複雑な表面性状が疲労限度信頼性に及ぼす影響の メゾ特性からの定量的評価 (第 1 報, 複雑な輪郭曲線の応力解析)*

青野 雄太^{*1}, 野口 博司^{*1}, 服部 高志^{*2}

Quantitative Evaluation for Influence of Complex Surface Texture on Fatigue Limit Reliability from Mesocharacteristics (1st Report, Stress Analysis of Infinite Plate with Complex Surface Profile)

Yuuta AONO^{*3}, Hiroshi NOGUCHI and Takashi HATTORI

^{*3} Department of Mechanical Engineering Science, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 812-8581 Japan

The influence of surface roughness on fatigue limit is evaluated by a surface factor and a safe factor and they don't have the distinct physical meanings. To discuss a quantitative evaluation of surface roughness on fatigue limit reliability, the exact solution is given for a problem of an infinite plate with a complex profile under tension. The solution is obtained with the complex variable method. Some simple periodical notch problems are analyzed with the solution and also the method is shown to solve a problem of a complex profile.

Key Words: Stress Concentration, Surface Texture, Notch, Fatigue Limit, Reliability

1. 緒 言

疲労破壊の起点の多くは表面にある。疲労現象の本質的な再現性(すべり挙動の不安定性と微視組織のばらつきによる)に加え, 表面性状の再現性を有するため, 疲労強度特性は材質と表面状態の二つの因子に依存する。そのため, 実際の疲労強度設計における材料の表現方法は, 「鍛造仕上げの引張強度 500MPa の鋼」というような定性的表現にとどまっており, 定量的普遍的表現には未だ至っていない⁽¹⁾⁻⁽³⁾。Siebel ら⁽⁴⁾は, 数種類の加工手段で作製した鋼や非鉄金属の試験片の疲労試験を行い, 最大高さ粗さ $R_{\max}$ ¹ が $1\mu\text{m}$ 以下では疲労限度は変わらないこと, その限界値以上では疲労限度の低下は, ある範囲をもって $R_{\max}$ の一価関数として表わせるとした。そして, 理想的表面形状 ($R_{\max} \leq 1\mu\text{m}$ の表面) の疲労限度に対する実表面

のその比を表面係数と定義し, $R_{\max}$ や中心線平均粗さ R_a など表面粗さの関数としての表面係数が疲労限度設計の資料として用いられている⁽¹⁾⁻⁽³⁾。しかし, 表面係数の決定法は物理的な根拠に乏しく, またその値のばらつきが大きいために, 経験に基づく安全係数をさらに用いざるを得ない。そこで, 最も基本的な材質に関する特性がいまいなままでは, 合理的な設計には限度があり, このことは強度設計において問題である。

このような状況を鑑み, 科学的に表面性状を記述することが Griffith⁽⁵⁾の時代から試みられている。そして一般に, 表面性状が疲労限度に及ぼす影響は以下の因子に分解されている^{(2),(3)}。

1. 表面形状の凹凸による応力集中
2. 塑性加工による材質変化 (転位構造, 細粒化, アモルファス化など)
3. 塑性加工や変態などによる残留応力

これらの因子は, 相互に密接に関連しているので, 個々の効果を取り出して厳密に測定または予測することは困難である^{(2),(3)}。

しかし, それぞれの因子のおおよその傾向は, ケース

* 原稿受付 2002 年 3 月 18 日。

^{*1} 正員, 九州大学大学院工学研究院機械科学部門 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

