一般化速度依存性非弾性構成式*
(弾塑性構成式の拡張)

橋 口 公 一*1

Generalized Rate-Dependent Inelastic Constitutive Equation
(The Extension of Elastoplasticity)

Koichi HASHIGUCHI*2

*2 Graduate School of Agriculture, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 812-8581 Japan

The rate-dependent inelastic constitutive equation is formulated by extending the elastoplastic constitutive equation so as to retain its mathematical structure and thus reduces to the latter equation at infinitesimal strain rate, whilst the over-stress model, the best-known inelastic constitutive model, has substantially different mathematical structure from the elastoplastic constitutive equation. It belongs to the superposition model pre on the additive decomposition of the inelastic strain rate into the plastic and the creep strain rates. It can describe precisely the rate-dependent inelastic deformation at a wide range of strain rate, whilst the over-stress model cannot predict appropriately the difference of mechanical response due to the rate of deformation, especially inapplicable to the description of deformation at high strain rate.

Key Words: Elastoplasticity, Constitutive equation, Creep, Rate-Dependence, Subloading Surface Model, Viscoplasticity

1. 緒 言

物質の変形は一般に変形速度つまり時間に依存する。したがって、変形速度依存性の表現は工学上の実際問題の解析における重要課題である。粘弾性モデルは、弾性限界つまり降伏応力以下の応力状態における変形挙動の表現にのみ適用し得る。そこで、降伏応力を超える応力状態における速度依存性変形挙動を表現し得る構成式が究明されてきた。種々の速度依存性構成モデルの中、“超過応力モデル”(over-stress model)^{1)~6)}は速度依存性変形挙動の予測に広く用いられている。このモデルは、非弾性ひずみ速度を“粘塑性ひずみ速度”と呼ばれる単一の量で定式化するもので、“統一型モデル”(unified model)に属する。しかし、これは、次のような問題点を有している。

- 1) 粘弾性モデルと同様に、粘塑性ひずみ速度は応力速度ではなくに(超過)応力に関係づけられるので、弾塑性構成式とは基本的に異なる数学

的構造をもつ。

- 2) クリープポテンシャルが塑性ポテンシャルと異なる場合(例えば、土に関する Hashiguchi and Okayasu⁶⁾ 参照), 無限小のひずみ速度において本モデルで予測される粘塑性ひずみ速度は、塑性構成式で算定される塑性ひずみ速度に一致しない。それゆえ、塑性ひずみ速度とクリープひずみ速度を単一の量として扱うことはできず、クリープひずみ速度としての粘塑性ひずみ速度に加えて、塑性ひずみ速度を導入すべきであろう。
- 3) 実際の材料の強度には限界があるが、粘塑性ひずみ速度は超過応力に関係づけられるので、ひずみ速度無限大の場合、応力は無制限に増大し強度に限界が存在しないという非現実的な特性を示す。つまり、本モデルは高速変形に適用できない。
- 4) 従来の超過応力モデルは、降伏面の内部を純粋弾性域とする古典塑性論に基づいているので、滑らかな弾・非弾性遷移を表現できないとともに、降伏応力以下の応力の繰返し負荷に対するひずみの集積を表現できない。

* 原稿受付 2002 年 3 月 25 日。

*1 正員, 九州大学大学院農学研究院(〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

E-mail: khashi@agr.kyushu-u.ac.jp

特に、非線形移動硬化⁷⁾を組み込んだ超過応力モデル⁸⁾が金属に対して広く用いられているが、次の問題を有している。

- 5) 従来の塑性論において仮定されてきたものに比してはるかに小さな弾性域を囲む降伏面が採用される。本モデルは、繰返し負荷挙動の予測に広く用いられているが (Chaboche⁹⁾, Ohno¹⁰⁾、滑らか条件^{11)~14)}に抵触するとともに、Masing則¹⁵⁾を無視しており、2面モデルと同様の非現実的な予測がなされる。特に、正、負両振りの応力振幅の繰返し負荷挙動はある程度、現実的に予測し得るが、正または負いずれかの片振り応力振幅の繰返し負荷に対しては開いたヒステリシスループを持つ非現実的に大きなひずみの集積が予測される^{11)~14)}。

