表面き裂を有する圧電セラミックス半無限体の衝撃応答*

上 田 整^{*1}, 村 田 誠^{*2}Impact Response of a Piezoelectric Ceramic Half-Plane
with a Surface CrackSei UEDA^{*3} and Makoto MURATA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

In this study, the dynamic response of a piezoelectric half-plane containing an internal or an edge crack perpendicular to the boundary under a normal impact is considered. The Laplace and Fourier transform techniques are used to formulate the problem in term of a singular integral equation. The singular integral equation is solved by using the Gauss-Jacobi integration formula. Numerical calculations are carried out, and the effects of the geometric parameters and the piezoelectric material properties on the dynamic energy density factors of an internal or an edge crack are shown graphically.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Piezoelectric Half-Plane, Energy Density Factor, Integral Transform

1. 結 言

圧電材料は、電場と機械的変形との間に固有の連成効果を有し、機械系と電気系という異なる系の間でエネルギー変換を伴う材料で、センサー・アクチュエータ材料として利用されている⁽¹⁾。圧電材料には、強誘電体セラミックスが用いられることが多いが、中でも PZT 系圧電セラミックスは、圧電性が大きく、センサー・アクチュエータの小型化・高性能化などを目指す上で優れた利点を有する材料である⁽²⁾。

一方、圧電セラミックスに代表される圧電材料には微小き裂が潜在・発生することが多く、これらの微小き裂は、圧電材料の機械的電気的特性に大きな影響を与えることが知られている⁽³⁾。このため、圧電材料の破壊過程の理解を目的に、電気破壊力学的挙動の解明がモードⅢ型き裂問題を中心に進められている^{(4),(5)}。また、モードⅠ型き裂についても、中央き裂⁽⁶⁾あるいは偏心き裂⁽⁷⁾を有する圧電セラミックス帯板を対象とした問題などが解析されている。しかしながら、衝撃応答問題に関しては、無限領域を占める圧電材料を対象とした解析結果は幾つか報告されているが^{(8),(9)}、実際に重要である有限領域を対象とした研究は少なく、中央き裂を有する帯板のモードⅢ型き裂問題⁽¹⁰⁾

やモードⅠ型き裂問題⁽¹¹⁾が報告されている程度であり、自由表面近傍に存在する微小内部き裂や縁き裂に関する研究例はほとんどないのが現状である。

そこで本報では、衝撃負荷を受ける圧電材料の自由表面近傍に存在する微小き裂の挙動に注目し、圧電材料の破壊力学的パラメータとして有効な動的エネルギー密度係数^{(12)~(14)}の時間的挙動を厳密に理論解析した。解析モデルとして圧電セラミックス半無限弾性体を考え、き裂は自由表面に対して垂直に存在するものとした。解析には、Laplace-Fourier 二重積分変換法を用い、問題の解を特異積分方程式の解に導いて解く方法を採用した^{(15),(16)}。また、特異積分方程式の数値解析には、Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁷⁾を用い、Laplace 逆変換には、数値 Laplace 逆変換法を適用した⁽¹⁸⁾。内部き裂および縁き裂の場合について数値計算を行い、動的エネルギー密度係数の時間的挙動に及ぼす幾何学的形状および材料特性の影響を明らかにして、詳細な検討を加えた。

2. 問題の設定と基礎式

図 1 に示す直角座標系 (x, y, z) において、圧電セラミックス半無限弾性体を考え、 $z = 0$ 面上に長さ $2c$ ($= b - a$, $0 \leq a < b$) のき裂が半無限弾性体の自由表面に対して垂直に存在するものとし、平面ひずみを仮定する。この場合、分極方向は z 軸方向である。

* 原稿受付 2002 年 7 月 4 日。

^{*1} 正員、大阪工業大学工学部(☎ 535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1)。^{*2} 学生員、大阪工業大学大学院工学研究科。

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

Fig.1 Geometry of the crack problem in a piezoelectric half-plane.

変位ベクトルの成分を $u_x(x, z, t)$, $u_z(x, z, t)$, 電界の強さベクトルの成分を $E_x(x, z, t)$, $E_z(x, z, t)$ とすると, 応力テンソルの成分 $\sigma_{xx}(x, z, t)$, $\sigma_{zz}(x, z, t)$, $\sigma_{zx}(x, z, t)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_x(x, z, t)$, $D_z(x, z, t)$ は次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{31} E_z \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{33} E_z \\ \sigma_{zx} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - e_{15} E_x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= e_{15} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \epsilon_{11} E_x \\ D_z &= e_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \epsilon_{33} E_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに, t は時間, c_{11} , c_{13} , c_{33} , c_{44} は弾性定数, ϵ_{11} , ϵ_{33} は誘電定数, e_{15} , e_{31} , e_{33} は圧電定数である. 静電ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ を導入すると, 電界の強さは次のように表される.

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3)$$

変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \\ + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \\ + e_{15} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ - e_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここに, ρ は圧電セラミックスの質量密度である. 自由空間を考えると, 式 (2), (5) は

$$D_x = \epsilon_0 E_x, \quad D_z = \epsilon_0 E_z \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

ここに, ϵ_0 は自由空間における誘電定数である.