^{*2} 正員, 日立金属(株)素材研究所 (〒321-4367 真岡市鬼怒ヶ丘 11)。

E-mail: aono@mech.kyushu-u.ac.jp

¹ ISO 4287, JIS B 0601 における表示は R_z であるが本論文では $R_{\max}$ を用いる。

スタディとしては報告されている。例えば、El-Helieby ら⁽⁶⁾は、表面粗さと残留応力の影響に注目するため、3種類の研削加工した高強度鋼の試験片に残留応力除去焼鈍を施して疲労試験を行い、表面粗さより残留応力の影響が大きいとしている。また西谷ら⁽⁷⁾は、表面粗さの影響をなくすために、炭素鋼の試験片の表面にバフ研磨を行い、切削加工層(因子2及び3)の有無によって、疲労強度に違いが生じるとしている。Sinclair ら⁽⁸⁾は、種々の表面仕上げ加工を施したチタン合金を用いて疲労試験を行い、表面粗さより加工硬化の影響が大きいとしている。

一方、因子1については、特殊な条件ではあるが解析的定量的研究もいくらかある。Taylor ら⁽⁹⁾は種々の仕上げによって異なる R_{max} の表面をもつベイナイト鋼試験片を作製し、残留応力除去焼鈍を施した後、疲労試験を行い、表面粗さをき裂長さ R_{max} の微小き裂として取り扱う疲労限度評価法の有効性を示したが、一方では大きな表面粗さに対しては、き裂ではなく切欠きとして考える必要があるとしている。村上ら^{(10),(11)}は表面粗さを模擬した規則的粗さ(周期的微小切欠き列)が疲労限度に及ぼす影響を定量的に予測する方法[疲労限度での停留き裂の存在を仮定して、周期的微小切欠きを周期的微小き裂とみなす(深さとピッチは、両者で同一にする)]を提案し、熱処理したマルエージング鋼を用いることにより、因子1のみをもつ試験片を作成し、疲労試験結果と提案する予測法の結果を検討して、理想的表面粗さ(深さとピッチが空間的に一定)の場合は、予測法は有効であるとしている。また Andrews ら⁽¹²⁾は切欠き深さ(=粗さ曲線の平均線から谷底までの距離)と切欠き半径を幾何パラメータとして、そこから発生したき裂伝播寿命をき裂開口挙動を考慮して予測する方法を提案している。

因子1は疲労限度信頼性に、因子2及び3は平均的疲労限度特性に主に影響すると仮定し、まず因子1について考えると、複雑な表面形状が疲労限度信頼性に及ぼす影響を解析できない理由は以下と思われる。

1. 表面形状の幾何学的再現性のため、境界条件が確定しないので、原理的に応力解析できない。
2. もし形状が幾何的に表現できても、無限長の微小な凹凸表面をもつ半無限板の引張問題の応力解析はFEMやBEMなどの数値解析法では不可能である。
3. もし応力状態がわかっても、任意の微小切欠きや微小き裂が疲労限度に及ぼす影響を定量的に評価した式がないので、疲労限度は定量的に予測できない。

A : real surface B : notch model C : crack model

Fig. 1 Evaluation of notch depth and crack length

3については簡単な数式表示が著者らによって最近提案された⁽¹³⁾。この第一報では、2の問題を解決することを目的とする。そして、第二報では、上記の1, 2, 3を用いて、任意の表面粗さをもつ金属の疲労限度信頼性を定量的に評価する。その手順を図1に示す。輪郭曲線から応力集中係数を求め、その応力集中係数と等価となる切欠き深さを定義する。そしてき裂発生限界応力 σ_{w1} とき裂伝ば限界応力 σ_{w2} を求め、疲労限度 σ_w は $\sigma_w = \max(\sigma_{w1}, \sigma_{w2})$ で評価する。これまでの研究⁽⁹⁾⁻⁽¹²⁾では微小き裂モデルによって表面粗さの評価を行なっているが、著者らは表面形状、材料や平均応力によっては微小き裂モデルが妥当でない場合もあると考え、またそのようなデータを有している。第二報では、第一報の応力集中の解析をメゾ特性に基づいて展開し、微小き裂モデルまで含んだモデルを提案する。因子2及び3については第三報以降に議論する。