このような状況下で、弾塑性論は永い研究の歴史を経て高度な理論的体系へと発展されている。上述の超過応力モデルにおけるような欠点を含まず、かつ論理的飛躍が無いように弾塑性構成式を拡張することにより速度依存性構成式を定式化することが望まれよう。

微視構造の相互すべりに基づく塑性変形は、変形速度が増大すると、微視構造間に作用する粘性抵抗が増大して抑制される。それゆえ、大きな変形が高いひずみ速度で生じるとき、変形はほとんど弾性的に生じて降伏面は変化しない状態で応力が増大するので、応力は降伏面から飛び出すことになる。“下負荷面モデル”^{16)~18)} (subloading surface model) は、塑性負荷過程においても応力が降伏面上に存在することを前提としない。つまり、本モデルは、非古典塑性論¹⁹⁾に属する。本モデルにおいては、降伏面を“正規降伏面”と呼び、これに相似で現応力点を通る“下負荷面” (subloading surface) を導入する。ところで、巨視的に塑性変形をもたらす微視構造の相互すべりは、一部の微視構造に始まって、応力が降伏面に近づくに従って、次第に全微視構造に広がっていくと考えられる。正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比 (“正規降伏比” (normal-yield ratio) と称する) は、応力の正規降伏面への接近の3次元測度に他ならないが、塑性変形過程においては正規降伏比は増大すると仮定される。この仮定に基づいて、下負荷面に拡張された適応条件を定式化し、これに関連流動則を適用して、滑らかな弾・塑性遷移を示すようにひずみ速度が定式化される。本モデルは連続性条件、滑らか条件等の構成式としての要求条件^{11)~14)}を満たしている。

本論文においては、既往のモデルにおける問題点 1) ~ 5) を考慮して、下負荷面モデルに基づいて、弾塑性構成式をその数学的基本構造を維持しつつ、無限小の応力速度のときそれ自身に帰着するように拡張して速度依存性非弾性構成式を定式化する。この定式化においては、問題点 2) に対処し得るように、非弾性ひずみ速度を塑性ひずみ速度とクリープひずみ速度に加算分解する。つまり、本提案構成式は“重合せ型モデル” (superposition model) に属する。なお、単に超過応力モデルに弾塑性構成式における塑性ひずみ速度項を組み合わせた重合せ型モデルが Lamaitre and Chaboche⁸⁾により示されている。しかし、このモデルにおいては、ひずみ速度の増大によって塑性ひずみ速度が抑制されるような定式化がなされていないので、応力の増大によって非現実的に大きな塑性ひずみ速度を生じる。また、本論文における類似の手法は、“境界面-弾塑性-粘塑性モデル” (bounding surface elasto-plasticity-viscoplasticity) として Dafalias²⁰⁾によって提案され、土に適用されている^{21)~23)}。このモデルは、“動径測度の境界面モデル” (bounding surface model with a radial mapping) に基づいている。その基本構造は、先に提案された下負荷面モデル^{16)~18)}と基本的に変わらないが、塑性ひずみ速度は、単に内挿法によって与えられており、適応条件に基づいて合理的に定式化されたものではない。また、応力は境界面の内部に存在しなければならないので、高いひずみ速度の場合、非現実的に弱い応力応答特性を示す。一方、この欠点は、先に述べたように、下負荷面が正規降伏面より拡大することを許容することにより解決されると考えられる。

2. 速度依存性非弾性構成式

本節では、ひずみ速度の増大とともに、塑性ひずみ速度が抑制されるように下負荷面モデル^{16)~18)}を拡張するとともに、弾性、塑性ひずみ速度に加えてクリープひずみ速度項を導入して、速度依存性非弾性構成式を定式化する。

2・1 ひずみ速度の分解 固体は、固体粒子 (例えば、金属では金属結晶格子、土では土粒子) の集合体であり、固体の変形は、固体粒子そのものの変形 (金属の場合は結晶格子のゆがみ、土の場合は土粒子自身の変形) とこれらの固体粒子の相互すべり (金属の場合は結晶格子のずれつまり転位、土の場合は土粒子の相互すべり) からなる。固体粒子自身の変形は、剛性が高く、また、通常の応力レベルでは可逆的であり、巨視的には負荷経路非依存性

Fig. 1. Elastic, plastic and creep strains.

