形状記憶合金素子の超弾性挙動の有限要素解析*

(第1報, 引張挙動と曲げ挙動の微小変形解析)

都井 裕^{*1}, 李 宗 儐^{*2}, 田 谷 稔^{*3}

Finite Element Analysis of Superelastic Behavior of Shape Memory Alloy Devices (1st Report, Small Deformation Analysis of Tensile and Bending Behaviors)

Yutaka TOI^{*4}, Jong-Bin LEE and Minoru TAYA^{**} Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8505 Japan

Shape memory alloys (SMA) exhibit superelastic behaviors and shape memory effects accompanied by austenite and martensite transformations. Computational tool is useful to design SMA-based devices efficiently. Brinson's one-dimensional constitutive modeling for SMA is extended to take into account the asymmetric tensile and compressive stress-strain behavior and applied to the finite element analysis of simple SMA devices in this paper. The superelastic behaviors of a bar subjected to tension as well as a supported beam subjected to four-point bending are analyzed under the assumption of small deformation. The calculated results for the beam agree well with the experimental results in the literature.

Key Words: Computational Mechanics, Constitutive Equation, Structural Analysis, Finite Element Method, Shape Memory Alloy, Superelasticity

1. 序

ニッケル・チタン系合金などに代表される形状記憶合金は、負荷・除荷後の残留ひずみが温度上昇により消失して元の形状に戻る形状記憶効果(shape memory effect)と、一定温度における負荷・除荷のヒステリシスにより大ひずみが回復して元の形状に戻る超弾性効果(superelastic effect)を有する⁽¹⁾。これらの効果を利用して、形状記憶合金は工業機器、家電、医療、スポーツ、装身具などさまざまな分野で利用されている。また近年では、アクチュエータ素子としての高機能化、多機能化を念頭に、鉄系、ニッケル・マンガン・ガリウム系などの強磁性体形状記憶合金の開発が進められている。多くの可能性を有する形状記憶合金素子の設計と開発の効率化および合理化のためには、計算による力学的挙動予測が不可欠である。

形状記憶合金の構成方程式および有限要素解析への

応用に関する研究として、Brinsonによる一次元構成式の定式化⁽¹⁾と有限要素解析への応用⁽²⁾、多軸構成式および有限要素解析への応用については河井ら⁽³⁾、TrochuとQian⁽⁴⁾、AuricchioとTaylor⁽⁵⁾、QidwaiとLagoudas⁽⁶⁾による研究などが知られているが、AuricchioとTaylorの研究以外は引張挙動と圧縮挙動の非対称性(すなわち静水圧の影響)を考慮しておらず、アクチュエータとして利用される機会の多いコイルばねの超弾性大変形挙動に対する実用的な有限要素解析法も確立していない。すなわち、引張・圧縮挙動の非対称性を考慮した形状記憶合金構成式による、はり要素を用いた効率的なコイルばねの超弾性有限変形挙動解析の試みが見られない。

本研究では基本とする構成式モデルとして、比較的簡単で見通しのよい現象論的構成式であるBrinsonの一次元構成方程式⁽¹⁾を選択する。この構成式を、AuricchioとTaylor⁽⁵⁾と同様にDrucker-Prager型の相当応力を用いることにより非対称の引張・圧縮挙動に拡張する。続いて、層分割型線形チモシェンコはり要素による増分形有限要素解析の定式化を行う。この定式化を形状記憶合金はりの引張りおよび曲げ荷重下の超弾性挙動解析に適用し、後者については実験結果と比較することにより本解析法を検証する。

* 原稿受付 2002年1月4日。

^{*1} 正員, 東京大学生産技術研究所(〒153-8505 東京都目黒区駒場4-6-1)。^{*2} 東京大学大学院。^{*3} ワシントン大学知的材料システム研究センター(Seattle, WA 98195-2600, U.S.)。

E-mail: toi@iis.u-tokyo.ac.jp

本研究の最終目標は、アクチュエータ素子として利用する機会の多い形状記憶合金コイルばねの有限変形下における超弾性挙動解析法の確立であるが、これについては次報で述べる。

2. 構成方程式

図1に、本研究で対象とする形状記憶合金の力学的性質を模式的に示す。図1(a)は変態臨界応力と温度の関係であり、図1(b)は超弾性応力・ひずみ挙動である。図中の T は温度、 σ は応力、 ε はひずみ、 σ_f^{cr} と σ_s^{cr} はマルテンサイト変態終了および開始臨界応力、 C_M と C_A は変態臨界応力と温度の関係における傾き、 M_f と M_s はマルテンサイト変態終了および開始温度、 A_s と A_f はオーステナイト変態開始および終了温度である。図1(a)において A_f よりも高い一定温度で応力を増加し再び除荷すれば、図1(b)に示すような超弾性挙動が発現する。