つまり、本論文では表面形状が確定したと仮定して、複雑な輪郭曲線の二次元問題の応力集中係数を解析することを目的とする。

2. 複雑な輪郭曲線の弾性解法

2.1 写像関数 実際の表面の応力解析は不可能である。そこで本論文では、図2(a)に示すように、ある程度の長さ(表面粗さ測定における基準長さ l などに対応する)においては複雑な輪郭曲線が、周期的に繰返された表面をもつ半無限板を解析対象とする。そして、この半無限板が遠方で引張りを受ける問題の弾性解析を行なう。この問題において周期性の仮定は、繰返部分部分が、例えば粗さ測定における基準長さ l 程度に長ければ成り立つと考えられる(この仮定の誤差は最弱部分の形状誤差と他の部分からの干渉誤差に分けられる。後者はサンブナンの原理から誤差は小さ

 (a) complex profile ($k \gg 1$) (b) coordinates

Fig. 2 Explanation of symbols for Hirano's conformal mapping

いると考えられ、前者については第二報に用いているシミュレーションによって評価する)。ここで輪郭曲線は、Seibel らの研究によって疲労限度はある $R_{\max}$ 以下の表面粗さに対しては影響を受けないという事実を元に決定する。すなわち、高周波成分を取り除いた疲労限度に有効な表面形状を輪郭曲線とする。輪郭曲線の具体的な定義については第二報で述べる。ここで複雑な輪郭曲線は平野が用いた写像関数⁽¹⁴⁾を拡張することによって表現可能である。

物理座標を $z = x + iy$ とし、写像面における座標を $\zeta = \xi + i\eta$ で表す。このとき写像関数を次のように与えると図 2(b) に示すように、 η に関して周期的な切欠きをつくることができる。

$$z = m(\zeta) = \zeta - \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^k C_j \coth \frac{j\omega}{2} (\zeta + a) \quad (1)$$

ここで ω, C_j, a は輪郭曲線の形状を表すパラメータで実定数である。また、 $a > 0$ である。 k を増やし適当な C_j を与えることで、1 周期内において不規則な形状の表面境界をつくることができる。

本章では、この写像関数を用いて半無限板が遠方で一様な引張応力を受ける場合の弾性解を求める。

2.2 解の導出 境界条件を Hilbert 問題として定式化し、Complex variable method⁽¹⁵⁾ を利用して解を求める。まず、解を次の関数で表わすことにする。

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = 2 \left\{ \Psi(\zeta) + \overline{\Psi(\zeta)} \right\} \quad (2)$$

$$\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta} + 2i\sigma_{\xi\eta} = -2 \left\{ \frac{m(\zeta)}{m'(\zeta)} \overline{\Psi'(\zeta)} + \frac{\overline{m'(\zeta)}}{m'(\zeta)} \overline{\psi(\zeta)} \right\} \quad (3)$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi_0(\zeta) + g_1(\zeta) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \Psi_0(\zeta) + \frac{m(\zeta)}{m'(\zeta)} \Psi_0'(\zeta) + \psi_0(\zeta) \\ &\quad + g_1(\zeta) + \frac{m(\zeta)}{m'(\zeta)} g_1'(\zeta) + g_2(\zeta) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、

$$\Psi_0(\zeta) = \psi_0(\zeta) = \frac{A}{m'(\zeta)} \quad (6)$$

ここで A は遠方における応力状態を表わす定数である。応力関数 $\Psi(\zeta), \psi(\zeta)$ は、遠方において一様な引張応力を与える関数 $\Psi_0(\zeta), \psi_0(\zeta)$ と、未知関数 $g_1(\zeta), g_2(\zeta)$ の和として仮定した。式 (4), (5) のように仮定すると、 $g_1(\zeta), g_2(\zeta)$ が η に関する周期関数であれば、応力場も η に関して周期性を有する。詳しくは付録 I を参照されたい。