の弾性変形をもたらす。一方、固体粒子の相互すべりは、非可逆的で、巨視的には負荷経路依存性の非弾性変形をもたらす。そこで、ひずみ速度 $\mathbf{D}$ (速度勾配の対称成分) は、通常のように、弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^e$ と非弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^i$ に加算分解されると仮定する。つまり、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^i, \quad (1)$$

ここに、弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^e$ は、応力速度により次式で与えられるとする。

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (2)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力、 $(\cdot)$ は客観性を有する共回転速度⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾、また、4 階テンソル $\mathbf{E}$ は次のように Hooke 型で与えられるとする。

$$E_{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3)$$

ここに、 E および ν はそれぞれ Young 率および Poisson 比、また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

固体粒子の相互すべりは、摩擦抵抗の変化に応じる応力速度および粘性抵抗に打ち勝つための (超過) 応力によってもたらされる。応力速度による巨視的変形は塑性構成式、また、応力による巨視的変形はクリープ構成式で記述し得るが、前者は固体粒子自身の変形つまり弾性変形に比して緩速変形であるが、後者は一層、緩速変形である。つまり、固体

は、異なる時間特性をもつ微視構造で構成されている^{(8), (26)}。そこで、非弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^i$ は次のように塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}^p$ およびクリープひずみ速度 $\mathbf{D}^c$ に分解されると仮定する。

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^c. \quad (4)$$

クリープひずみ速度は、超過応力に関係づけられるので、単軸負荷について Fig. 1 (σ および ϵ はそれぞれ単軸方向の応力およびひずみ、添え字 e, p および c はそれぞれ弾性、塑性およびクリープ部分を表す) に示すように、無限小および無限大のひずみ速度においては生じない。したがって、超過応力モデルによれば、無限大のひずみ速度の場合、弾性変形のみが生じて無限大の強度を示す非現実な予測がなされる。

2.2 正規降伏面および動的負荷面 次の等方・移動硬化の降伏面を採用する。

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = F(H), \quad (5)$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}. \quad (6)$$

2 階テンソル $\boldsymbol{\alpha}$ は移動硬化変数 (‘背応力’ と呼ばれる) であり、スカラー H は等方硬化変数である。なお、関数 f はテンソル $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の 1 次の同次関数、ゆえに、降伏面は相似形を維持すると仮定する。

材料の内部構造の変化は非弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^i$ によってもたらされるが、内部変数 H および $\boldsymbol{\alpha}$ の速度は $\mathbf{D}^i$ の線形関数であると仮定する。つまり、

Fig. 2. Dynamic-loading, normal-yield and subloading surfaces.

$$\left. \begin{aligned} \dot{H} &= \text{tr}\{\mathbf{f}_H(\sigma, H, \alpha) \mathbf{D}^i\}, \\ \dot{\alpha} &= \mathbf{f}_\alpha(\sigma, H, \alpha) \mathbf{D}^i. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

したがって、これらは、式(4)より、次のように、塑性およびクリープ部分に分解される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{H} &= \dot{H}^p + \dot{H}^c, \\ \dot{\alpha} &= \dot{\alpha}^p + \dot{\alpha}^c, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}^p &\equiv \text{tr}\{\mathbf{f}_H(\sigma, H, \alpha) \mathbf{D}^p\}, \dot{H}^c \equiv \text{tr}\{\mathbf{f}_H(\sigma, H, \alpha) \mathbf{D}^c\}, \\ \dot{\alpha}^p &\equiv \mathbf{f}_\alpha(\sigma, H, \alpha) \mathbf{D}^p, \dot{\alpha}^c \equiv \mathbf{f}_\alpha(\sigma, H, \alpha) \mathbf{D}^c. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$\mathbf{f}_H$ は 2 階テンソル， $\mathbf{f}_\alpha$ は 4 階テンソル，(*) は物質時間微分， $\text{tr}()$ は対角和を示す。