問題の対象性を考慮して, $0 \leq x < \infty$, $0 \leq z < \infty$ の領域で解析することにする. 従って, 境界条件式は (9)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0, t) &= -\frac{C_{33}}{c_{33}} \sigma_0 H(t) \quad (a < x < b) \\ u_z(x, 0, t) &= 0 \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x(x, 0, t) &= E_x^c(x, 0, t) \quad (a < x < b) \\ \phi(x, 0, t) &= 0 \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\sigma_{zx}(x, 0, t) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (10)$$

$$\sigma_{xx}(0, z, t) = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \quad (11)$$

$$\sigma_{zx}(0, z, t) = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \quad (12)$$

$$D_x(0, z, t) = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \quad (13)$$

上式中, $C_{33} = c_{33} + e_{33}^2/\epsilon_{33}$, σ_0 は応力の次元を有する定数, $H(t)$ は Heaviside の単位階段関数であり, 上添字 c はき裂内部の自由空間の場を示すものとする.

3. 解 析

Laplace 変換およびその逆変換を次式で定義する.

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(p) \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに, Br は Bromwich の積分路である. 式 (4), (5) に Laplace-Fourier 変換を適用して変位場および静電ポテンシャルの一般解を求めると

$$\begin{aligned} u_x^*(x, z, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \left[a_j(s, p) A_j(s, p) \right. \\ &\quad \times \exp\{-s\gamma_j(s, p)z\} \sin(sx) \\ &\quad \left. - a'_j(s, p) B_j(s, p) \exp\{-s\gamma'_j(s, p)x\} \cos(sz) \right] ds \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_z^*(x, z, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\gamma_j(s, p)} A_j(s, p) \right. \\ &\quad \times \exp\{-s\gamma_j(s, p)z\} \cos(sx) \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma'_j(s, p)} B_j(s, p) \exp\{-s\gamma'_j(s, p)x\} \sin(sz) \right] ds \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi^*(x, z, p) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \left[\frac{b_j(s, p)}{\gamma_j(s, p)} A_j(s, p) \right. \\ &\quad \times \exp\{-s\gamma_j(s, p)z\} \cos(sx) \\ &\quad \left. - \frac{b'_j(s, p)}{\gamma'_j(s, p)} B_j(s, p) \exp\{-s\gamma'_j(s, p)x\} \sin(sz) \right] ds \end{aligned} \quad (17)$$

ここに, $A_j(s, p)$, $B_j(s, p)$ は境界条件より決定される未知関数であり, $\gamma_j(s, p)$, $\gamma'_j(s, p)$, $a_j(s, p)$, $a'_j(s, p)$, $b_j(s, p)$, $b'_j(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は文献⁽¹¹⁾の付録 1 に示す既知関数である. 式 (7) に Fourier 変換を適用し, き裂内部の自由空間における静電ポテンシャルを求めると

$$\begin{aligned} \phi^{c*}(x, z, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D(s, p) \sinh(sz) \cos(sx) ds \\ &\quad (a < x < b) \end{aligned} \quad (18)$$

ここに, $D(s, p)$ は未知関数である.

Laplace 像空間における電界の強さ $E_x^*(x, z, p)$, $E_z^*(x, z, p)$ は式 (17) を式 (3) に代入して得られ, 応力成分 $\sigma_{xx}^*(x, z, p)$, $\sigma_{zz}^*(x, z, p)$, $\sigma_{xz}^*(x, z, p)$ および電束密度成分 $D_x^*(x, z, p)$, $D_z^*(x, z, p)$ は式 (15), (16) および得られた電界の強さを式 (1), (2) に代入することにより求まる. 式 (18) を考慮すると, Laplace 変換した境界条件式 (9), (10) より, 未知関数 $A_j(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は 1 つの新しい未知関数 $B_0(s, p)$ を用いて次のように表せる.

$$A_j(s, p) = \frac{k_j(s, p)\gamma_j(s, p)}{k_0(s, p)} B_0(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (19)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} k_0(s, p) &= \sum_{j=1}^3 k_j(s, p) \\ k_1(s, p) &= b_2(s, p)f_3(s, p) - b_3(s, p)f_2(s, p) \\ k_2(s, p) &= b_3(s, p)f_1(s, p) - b_1(s, p)f_3(s, p) \\ k_3(s, p) &= b_1(s, p)f_2(s, p) - b_2(s, p)f_1(s, p) \\ f_j &= c_{44} \left[\{\gamma_j(s, p)\}^2 a_j(s, p) + 1 \right] - e_{15} b_j \\ &\quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

新しい未知関数 $G(x, p)$ を次のように導入する.

$$G(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u_z^*(x, 0, p) & (a < x < b) \\ 0 & (0 \leq x < a, b < x < \infty) \end{cases} \quad (21)$$

式 (19) を考慮して式 (16) を式 (21) 代入し, Fourier 逆変換することにより, $B_0(s, p)$ が次のように求まる.

$$B_0(s, p) = -\frac{1}{s} \int_a^b G(v, p) \sin(sv) dv \quad (22)$$

また, Laplace 変換された境界条件式 (8) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_a^b G(v, p) dv = 0 \quad (23)$$