以下において $\xi = 0$ で表される表面境界において応力自由の境界条件を満足するように、未知関数 $g_1(\zeta), g_2(\zeta)$ を決定する。表面境界を $\zeta = \lambda$ で表すとき、自由表面の境界条件 $\sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\xi\eta} = 0$ は次式で与えられる。

$$\Psi(\lambda) + \overline{\Psi(\lambda)} - \frac{m(\lambda)}{m'(\lambda)} \overline{\Psi'(\lambda)} - \frac{\overline{m'(\lambda)}}{m'(\lambda)} \overline{\psi(\lambda)} = 0 \quad (7)$$

上式に式 (4), (5) を代入し、 $\zeta = -\bar{\zeta}$ で表される鏡像領域に対する共役複素関数を用いれば、境界条件として次式が得られる。

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &+ \left\{ 1 - \frac{\overline{m'(-\bar{\lambda})}}{m'(\lambda)} \right\} \overline{g_1(\lambda)} \\ &- \frac{m(\lambda) + \overline{m(-\bar{\lambda})}}{m'(\lambda)} \overline{g_1'(-\bar{\lambda})} \\ &- \frac{\overline{m'(-\bar{\lambda})}}{m'(\lambda)} \overline{g_2(-\bar{\lambda})} = F(\lambda) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $F(\lambda)$ は遠方で作用する一様な引張応力によって表面境界に生じる応力であり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= -\Psi_0(\lambda) - \left\{ 1 - \frac{\overline{m'(-\bar{\lambda})}}{m'(\lambda)} \right\} \overline{\Psi_0(-\bar{\lambda})} \\ &\quad + \frac{m(\lambda) + \overline{m(-\bar{\lambda})}}{m'(\lambda)} \overline{\Psi_0'(-\bar{\lambda})} + \frac{\overline{m'(-\bar{\lambda})}}{m'(\lambda)} \overline{\psi_0(-\bar{\lambda})} \\ &= \frac{A}{m'(\lambda)} - \frac{A}{\overline{m'(-\bar{\lambda})}} \\ &\quad - A \frac{m(\lambda) + \overline{m(-\bar{\lambda})}}{m'(\lambda)} \frac{\overline{m''(-\bar{\lambda})}}{m'(-\bar{\lambda})^2} \end{aligned} \quad (9)$$

(1) $p/\rho = 5.0$ (2) $p/\rho = 10.0$ Fig. 3 Periodic notch ($k = 1$) (1) $R_{\max}/\rho = 1.149$ (2) $R_{\max}/\rho = 1.869$ (3) $R_{\max}/\rho = 2.793$ Fig. 4 Periodic notch ($k = 3$)

Table 1 Stress concentration factor of periodic notch in Fig. 3

p/ρ	5.0 *	6.0	8.0	10.0	$1 + 2\sqrt{\frac{R_{\max}}{\rho}}$
K_t	2.0095	2.0341	2.0610	2.0745	2.414
ω	1.25664	1.04720	0.78540	0.62832	—
a	2.80077	2.02313	1.72195	1.62867	—
C_1	-6.71227	-1.95746	-1.14851	-0.96409	—

Table 2 Stress concentration factor of Fig. 4 ($\omega = 0.5, a = 2.0$)

$R_{\max}/\rho$	1.149	1.869	2.793
K_t	2.8074	2.1646	2.7962
$1 + 2\sqrt{\frac{R_{\max}}{\rho}}$	3.1435	3.7343	4.3422
C_1	-1.0	-3.0	-5.0
C_2	2.0	7.0	5.0
C_3	-10	-7.0	-5.0

次に式 (8) を解くために次の関数 $\Phi(\zeta)$ を導入する.

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} g_1(\zeta) & (\text{for } \zeta \in S^+), \\ -\left\{1 - \frac{m'(-\bar{\lambda})}{m'(\lambda)}\right\} \overline{g_1(-\bar{\lambda})} \\ + \frac{m(\lambda) + m(-\bar{\lambda})}{m'(\lambda)} \overline{g_1'(-\bar{\lambda})} \\ + \frac{m'(-\bar{\lambda})}{m'(\lambda)} \overline{g_2(-\bar{\lambda})} & (\text{for } \zeta \in S^-) \end{cases} \quad (10)$$

ここで S^+ は $\xi > 0$, S^- は $\xi < 0$ の領域を表す. そこで $\Phi(\zeta)$ を用いると式 (8) は次式で表される.

$$\Phi^+(\lambda) - \Phi^-(\lambda) = F(\lambda) \quad (11)$$

上式の解は Plemelj formula を用いると次式で表される⁽¹⁶⁾.