以後、降伏面の内部を弾性域とせず、その内部の応力変化によっても塑性変形が生じるとする非古典塑性論⁽⁹⁾の枠組に属する下負荷面モデル^{(10)~(18)}に基づいて、非弾性構成式を定式化する。そこで、従来の降伏面を改めて“正規降伏面”(normal-yield surface)と呼ぶことにする。

まず、Fig. 2 のように、現応力 σ を通って、背応力 α に関して正規降伏面に対して相似形および相似の配置を維持する“動的負荷面”(dynamic-loading surface)を導入する。また、正規降伏面に対する動的負荷面の相似比を“動的負荷比”(dynamic-loading ratio)と呼び、 R で示すことにする。 $R=0$ は σ が α に一致し最も弾性的な状態、 $0 < R < 1$ は下降伏状態、 $R=1$ は σ が正規降伏面上に到達した正規降伏状態、

$R > 1$ は超過正規降伏状態に相当する。つまり、動的負荷比 R は正規降伏状態を基準単位とする応力レベルの 3 次元的測度を表すといえる。

動的負荷面上の現応力における同一の外向き法線方向をもつ正規降伏面上の共役応力 σ_y は次式で表される。

$$\sigma_y = \{\sigma - (1-R)\alpha\} / R \quad (\sigma - \alpha = R(\sigma_y - \alpha)). \quad (10)$$

式(5)における σ を σ_y とみなして、式(10)を式(5)に代入して、次の動的負荷面式を得る。

$$f(\hat{\sigma}) = RF(H). \quad (11)$$

式(11)の時間微分により次式を得る。

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \sigma} \dot{\sigma}\right) - \text{tr}\left(\frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \sigma} \dot{\alpha}\right) = \dot{R}F + RF' \dot{H}, \quad (12)$$

ここに、

$$F' \equiv dF / dH. \quad (13)$$

2・3 動的負荷比の発展側 速度非依存性材料の場合、塑性負荷過程 $\mathbf{D}^p \neq 0$ においては、応力は正規降伏状態に漸近すると考えられる。一方、速度依存性材料の場合、ひずみ速度の増大に伴って塑性変形は抑制されると考えられる。特に、大きな変形が高速で生じる場合、粘性抵抗の増大によって塑性変形が抑制されて降伏面は殆ど変化し得ないので、応力は降伏面から飛び出すと考えられる。したがって、動的負荷面は正規降伏面を超えて拡大することが可能でなければならない。一方、材料の強度には限界があるので、応力範囲には必ずから限界が存在するといえる。そこで、動的負荷比 R の発展則の定式化に当たって、次の仮定を設ける。

- 1) 動的負荷比 R は、塑性負荷状態 $\mathbf{D}^p \neq 0$ においてのみ増大する。このことは、応力一定のクリープ過程、応力緩和等の弾性—クリープ変形過程においては、動的負荷比 R は増大し得ないことから了解されよう。
- 2) 無限小のひずみ速度の準静的変形過程 $\mathbf{D} \equiv 0$ においては、速度非依存性の下負荷面モデルにおける正規降伏比に一致する。つまり、動的負荷比 $\hat{R}$ の塑性ひずみ速度の大きさ $\|\mathbf{D}^p\|$ に対する比は、最も弾性的状態 $R=0$ ($\sigma = \alpha$) においては、塑性ひずみ速度に比して動的負荷比 R は無限大の比率で増大し、一方、正規降伏状態 $R=1$ においては、 R はもはや増大しないゆえに、

$$\hat{R} = U_R \|\mathbf{D}^p\| \quad \text{for } \mathbf{D}^p \neq 0, \quad (14)$$