一般に形状記憶合金の一次元の応力・ひずみ関係は次式により記述される⁽¹⁾。

$$\sigma - \sigma_0 = E(\varepsilon - \varepsilon_0) + \Omega(\xi_s - \xi_{s0}) + \theta(T - T_0) \quad (1)$$

ここに、 E は縦弾性係数、 Ω は変態テンソル、 ξ_s は応力誘起によるマルテンサイト体積率、 θ は熱弾性係数であり、下添字0は初期値を意味する。最大残留ひず

(a) Critical stresses for transformation versus temperature

(b) Superelastic stress-strain behavior

Fig.1 Mechanical property of shape memory alloys

みを ε_L とすると、 Ω は以下のように表される。

$$\Omega = -\varepsilon_L E \quad (2)$$

縦弾性係数 E はマルテンサイト体積率 ξ の関数として次のように表される。

$$E = E_a + \xi(E_m - E_a) \quad (3)$$

ここに、 E_m はマルテンサイト相、 E_a はオーステナイト相の縦弾性係数である。温度誘起によるマルテンサイト体積率を ξ_T とすると、全マルテンサイト体積率 ξ は

$$\xi = \xi_s + \xi_T \quad (4)$$

と表される。 ξ 、 ξ_s および ξ_T は温度 T と応力 σ の関数である。

引張挙動と圧縮挙動の非対称性を考慮するため、 ξ 、 ξ_s および ξ_T の発展方程式を記述する際、文献(5)に従い、Mises の相当応力 σ_e の代わりに次式の Drucker-Prager 型相当応力を用いることにする⁽⁵⁾。

$$f = \sigma_e + 3\beta p \quad (5)$$

ここに、 β は材料定数、 p は静水圧であり、

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6)$$

と表される。式(5)の妥当性は、形状記憶合金に対する多数の多軸材料試験結果により検証されなければならないが、本論文では単軸応力状態のみ扱っており、その範囲での正当性は後述の実験結果との比較により検証される。形状記憶合金はりの超弾性曲げ変形挙動は軸方向垂直応力 σ_z のみに支配されると仮定すると、相当応力として次式が用いられる。

$$f = |\sigma_z| + \beta\sigma_z \quad (7)$$

材料定数 β は温度の関数となる。ある温度における引張時と圧縮時のマルテンサイト変態開始臨界応力をそれぞれ σ_{Ms}^+ および σ_{Ms}^- とすれば、簡単には $\beta = (|\sigma_{Ms}^-| - \sigma_{Ms}^+) / (|\sigma_{Ms}^-| + \sigma_{Ms}^+)$ と決定することができる。より正確には、引張りおよび圧縮材料試験と構成式モデルによる応力・ひずみ曲線をフィッティングして求められる。本論文の数値例では、文献(5)に記載の値 $\beta = 0.15$ を用いている。

式(7)を Brinson による ξ 、 ξ_s および ξ_T の発展方程式に導入することにより、(非双晶)マルテンサイト相への変態過程およびオーステナイト相への変態過程における以下の発展方程式が得られる。すなわち

(i) マルテンサイト相への変態過程
 $T > M_s$ および $\sigma_s^{cr}(1+\beta) + C_M(1+\beta)(T - M_s) < f < \sigma_f^{cr}(1+\beta) + C_M(1+\beta)(T - M_s)$ の場合：

$$\xi_s = \frac{1 - \xi_{s0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{cr}(1+\beta) - \sigma_f^{cr}(1+\beta)} \right. \\ \left. \times [f - \sigma_f^{cr}(1+\beta) - C_M(1+\beta)(T - M_s)] \right\}$$

$$+\frac{1+\xi_{s0}}{2} \dots\dots\dots (8)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1-\xi_{s0}} (\xi_s - \xi_{s0}) \dots\dots\dots (9)$$

$T < M_s$ および $\sigma_s^{cr}(1+\beta) < f < \sigma_f^{cr}(1+\beta)$ の場合:

$$\xi_s = \frac{1-\xi_{s0}}{2} \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_s^{cr}(1+\beta) - \sigma_f^{cr}(1+\beta)} \right. \\ \left. \times \{f - \sigma_f^{cr}(1+\beta)\} \right] + \frac{1+\xi_{s0}}{2} \dots\dots\dots (10)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1-\xi_{s0}} (\xi_s - \xi_{s0}) + \Delta T_\varepsilon \dots\dots\dots (11)$$