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\lambda) d\lambda}{\lambda - \zeta} + P(\zeta) \quad (12)$$

ここで L は表面境界を表す. また, $P(\zeta)$ は ζ の多項式である. 式 (12) の $F(\lambda)$ に関する積分を具体的に行なうと次式が得られる.

for $\zeta \in S^+$

$$\Phi(\zeta) = A \left\{ \frac{1}{m'(\zeta)} - 1 \right\} \quad (13)$$

for $\zeta \in S^-$

$$\Phi(\zeta) = A \left\{ \frac{1}{m'(-\bar{\zeta})} + \frac{m(\zeta) - \overline{m(-\bar{\zeta})}}{m'(\zeta)} \frac{\overline{m''(-\bar{\zeta})}}{m'(-\bar{\zeta})^2} - 1 \right\} \quad (14)$$

未知関数 $g_1(\zeta), g_2(\zeta)$ (for $\zeta \in S^+$) は定義された領域に注意して式 (13), (14) を式 (10) へ代入することによって以下のように求められる.

$$g_1(\zeta) = A \left\{ \frac{1}{m'(\zeta)} - 1 \right\} \quad (15)$$

$$g_2(\zeta) = A \left\{ 2 \frac{\overline{m''(-\bar{\zeta})}}{m'(\zeta)^2} - 2 \frac{\overline{m''(-\bar{\zeta})}}{m'(\zeta)} - \frac{1}{m'(\zeta)} + 2 \frac{m(\zeta) + \overline{m(-\bar{\zeta})}}{m'(\zeta)} \frac{\overline{m''(\zeta)}}{m'(\zeta)^2} + 1 \right\} \quad (16)$$

式 (15), (16) は η に関して周期性を有する関数であり, また表面境界における境界条件式 (7) を満足する. しかし, 写像関数 $\overline{m(-\bar{\zeta})}, \overline{m'(-\bar{\zeta})}$ は板内部の点 $\zeta = a$ に特異点をもつので, これを消去しなければならない. 式 (12) の $P(\zeta)$ を次のように選ぶことで $\zeta = a$ における特異点を消去することができる.

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_\infty}{4} \left\{ -\frac{1}{m'(a)} + 1 \right\} \quad (17)$$

上の $P(\zeta)$ を考慮すると, 最終的な $g_1(\zeta), g_2(\zeta)$ が

次式として得られる。

$$g_1(\zeta) = A \left\{ \frac{1}{m'(\zeta)} - \frac{1}{m'(a)} \right\} \quad (18)$$

$$g_2(\zeta) = A \left[\left\{ 2 \frac{m'(-\bar{\zeta})}{m'(\zeta)} - 1 \right\} \left\{ \frac{1}{m'(\zeta)} - \frac{1}{m'(a)} \right\} + 2 \frac{m(\zeta) + m(-\bar{\zeta})}{m'(\zeta)} \frac{m''(\zeta)}{m'(\zeta)^2} \right] \quad (19)$$

A は $\zeta \rightarrow \infty$ における応力を計算することで次式として得られる。

$$A = \frac{\sigma_\infty}{8 - \frac{3}{m'(a)} - \frac{1}{m'(a)}} \quad (20)$$

ここで遠方の応力を σ_∞ としている。

3. 解析例

本解析で用いる応力関数の式 (4), (5), (6), (18), (19) は厳密に境界条件を満足しているので、誤差は実表面に対する写像関数の表現誤差のみである。ここで、 $k=1$ の写像関数は平野の用いたものと同じであり、これに対応する本研究の応力関数も平野のものと完全に一致する。