ここに、 U_R は、次の条件を満たす R の単調減少関数である。

$$U_R = \begin{cases} \infty & \text{for } R = 0, \\ 0 & \text{for } R = 1, \\ < 0 & \text{for } R > 1. \end{cases} \quad (15)$$

$\|\cdot\|$ はテンソルの大きさを示す。関数 U_R の具体例を次に示す。

$$U_R = -u \ln R, \quad (16)$$

ここに、 u は材料定数である。

- 3) 動的変形過程 $\mathbf{D} \neq 0$ においては、 R の発展速度は、ひずみ速度に伴い増大するが、応力の上昇には限界があると考えられるので、いかなるひずみ速度でも塑性ひずみ速度が生じるように、ひずみ速度の影響には限界が存在するとする。なお、これにより、緒言に記した既往のモデルの問題点 2) が改善される。

以上により、動的負荷比 R の発展則として次式を仮定する。

$$\dot{R} = U_t \|\mathbf{D}^p\| \text{ for } \mathbf{D}^p \neq 0, \quad (17)$$

ここに、 U_t は、 R の単調減少関数 U_R と $\|\mathbf{D}\|$ の単調増加関数 $U_D (\geq 0)$ により、次のように加算的に構成される。

$$U_t = U_R(R) + U_D(\|\mathbf{D}\|), \quad (18)$$

ここに、 U_D は、次の条件を満たす。

$$\left. \begin{aligned} U_D &= 0 \text{ for } \|\mathbf{D}\| = 0, \\ U_D &= \xi \text{ for } \|\mathbf{D}\| = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ξ は関数 U_D の極限值を与える材料定数である。ここに、 $\|\mathbf{D}\| = 0$ のとき $R = 1$ で $\dot{R} = 0$ 、また、 $\|\mathbf{D}\| > 0$ のとき $R = 1$ においても $\dot{R} > 0$ となる。Fig. 3 に関数 U_R 、 U_D 、 U_t を例示している。関数 U_D の具体例を次に示す。

Fig. 3. Functions U_R , U_D and U_t in the evolution rule of dynamic-loading ratio R .

$$U_D = \xi \{1 - \exp(-\kappa \|\mathbf{D}\|)\}, \quad (20)$$

ここに、 κ は材料定数である。

なお、動的負荷面の発展則(17)は次節で与える塑性ひずみ速度式に組み込まれる。一方、動的負荷比 R は式(11)つまり

$$R = f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})/F(H) \quad (21)$$

に現在の応力、内部変数の値を代入して算定される。

2・4 塑性ひずみ速度 式(14)を式(12)に代入して、動的負荷面に拡張された次の適応条件を得る。

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \text{tr}\left(\frac{\partial f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) = U_t \|\mathbf{D}^p\| F + R F' \dot{H}. \quad (22)$$

いま、関連流動則を仮定する。すなわち、

$$\mathbf{D}^p = \lambda \mathbf{N} \quad (\lambda > 0), \quad (23)$$

ここに、 λ は正值の比例係数、 $\mathbf{N}$ は動的負荷面の外向き単位法線、つまり

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \left\| \frac{\partial f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \quad (\|\mathbf{N}\| = 1). \quad (24)$$

流動則(23)を拡張適応条件(22)に代入し、式(8)を考慮することにより、次式を得る。

$$\lambda = \frac{\text{tr}[\mathbf{N}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{F'}{F} \dot{H} \dot{\boldsymbol{\sigma}})]}{M_t^p}, \quad (25)$$

ここに、

$$M_t^p = \text{tr}[\mathbf{N}\{(\frac{F'}{F} h^p + \frac{U_t}{R}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}^p\}]. \quad (26)$$

