で座屈が生じない、35mm 以下の長さでは座屈荷重にほとんど差が認められなかった。

比較のためアルミの柱に対して同様のステンレスチューブを適用した実験結果を図 15 に示す。アルミの柱の場合では、チューブによる補強による座屈荷重は、補強前と比べほとんど差が認められなかった。

以下この原因について考察する。すでに示した図 8 の計算結果からアルミ柱は平均応力が降伏応力に達し、座屈していることがわかる。降伏応力に達すると Anti-buckling capability の値が正から約 -3~-4Nm/mm に減少する。このため前述のステンレスチューブの補強 3.5Nm/mm では Anti-buckling capability が正にならないためと考えられる。

加えて SMA の座屈実験結果から、チューブの剛性追加は、0.1~0.5 (Nm/mm) 程度と推定される。これはチューブが 0.1mm の薄板であるため、チューブの面外剛性の影響により、チューブ端部で局所変形が生じ (10) 式で示した曲げ剛性より小さい剛性追加となったと推定される。

以上 2 つの原因でアルミ柱の場合はステンレスチューブ補強の有無による座屈荷重にほとんど差が認められなかったと考える。

6. SMA と通常の材料との座屈荷重比較

ここでは、SMA の座屈荷重を通常の金属材料と比較する。定性的にはヤング率が高く、降伏応力が高い構造材ほど座屈荷重は高荷重になる⁴⁾。SMA のマルテンサイト相はアルミ・鉄に比べ表 2 に示すように、ヤング率はアルミより小さく、鉄に対して 1 桁小さい。

しかしながら、図 16 に示す実験結果では、直径 3mm 長さ 30mm 以下で、TD-effect により、SMA の方が座屈荷重は大きくなること判る。SMA の座屈荷重はアルミ 7075 に対しては約 2 倍である。アルミ

Table 2 Young's modules and yield stress

Material	Young's modulus E	Yield stress σ_{yld}
7075 Aluminum	70 GPa	550 MPa
H.S. Alloy Steel	200 GPa	930 MPa
Ti-Ni-Cu	40GPa (nonlinear)	(nonlinear)

Fig.16 Buckling in 3mm columns (fix-fix)

に比べヤング率、降伏応力ともに有利な条件である鉄 SCM435 に比較し、SMA の座屈荷重は 20~30% 大きい荷重が得られた。

7.まとめ

SMA の直径 3mm の直柱を用い、TD-effect によって生じる座屈抑制効果について解析を行い、下記の結果を得た。

- (1) SMA の柱は TD-effect によって、荷重を変数にすると Anti-buckling capability に極小値が存在する。
- (2) SMA の柱の座屈荷重について Anti-buckling capability の計算結果は実験と比較し良好な結果を得た。

- (3) TD-effect によって応力-歪み線図が下に凸となる曲率の範囲にある時、Anti-buckling capability は増加し、この範囲では、SMA の柱は座屈しなかった。
- (4) Anti-buckling capability の極小値について、直径 3mm の SMA 柱では長さ 40mm 以上になると座屈現象が低荷重で生じる。この極小値は小さな曲げ剛性の補強で Anti-buckling capability を負から正にすることが可能で、座屈荷重を増加することができる。
- (5) SMA の柱について、座屈荷重が大となる範囲を確認できた。直径 3mm 長さ 25mm の SMA では、鉄、アルミで作られる柱の座屈荷重に比べ、座屈荷重が大きくなる特徴がある。

文 献

- (1) 漆山, D. LEWINNEK, 蓑, 谷, 形状記憶合金で作られた柱の座屈現象について (第1報) : 機論 A, 67-659, (2001), 1132-1139.
- (2) 谷, 古屋, 江田, 森下, 名取, 樋口, 知的複合材料と知的適用構造物 (1996) 養賢堂
- (3) 田中, 戸伏, 宮崎, 形状記憶合金の機械的性質 (1993) 養賢堂
- (4) Tae Hyun Nam, Toshio Saburi, Kenichi Shimizu, Cu-Content Dependence of shape Memory Characteristics in Ti-Ni-Cu Alloys, Materials Transactions JIM Vol.31 No.11 1990, 959-967
- (5) Symonds, John, "Mechanical Properties of Materials," Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers, Tenth Edition, McGraw-Hill, 1996, 5-39