3.1 計算例 ($k=1$) 前節で求めた解を用いて式 (1) の次数を $k=1$ 、切欠き半径 ρ と曲線の最大高さ $R_{\max}$ を一定とし、ピッチ p を変化させた場合の応力集中係数 K_t を求めた。 $R_{\max}/\rho = 0.5$, $p/\rho = 5, 6, 8, 10$ に対する計算結果を、等価だ円の概念による計算値や写像関数の係数とともに表 1 に示す。ピッチが小さくなるに従い干渉効果が大きくなり、応力集中係数が低下していることが分かる。また、等価だ円の概念による計算値とは約 20 % 程度の誤差があり、切欠きが浅い場合、 $R_{\max}$ と ρ のみで応力集中を正確に評価することは難しくなることがわかる。

3.2 計算例 ($k=3$) 次に $k=3$ の二重切欠きに対する計算例を示す。図 4 に切欠き形状を示した。3 例ともピッチは等しいが、 $R_{\max}/\rho$ が異なる。応力集中係数と写像関数のパラメータの値を表 2 に示す。等価だ円による応力集中係数も計算したが、形状によっては大きな誤差を含む可能性があることが分かる。実際の表面粗さに対してもなるべく正確に計算する必要があることがわかる。

3.3 計算例 ($k=48$) 次に実際の輪郭曲線 (旋削加工による、詳細は第二報で述べる) に対する計算結果を示す。

256 点の等間隔のデータからなる粗さ曲線に対して式 (1) の曲線が適合するよう ω, C_j, a を求めた。式 (1) の和で表わされる各項はフーリエ級数の各項と同様に

Table 3 Notch root radii of original and Eq. (1) profile of Figs. 5 and 6

x/l	.0635	.4645	.6820*	.9105
ρ/l of original	.0409	.0300	.0163	.0206
ρ/l of Eq.(1) ($k=48$)	.0330	.0143	.0069	.0088
ρ/l of Eq.(1) ($k=42$)	.0173	.0136	.0155	.0107

* This point corresponds to Point A in Figs. 5 and 6.

次数の増加とともに周波数が増加する形になっている。 C_j と a の決め方には様々な方法があると思われるが、ここでは最小二乗法とコンプレックス法を併用して求めた。詳しくは付録 II を参照されたい。次数 $k=48$ は ω, C_j, a が精度良く得られる最も大きな値を選んだ。

図 5 に式 (1) の写像関数による曲線とその応力集中係数 $K_t (= \sigma_{\eta\eta}/\sigma_\infty)$ を元の輪郭曲線とともに示す。 σ_∞ は遠方応力である。

この図だけでは写像関数による曲線がどの程度正確に輪郭曲線を再現しているか不明であるので、輪郭曲線と写像関数による曲線のそれぞれの谷部分の切欠き半径を表 3 に示す。この表から写像関数による曲線の方が切欠き半径が小さいことが分かる。ところで、等価だ円の概念から、応力集中を正確に計算するには切欠き半径をできるだけ正確に輪郭曲線のものと合わせることが必要である。

次に、 $x/l = 0.6820$ (図 4 の点 A に相当する) において切欠き半径が合うように、 $k=48$ として計算した 42 次までのパラメータを用いて得られた曲線とその応力集中係数 K_t を図 5 に示す。この曲線の切欠き半径も表 3 に示した。切欠きは深いほど応力集中が高いことが多いので、 $x/l = 0.6820$ を切欠き半径を合わせ位置として選んだ。 $x/l = 0.0635, 0.9105$ の切欠きも深いのが、曲線の端にあり K_t が周期性の影響を受けると考えられるので棄却した。以上の結果より、一般的には k をいろいろ変化させて切欠き半径の適合精度を向上させて、応力集中係数の精度も向上させることができると考えられる。