ここに, $M_f < T < M_s$ および $T < T_0$ の場合

$$\Delta T_\varepsilon = \frac{1-\xi_{T0}}{2} \{\cos [a_M(T-M_f)] + 1\} \dots\dots\dots (12)$$

その他の場合は

$$\Delta T_\varepsilon = 0 \dots\dots\dots (13)$$

(ii) オーステナイト相への変態過程

$T > A_s$ および $C_A(1+\beta)(T-A_f) < f < C_A(1+\beta)(T-A_s)$ の場合:

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[a_A \left(T - A_s - \frac{f}{C_A(1+\beta)} \right) \right] + 1 \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\xi_s = \xi_{s0} - \frac{\xi_{s0}}{\xi_0} (\xi_0 - \xi) \dots\dots\dots (15)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{\xi_0} (\xi_0 - \xi) \dots\dots\dots (16)$$

ここに, a_M と a_A は次式のように定義される.

$$a_M = \frac{\pi}{M_s - M_f}, \quad a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \dots\dots\dots (17)$$

3. 有限要素解析の定式化

本解析では, 前述のように圧縮変形挙動は引張変形挙動と非対称とし, 曲げに伴うせん断変形挙動は線形弾性的(すなわち, せん断弾性係数 G は一定)と仮定する. 2章で概説した構成方程式に基づいて有限要素定式化を行うと, 次式のような増分形の要素剛性方程式を得る.

$$\{f_R\} + \{\Delta f\} + \int_{V_e} [B]^T [D_t] \{\Delta \varepsilon_\theta\} dV = [k_t] \{\Delta u\} \dots\dots\dots (18)$$

Fig. 2 Layered Timoshenko beam element

ここに,

$$[k_t] = \int_{V_e} [B]^T [D_t] [B] dV \dots\dots\dots (19)$$

$$\{\Delta \varepsilon_\theta\} = \begin{Bmatrix} \alpha_t \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

式中, $\{f_R\}$ と $\{\Delta f\}$ はそれぞれ残差力ベクトルと外力増分ベクトル, $[B]$ はひずみ・節点変位マトリックス, $[D_t]$ は応力・ひずみマトリックス, $\{\Delta \varepsilon_\theta\}$ は熱ひずみ増分, $[k_t]$ は接線剛性マトリックス, $\{\Delta u\}$ ($[u] = [u_1, \theta_{y1}, w_1, u_2, \theta_{y2}, w_2]$) は節点変位ベクトル, α_t は熱膨張係数 α などの関数である. 図2に示す層分割型線形チモシェンコはり要素に対するマトリックス $[B]$ と $[D_t]$ はそれぞれ, 以下に示すように表される.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h\eta}{2l} & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{h\eta}{2l} & \frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1-\varphi}{2} & 0 & \frac{1}{l} & -\frac{1+\varphi}{2} & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

$$[D_t] = \begin{bmatrix} E_t & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

式(22)における E_t と式(20)における α_t は, 以下のよう

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (23)$$

(i) マルテンサイト相への変態過程

$T > M_s$ および $\sigma_s^{cr}(1+\beta) + C_M(1+\beta)(T-M_s) < f < \sigma_f^{cr}(1+\beta) + C_M(1+\beta)(T-M_s)$ の場合:

$$E_t = \frac{E}{H} \dots\dots\dots (24)$$

$$H = 1 - \{E\varepsilon_L n - \text{sign}(\sigma_z)\varepsilon_z(E_m - E_a)In \\ + \varepsilon_L \xi_s(E_m - E_a)In\} \{1 + \text{sign}(\sigma_z)\beta\} \dots\dots\dots (25)$$

$$\alpha_t = \alpha + \text{sign}(\sigma_z)\varepsilon_L n(1+\beta)C_M \\ - \frac{\varepsilon_z}{E}(E_m - E_a)In(1+\beta)C_M \\ + \text{sign}(\sigma_z)\frac{\varepsilon_L}{E}\xi_s(E_m - E_a)In(1+\beta)C_M \dots\dots\dots (26)$$

ここに,

$$n = \frac{1-\xi_{s0}}{2} \sin \left\{ \frac{\pi}{(\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr})(1+\beta)} [\sigma - \sigma_f^{cr}(1+\beta) - C_M(1+\beta)(T-M_s)] \right\} \frac{\pi}{(\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr})(1+\beta)} \dots\dots\dots (27)$$

$$I = \frac{1-\xi_0}{1-\xi_{s0}} \dots\dots\dots (28)$$

$T < M_s$ および $\sigma_s^{cr}(1+\beta) < f < \sigma_f^{cr}(1+\beta)$ の場合:

Table 1 Material constants of Nitinol alloy

Modulus	Transformation temperatures	Transformation constants	Maximum residual strain
$E_a=67 \times 10^3 \text{ MPa}$ $E_m=26.3 \times 10^3 \text{ MPa}$ $\theta=0.55 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $\beta=0.15$	$M_f=9^\circ\text{C}$ $M_s=18.4^\circ\text{C}$ $A_s=34.5^\circ\text{C}$ $A_f=49^\circ\text{C}$	$C_M=8 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $C_A=13.8 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $\sigma_s^{cr}=100 \text{ MPa}$ $\sigma_f^{cr}=170 \text{ MPa}$	$\varepsilon_L=0.067$

Fig. 3 Nitinol alloy (Ni₅₅Ti) bar

$$E_t = \frac{E}{H} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$H = 1 - \{E\varepsilon_L n - \text{sign}(\sigma_z)\varepsilon_z(E_m - E_a)In + \varepsilon_L \xi_s(E_m - E_a)In\} \{1 + \text{sign}(\sigma_z)\beta\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\alpha_t = \alpha \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに,

$$n = \frac{1 - \xi_{s0}}{2} \sin \left[\frac{\pi}{(\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr})(1 + \beta)} \times \{\sigma_z - \sigma_f^{cr}(1 + \beta)\} \right] \frac{\pi}{(\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr})(1 + \beta)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$I = \frac{1 - \xi_0}{1 - \xi_{s0}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

(ii) オーステナイト相への変態過程

$T > A_s$ および $C_A(1 + \beta)(T - A_f) < f < C_A(1 + \beta)(T - A_s)$ の場合:

$$E_t = \frac{(1 + \beta)C_A E}{H} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$H = (1 + \beta)C_A + \{E\varepsilon_L n - \text{sign}(\sigma_z)\varepsilon_z(E_m - E_a) \times In + \varepsilon_L \xi_s(E_m - E_a)In\} \{1 + \text{sign}(\sigma_z)\beta\} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\alpha_t = \alpha - \text{sign}(\sigma_z)\varepsilon_L n + \frac{\varepsilon_z}{E}(E_m - E_a)In - \text{sign}(\sigma_z)\frac{\varepsilon_L}{E}\xi_s(E_m - E_a)In \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに,

$$n = \frac{\xi_{s0}}{2} \sin \left[a_A \left(T - A_s - \frac{f}{(1 + \beta)C_A} \right) \right] a_A \quad \dots\dots\dots (37)$$

(a) Load-displacement curves

(b) Stress-strain curves

Fig. 4 Nitinol bar subjected to tension

$$I = \frac{\xi_0}{\xi_{s0}} \quad \dots\dots\dots (38)$$

その他の場合:

$$E_t = E \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\alpha_t = \alpha \quad \dots\dots\dots (40)$$

Table 2 Material constants of Ni-Ti-10% Cu alloy

Modulus	Transformation temperatures	Transformation constants	Maximum residual strain
$E_a=60 \times 10^3 \text{ Mpa}$ $E_m=20 \times 10^3 \text{ Mpa}$ $\theta=0.55 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$ $\beta=0.15$	$M_s=T_0-72.5^\circ\text{C}$ $M_s=T_0-52.5^\circ\text{C}$ $A_s=T_0-21.7^\circ\text{C}$ $A_f=T_0-14.5^\circ\text{C}$	$C_M=8 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$ $C_A=13.8 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$ $\sigma_{s^{cr}}=100 \text{ MPa}$ $\sigma_{f^{cr}}=180 \text{ MPa}$	$\epsilon_L=0.067$

Fig. 5 Ni-Ti-10% Cu alloy beam subjected to 4-point bending

4. 解析結果

4.1 引張変形挙動 Nitinol 合金 (Ni_{55}Ti) におけるすべての材料定数を表 1 に示す。一定温度下において、図 3 に示すような Nitinol 合金 (Ni_{55}Ti) 製の一端固定棒の引張変形挙動を解析した。

引張解析における温度条件は 20°C , 40°C , 60°C である。棒の全長を 5 要素分割 (1 要素でも結果は同じである), 深さ方向は 9 層分割とした。各温度における解析結果を図 4 に示す。図 4(a) は荷重と変位 (棒の先端における値) の関係, 図 4(b) は応力とひずみの関係である。温度が高くなるとマルテンサイト変態開始応力も高くなる。また, 負荷直後の剛性はオーステナイト相の剛性, 除荷直後の剛性はマルテンサイト相の剛性であり, 後者の値のほうが小さい。オーステナイト変態開始温度より低い $T=20^\circ\text{C}$ の場合は除荷後に大きな残留ひずみが残る。オーステナイト変態終了温度より高い $T=60^\circ\text{C}$ の場合は完全にオーステナイト相に戻り, 残留ひずみが消滅する。すなわち超弾性挙動を示す。オーステナイト変態開始温度と終了温度の間に位置する $T=40^\circ\text{C}$ の場合は除荷後にマルテンサイト相とオーステナイト相が混在する。これらは合理的な結果である。