なお、本式の導出に当たって、Eulerの同次関数の定理による次式を用いている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \left\| \frac{\partial f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \mathbf{N} = \frac{\text{tr}(\frac{\partial f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\text{tr}(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\sigma}})} \mathbf{N} \\ &= \frac{f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\text{tr}(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\sigma}})} \mathbf{N} = \frac{R F}{\text{tr}(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\sigma}})} \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (27)$$

h^p および $\mathbf{a}^p$ は、応力、塑性内部変数および $\mathbf{N}$ の 1 次の同次関数であり、 λ の 1 次関数である $\dot{H}^p$ および $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^p$ に次式で関係づけられている。

$$\left. \begin{aligned} h^p &\equiv \frac{\dot{H}^p}{\lambda} = \frac{\dot{H}^p}{\|\mathbf{D}^p\|} = \text{tr}(\mathbf{f}_H \mathbf{N}) \quad (\mathbf{f}_H = h \mathbf{N}), \\ \mathbf{a}^p &\equiv \frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}^p}{\lambda} = \frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}^p}{\|\mathbf{D}^p\|} = \mathbf{f}_\alpha \mathbf{N} \quad (\mathbf{f}_\alpha = \mathbf{a} \otimes \mathbf{N}). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

2・5 クリープひずみ速度 既往の超過応力モデルは、弾性状態から塑性状態への急変を前提とする古典塑性論に基づき、その降伏面からの超過応力によって粘塑性ひずみ速度が生じると仮定するので、弾性から粘塑性状態への遷移は滑らかに表現されな

い。以下では、非古典塑性論に属する非時間依存性の下負荷面モデル^{(16)~(18)}を導入して、弾性から非弾性状態への滑らかな遷移を表現し得るように拡張する。そこで、非弾性ひずみ速度が塑性ひずみ速度として準静的に生じているとして算定される仮想的な動的負荷面を“下負荷面”(subloading surface)または“静的負荷面”(static-loading surface)と呼ぶことにし、この下負荷面からの超過応力によってクリープひずみ速度が生じると仮定する。

下負荷面は、動的負荷面と同様に、背応力 α に関して正規降伏面に対して相似かつ相似の配置を維持すると仮定することにより、次式で表される。

$$f(\hat{\sigma}) = R_s F, \quad (29)$$

ここに、 R_s は、正規降伏に対する大きさの比で、“下負荷比”(subloading ratio)と称される。

非弾性変形における下負荷比 R_s の発展則は、動的負荷比 R の発展則において、

- i) 動的負荷比 R を静的負荷比 R_s に、
- ii) 非弾性ひずみ速度 $\dot{\mathbf{D}}^i$ を塑性ひずみ速度とみなすので、 $\dot{\mathbf{D}}^p$ を $\dot{\mathbf{D}}^i$ に、

- iii) 準静的変形過程($\dot{\mathbf{D}} \equiv \mathbf{0}$)を想定するので、関数 U_i を関数 U_R ($U_D = 0$)に

置き換えたものとして与えられる。したがって、非弾性変形過程における下負荷比 R_s の発展則は、式(17)から次式で与えられる。

$$\dot{R}_s = U_R(R_s) \|\dot{\mathbf{D}}^i\| \text{ for } \dot{\mathbf{D}}^i \neq \mathbf{0}. \quad (30)$$

なお、準静的負荷過程すなわちクリープひずみ速度を伴わない弾塑性変形過程においては、動的負荷面と下負荷面は一致する。ゆえに、式(21)または(29)から次式が成り立つ。

$$R_s = R, \text{ i.e. } R_s = f(\hat{\sigma})/F(H) \text{ for } \dot{\mathbf{D}}^c = \mathbf{0}. \quad (31)$$

Fig 2に下負荷面を示すが、本図の σ_s は、動的負荷面の現応力における同じ外向き法線を有する下負荷面上の共役応力であり、“下負荷応力”(subloading stress)と呼ばれる。ゆえに、下負荷応力—ひずみ曲線は、時間非依存性の応力—ひずみ曲線に一致する。Fig 4に、除荷、再負荷を含む単軸負荷状態における現応力の変化に伴う下負荷応力 σ_s を示している。