4. 結 言

平野の写像関数を拡張し、周期的に不規則な輪郭曲線をもつ半無限板が遠方で一様な引張応力を受ける場合の厳密解を求めた。この解の輪郭曲線を、実際の粗さ曲線にうまく適合させることができれば、複雑な表面形状の応力集中係数を求めることができる。

Fig. 5 Profile by Eq.(1) ($k = 48$) and stress concentration factor Fig. 6 Profile by Eq.(1) (reduced to $k = 42$ with same C_j as Fig.5) and stress concentration factor

謝 辞

本研究を行なうにあたり有益な御助言を戴きました九州大学情報基盤センター渡部善隆助教授に深く感謝します。

付録 I 式 (4), (5) の導出

y 方向に周期性を有する応力場の一般形は次式で表わされる⁽¹⁷⁾。

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\{\Omega'(z) + \overline{\Omega'(z)}\} \quad (21)$$

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Omega'(z) + \overline{\Omega'(z)} + z\overline{\Omega''(z)} + \overline{\omega'(z)} \quad (22)$$

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + f_1(z) \quad (23)$$

$$\omega(z) = z\Omega'_0(z) + \omega_0(z) + f_2(z) \quad (24)$$

ただし, $f_1(z), f_2(z)$ は y 方向に周期性を有する関数である。

$z = m(\zeta)$ で表わされる写像に対して $\Omega(m(\zeta)) = \Omega(\zeta)$, $\omega(m(\zeta)) = \omega(\zeta)$ として ζ 面における表示を求

めると次式が得られる。

$$\Omega(\zeta) = \Omega_0(\zeta) + f_1(\zeta) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= \frac{m(\zeta)}{m'(\zeta)}\Omega'_0(z) + \omega_0(z) \\ &\quad + \frac{m(\zeta)}{m'(\zeta)}f'_1(\zeta) + f_2(\zeta) \end{aligned} \quad (26)$$

上式に対して $\Phi_0(\zeta) = \Omega'_0(\zeta)/m'(\zeta)$, $\phi_0(\zeta) = \omega'_0(\zeta)/m'(\zeta)$, $g_1(\zeta) = f'_1(\zeta)/m'(\zeta)$, $g_2(\zeta) = f'_2(\zeta)/m'(\zeta)$ の置き換えを行なうと式 (4), (5) が得られる。

付録 II パラメータ C_j と a の決定方法

粗さ曲線のデータから (x_n, y_n) ($n = 1, \dots, N$) が得られるとき, $\xi = 0$ の境界において式 (1) で表わされる写像と粗さ曲線が一致するためには次式が成立しなければならない。

$$x_n = -x_0 - \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^k C_j \frac{\sinh j\omega a}{\cosh j\omega a - \cos j\omega \eta_n} \quad (27)$$

$$y_n = \eta_n + \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^k C_j \frac{\sin j\omega\eta_n}{\cosh j\omega a - \cos j\omega\eta_n} \quad (28)$$

上式からわかるように決定すべき未知変数は C_j, a, η_n である。様々な方法があると考えられるが、ここでは粗さ曲線に fit する係数を決めるために以下の手順で計算した。

(1) a に対して適当な初期値を与え、 C_j, x_0 を x_n に対して最小二乗法で求める。 η_n の初期値は $\eta_n = y_n$ とした。

以下で定義する F, C, x について $FC = x$ の最小二乗解として C_j, x_0 を求める。

$$F = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial f_x}{\partial C_1} \right\}_1 & \cdots & \left\{ \frac{\partial f_x}{\partial C_k} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f_x}{\partial x_0} \right\}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left\{ \frac{\partial f_x}{\partial C_1} \right\}_N & \cdots & \left\{ \frac{\partial f_x}{\partial C_k} \right\}_N & \left\{ \frac{\partial f_x}{\partial x_0} \right\}_N \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$C^t = [C_1 \cdots C_k x_0] \quad (30)$$

$$x^t = [x_1 \cdots x_N] \quad (31)$$

$$f_x = -x_0 - \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^k C_j \frac{\sinh j\omega a}{\cosh j\omega a - \cos j\omega\eta} \quad (32)$$