4.2 曲げ変形挙動 図 5 は, Ni-Ti-10%Cu 合金製の四点曲げを受ける両端支持はりであり, 断面は円形である。要素数は 6, 層分割数は 9 である。材料

(a) Assumed stress-strain curve

(b) Load-displacement curves

Fig. 6 Ni-Ti-10% Cu alloy beam subjected to 4-point bending

定数は引張試験による応力-ひずみ線図⁽⁵⁾ から表 2 のように決定した。

図 6(a) は, 表 2 の材料定数による応力-ひずみ曲線と引張試験結果⁽⁵⁾ の比較である。除荷時のオーステナイト相への逆変態過程における応力レベルにおいて実験結果との若干の相違も見られるが, 総体的に本構

成式モデルは引張試験結果をほぼ良好に再現可能であることがわかる。図6(b)は、引張変形挙動と圧縮変形挙動を対称と仮定した場合($\beta=0$)および非対称と仮定した場合($\beta=0.15$)の荷重-変位曲線の比較である。両者とも同じ引張試験結果に基づき構成方程式におけるパラメータを決定しているが、引張りと圧縮を対称と仮定した場合は過大な変位が計算されている。引張りと圧縮を非対称と仮定した場合の結果は Auricchio と Taylor⁽⁵⁾ の実験結果と良好に一致している。

図7は引張りと圧縮挙動が対称的な場合($\beta=0$)、と非対称の場合($\beta=0.15$)のはり中央部上縁と下縁にお

ける応力-ひずみ曲線である。非対称の場合、圧縮側(上縁)において引張側(下縁)より高い応力レベルでマルテンサイト変態を起こしていることがわかる。図8は引張りと圧縮挙動が非対称な場合の最大荷重時における要素内応力およびひずみ分布である。図5の全要素の結果をプロットしているため、左右対称の結果である。各要素において上縁が圧縮、下縁が引張状態にある。はり要素を使用しているため、必然的にひずみ分布は直線状である。応力分布より、要素1と6においてはまだマルテンサイト変態が起っていないが、要素3と4ではすでにマルテンサイト変態が終了していることがわかる。要素2と要素5の上縁および下縁

(a) Lower side (tension side)

(b) Upper side (compression side)

Fig. 7 Stress-strain curves at the midspan of Ni-Ti-10% Cu alloy beam subjected to 4-point bending

 Fig. 8 Stress and strain distributions in Ni-Ti-10% Cu alloy beam at the maximum load ($\beta=0.15$)

近傍ではマルテンサイト変態が進行している。実験結果との対比を含む以上の計算結果は合理的と判断される。

5. 結 論

形状記憶合金素子の力学的挙動予測のため、形状記憶合金の超弾性変形挙動に対する有限要素解析の一手法を提案した。すなわち、形状記憶合金に対する Brinson の一次元構成方程式を、Drucker-Prager 型の相当応力を導入することにより、引張挙動と圧縮挙動の非対称性を考慮できるように拡張した。さらに、層分割型線形チモシェンコはり要素を用いた増分形有限要素解析法の定式化を示した。

この定式化を一定温度下における棒の引張挙動および両端支持はりの四点曲げ挙動の解析に適用した。後者は Auricchio と Taylor による実験結果と比較し、

本解析手法の妥当性を実証した。本解析手法は形状記憶合金はりの超弾性変形挙動に対する計算手法として十分な簡明性と精度を有している。次報ではこれを、形状記憶合金コイルばねの超弾性有限変形解析に拡張する。

文 献

- (1) Brinson, L. C., *J. Intell. Mater. Systems Struct.*, **4** (1993), 229-242.
- (2) Brinson, L. C. and Lammering, R., *Int. J. Solids Struct.*, **30**-23 (1993), 3261-3280.
- (3) 河井昌道・ほか2名, 機論, **63**-615, A(1997), 3751-3758.
- (4) Trochu, F. and Qian, Y.-Y., *Comput. Struct.*, **62**-5 (1997), 799-810.
- (5) Auricchio, F. and Taylor, R. L., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **143** (1997), 175-194.
- (6) Qidwai, M. A. and Lagoudas, D. C., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **47** (2000), 1123-1168.