以上に基づき、また、降伏面に独立なポテンシャル面を用いて、クリープひずみ速度を次式で与える。

$$\dot{\mathbf{D}}^c = \langle R - R_s \rangle^n g(H, T) \mathbf{M}, \quad (32)$$

ここに、 n は材料定数、 g は H および絶対温度 T の関数、また、 $\mathbf{M}$ はクリープポテンシャル面 $f^c = 0$ の外向き単位法線、すなわち、

$$\mathbf{M} = \frac{\partial f^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \left\| \frac{\partial f^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \quad (\|\mathbf{M}\| = 1). \quad (33)$$

$\langle \rangle$ はMcCaugheyの括弧を示す。式(32)は、既往の超過応力モデルにおける粘塑性ひずみ速度 $\langle R - 1 \rangle^n g(H, T) \mathbf{M}$ において、下負荷面モデルの概念に基づ

Fig. 4. Subloading stress in uniaxial loading process with unloading and reloading.

いて, $1 \rightarrow R_s$ として修正したものとみなし得る.

2・6 応力速度—ひずみ速度関係 式(1), (2), (4), (23), (25)および(32)より, ひずみ速度は次式で与えられる.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\text{tr}[\mathbf{N}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^c - \frac{F'}{F} \dot{H}^c \dot{\boldsymbol{\sigma}})]}{M_t^p} \mathbf{N} + \langle R - R_s \rangle^n g(H, T) \mathbf{M}. \quad (34)$$

これより, 関連流動則(23)における正值の比例係数 λ のひずみ速度による表現を Λ と記せば次式を得る.

$$\Lambda = \frac{1}{M_t^p + \text{tr}(\mathbf{NEN})} \text{tr}[\mathbf{N}(\mathbf{ED} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^c - \frac{F'}{F} \dot{H}^c \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \langle R - R_s \rangle^n g(H, T) \mathbf{EM})]. \quad (35)$$

式(34)の逆表現は式(1), (2), (4), (23), (32)および(35)より次式で与えられる.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{ED} - \left\langle \frac{1}{M_t^p + \text{tr}(\mathbf{NEN})} \text{tr}[\mathbf{N}(\mathbf{ED} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^c - \frac{F'}{F} \dot{H}^c \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \langle R - R_s \rangle^n g(H, T) \mathbf{EM})] \right\rangle \mathbf{EN} - \langle R - R_s \rangle^n g(H, T) \mathbf{EM}, \quad (36)$$

ここに, Λ の正值性により, 塑性ひずみ速度に対する次の負荷基準⁽¹⁴⁾を導入している.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D}^p \neq 0: \Lambda > 0, \\ \mathbf{D}^p = 0: \Lambda \leq 0. \end{array} \right\} \quad (37)$$

式(36)および(30)による単軸単調負荷における応力—ひずみ, 下負荷応力—ひずみ曲線をFig. 5(a)に示す. 式(36)で与えられる速度依存性非弾性構成式の金属への適用性については, 続報⁽²⁷⁾において詳述する.

2・7 提案モデルの特殊形 $U_D = 0$ (式(20)において $\xi = 0$) とき, または, 下負荷応力状態 $R = R_s$ から無限小のひずみ速度 $\mathbf{D} \approx 0$ で変形が進行する場合, 式(26), (36)は時間非依存性の下負荷面モデル^{(16)~(18)}に帰着する (Fig. 5(b)):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{ED} - \left\langle \frac{\text{tr}(\mathbf{NED})}{\text{tr}[\mathbf{N}\{(\frac{F'}{F} h^p + \frac{U_R}{R}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}^p\}] + \text{tr}(\mathbf{NEN})} \right\rangle. \quad (38)$$

$U_t \rightarrow \infty$ (式(20)において $\xi \rightarrow \infty$) において常に $\mathbf{D}^p \approx 0$ とすることにより, 式(36)は次の下負荷面の概念による拡張超過応力モデルとなる (Fig. 5(c)):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{ED} - \langle R - R_s \rangle^n g(H, T) \mathbf{EM}. \quad (39)$$