(2) (1) で求めた C_j, x_0 に対して η_n をコンプレックス法で求める。

$$g(\eta_n) = \left[y_n - \left\{ \eta_n + \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^k C_j \frac{\sin j\omega\eta_n}{\cosh j\omega a - \cos j\omega\eta_n} \right\} \right] \quad (33)$$

を最小にする η_n を求める。つまり y_n の式を成立させる。

(3) (1) と (2) で求めた C_j, x_0, η_n に対して次式で示す $\|r\|_2$ を求める。

$$h(a) = \|r\|_2 = \|x - FC\| \quad (34)$$

を最小にする a を求める。

(4) a に順次適当な値を与えて $\|r_2\|$ を求めていき、 $\|r_2\|$ が最小になるときの C_j, x_0, a を解とした。

文 献

- (1) 日本機械学会, 金属材料疲労強度の設計資料 II 表面状態表面処理, 日本機械学会, (1984).
- (2) 日本材料学会編, 金属材料疲労設計便覧, 養賢堂, (1978).
- (3) 日本材料学会編, 疲労設計便覧, 養賢堂, (1995).
- (4) E. Siebel, M. Gaier, *Influence of surface roughness on the fatigue strength of steels and non-ferrous alloys*, "Engineers Digest", Vol. 18, (1957), pp.109-112 (Translation from VDI-Zeitschrift, Vol. 98, (1956), pp. 1715-1723)

- (5) A. A. Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids*, "Phil. Trans. Roy. Soc. London", Ser. A, Vol. 221, (1921), pp.163-198
- (6) S. O. A. El-Helieby and G. W. Rowe, *Influence of surface roughness and residual stress on fatigue life of ground steel components*, "Metals Technology", (1980), pp.221-225.
- (7) 西谷弘信, 薬師寺輝敏, 鹿毛正治, 炭素鋼焼きなまし材の回転曲げ疲労強度に及ぼす表面加工層の影響, "日本機械学会論文集 (A 編)", Vol. 58, (1992), pp.1575-1580
- (8) G. M. Sinclair, H. T. Corten and T. J. Dolan, *Effect of surface finish on the fatigue strength of titanium alloys RC 130B and Ti 140A*, "Trans. ASME", vol. 79, (1957), pp. 89-96.
- (9) D. Taylor, O. M. Clancy, *The Fatigue Performance of Machined Surfaces*, "Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures", Vol. 14, (1991), pp.329-336
- (10) 村上敬宜, 堤一也, 藤嶋正博, 疲労強度に及ぼす表面粗さの影響の定量的評価, "日本機械学会論文集 (A 編)", Vol. 62, (1996), pp.1124-1131
- (11) 村上敬宜, 高橋宏治, 山下晃生, 疲労強度に及ぼす表面粗さの影響の定量的評価 (粗さの深さとピッチの影響), "日本機械学会論文集 (A 編)", Vol. 63, (1997), pp.1612-1619.
- (12) Scott Andrews, Huseyin Sehitoglu, *A computer model for fatigue crack growth from rough surfaces*, "International Journal of Fatigue", Vol. 22, (2000), pp.619-630
- (13) 宮崎達二郎, 野口博司, 応力振幅一定下における疲労き裂の ΔK_{th} に及ぼす材質の影響 "第 25 回疲労シンポジウム講演論文集", (2000), pp.7-10
- (14) 平野富士夫, 二次元弾性体の形状係数の研究 (第二報), "日本機械学会論文集", 16 巻, 55 号, (1950), pp.52-58
- (15) A. H. England, *Complex Variable Methods in Elasticity*, Wiley, (1971)
- (16) N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Dover, (1991), pp.42-43
- (17) 森口繁一, 2 次元弾性論, 生産技術センター, (1975), pp.29-30