式(16), (20)において u, ξ に適当な大きな値を与えて, $R \leq 1$ において $U_R \rightarrow \infty$, $U_D \rightarrow \infty$ ゆえに $U_t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{D}^p \approx 0$, $\mathbf{D}^c \approx 0$, また, $R > 1$ において

$U_R \rightarrow -\infty$, $U_D \rightarrow \infty$ ゆえに $0 \leq U_t < \infty$ で $\mathbf{D}^p \neq 0$, $\mathbf{D}^c \neq 0$ とすれば, 式(26), (36)は, 古典弾塑性構成式の時間依存性への拡張と超過応力モデルの組合わせとなる (Fig. 5(d)):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{ED} - \left\langle \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{N}\{(\frac{F'}{F} h^p + \frac{U_t}{R}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}\}] + \text{tr}(\mathbf{NEN})} \text{tr}[\mathbf{N}(\mathbf{ED} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^c - \frac{F'}{F} \dot{H}^c \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \langle R - 1 \rangle^n g(H, T) \mathbf{EM})] \right\rangle \mathbf{EN} - \langle R - 1 \rangle^n g(H, T) \mathbf{EM}. \quad (40)$$

本場合, 正規降伏面の内部では, ほぼ純粋弾性変形が予測される. ゆえに, 式(36)は滑らかな弾・塑性遷移が表現されるのに対して, 式(40)は急激な弾塑性遷移を示す.

$U_D = 0$ (式(20)において $\xi = 0$), $R < 1$ において $U_t = U_R \rightarrow \infty$ (式(16)において $u \rightarrow \infty$) の場合, または, $U_R \rightarrow \infty$ (式(18)において $u \rightarrow \infty$) として, $R \leq 1$ から無限小のひずみ速度 $\mathbf{D} \approx 0$ で変形が進行する場合, つねに $\mathbf{D}^c \approx 0$, また, $R < 1$ で $\mathbf{D}^p = 0$, $R = 1$ で $\mathbf{D}^p \neq 0$ となり, 式(26), (36)は古典弾塑性構成式に帰着する (Fig. 5(e)):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{ED} - \left\langle \frac{\text{tr}(\mathbf{NED})}{\text{tr}[\mathbf{N}(\frac{F'}{F} h^p \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}^p)] + \text{tr}(\mathbf{NEN})} \right\rangle \mathbf{EN}. \quad (41)$$

$U_t \rightarrow \infty$ (常に $\mathbf{D}^p = 0$) および $R < 1$ に対して $U_R(R_s) \rightarrow \infty$ ($R_s \approx R$, ゆえに $R \leq 1$ のとき $\mathbf{D}^c \approx 0$) となるように $U_D \gg U_R \rightarrow \infty$ とすれば, 式(36)は超過応力モデルに帰着する (Fig. 5(f)):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{ED} - \langle R - 1 \rangle^n g(H, T) \mathbf{EM}. \quad (42)$$

なお, $\mathbf{M}$ が $\mathbf{N}$ と異なる場合 (例えば, 土について Hashiguchi and Okayasu⁽⁶⁾ 参照), 無限小の速度において式(42)で算定される応力速度は式(41)で算定されるものに一致せず, 超過応力モデルは緒言に記した問題点2)を生じる. 一方, 式(36)は, 無限小のひずみ速度において式(38)に一致し, このような問題を含まない.

参考文献

- (1) Bingham, E.C., 1922. Fluidity and Plasticity, McGraw-Hill, New York.
- (2) Hohenesmsner, K. and Prager, W., 1932. Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. Z. angew. Math. Mech. 12, 216-226.
- (3) Prager, W., 1961. Linearization in viscoplasticity. Ingenieur Archiv 15, 152-157.
- (4) Perzyna, P., 1963. The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. Quart. Appl. Math. 20, 321-332.