Laplace 変換された境界条件式 (11) ~ (13) より, 未知関数 $B_j(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) が $G(v, p)$ を用いて次のように表せる.

$$B_j(s, p) = \frac{r_j(s, p)}{s} \int_a^b Q(v, s, p) G(v, p) dv \quad (j = 1, 2, 3) \quad (24)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} r_1(s, p) &= 1/(q_{11} + q_{12}d_2 + q_{13}d_3) \\ r_j(s, p) &= r_1(s, p)d_j \quad (j = 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

であり, $Q(v, s, p)$ および $d_j \equiv d_j(s, p)$ ($j = 2, 3$), $q_{1j} \equiv q_{1j}(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は付録 1 に示す既知

関数である. 式 (19), (22) および式 (24) を用いると, Laplace 変換された境界条件式 (8) の第 1 式より, 未知関数 $G(v, p)$ に関する次の特異積分方程式が得られる.

$$\int_a^b G(v, p) \left\{ \frac{1}{v-x} + \frac{1}{v+x} + M(v, x, p) \right\} dv = \frac{C_{33}}{c_{33}} \frac{\sigma_0}{Z_0^\infty} \frac{\pi}{p} \quad (26)$$

式中の積分核 $M(v, x, p)$ および定数 Z_0^∞ は付録 2 に示す.

4. エネルギー密度係数

特異積分方程式 (26) および補足の条件式 (23) を Gauss-Jacobi⁽¹⁷⁾ の数値積分公式を用いて数値解析するために, 解の特異性を考慮して次の滑らかな関数 $\Psi_1(u, pc/c_2)$, $\Psi_2(u, pb/c_2)$ を導入する.

$$G(v, p) = \begin{cases} \Psi_1\left(u, \frac{pc}{c_2}\right) (1-u^2)^{-1/2} & (a > 0) \\ \Psi_2\left(u, \frac{pb}{c_2}\right) \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1/2} & (a = 0) \end{cases} \quad (27)$$

ここに, $u = \{2v - (b+a)\}/(b-a)$, $c_2 = (c_{44}/\rho)^{1/2}$ はせん断波の伝播速度である.

き裂先端 $x = a, b$ での Laplace 像空間における動的応力拡大係数 $K_{Ia}^*(p)$, $K_{Ib}^*(p)$ は

$$\begin{aligned} K_{Ia}^*(p) &= \lim_{x \rightarrow a^-} \{2\pi(a-x)\}^{1/2} \sigma_{zz}^*(x, 0, p) \\ &= \begin{cases} -\frac{Z_0^\infty}{\pi} (\pi c)^{1/2} \Psi_1(-1, pc/c_2) & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} K_{Ib}^*(p) &= \lim_{x \rightarrow b^+} \{2\pi(x-b)\}^{1/2} \sigma_{zz}^*(x, 0, p) \\ &= \begin{cases} \frac{Z_0^\infty}{\pi} (\pi c)^{1/2} \Psi_1(1, pc/c_2) & (a > 0) \\ \frac{Z_0^\infty}{\pi} (2\pi b)^{1/2} \Psi_2(1, pb/c_2) & (a = 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

従って, 動的応力拡大係数 $K_{Ia}(t)$, $K_{Ib}(t)$ は

$$K_{Ia}(t) = \begin{cases} -\frac{Z_0^\infty}{\pi} (\pi c)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Psi_1(1, pc/c_2)}{p} \exp(pt) dp & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \end{cases} \quad (30)$$

$$K_{Ib}(t) = \begin{cases} -\frac{Z_0^\infty}{\pi} (\pi c)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Psi_1(1, pc/c_2)}{p} \exp(pt) dp & (a > 0) \\ \frac{Z_0^\infty}{\pi} (2\pi b)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Psi_2(1, pb/c_2)}{p} \exp(pt) dp & (a = 0) \end{cases} \quad (31)$$

また、き裂先端 $x = a, b$ での電束密度拡大係数 $K_{Da}(t)$, $K_{Db}(t)$ は次式で得られる。

$$K_{D\kappa}(t) = \frac{Z_D^\infty}{Z_0^\infty} K_{I\kappa}(t) \quad (\kappa = a, b) \quad (32)$$

ここに、 Z_D^∞ は付録 2 に示す定数である。

き裂先端 $x = a, b$ における圧電材料の破壊力学的パラメータとして有効な動的エネルギー密度係数 (12)~(14) $S_a(t)$, $S_b(t)$ は、 $K_{Ia}(t)$, $K_{Ib}(t)$, $K_{Da}(t)$, $K_{Db}(t)$ を用いて次式で表される。

$$S_\kappa(t) = A_{11}K_{I\kappa}(t)^2 + 2A_{14}K_{I\kappa}(t)K_{D\kappa}(t) + A_{44}K_{D\kappa}(t)^2 \quad (\kappa = a, b) \quad (33)$$

上式中、 A_{11} , A_{14} , A_{44} は材料定数とき裂面からの角度 θ のみに依存する係数である (13)。

5. 数値結果および考察

式 (30), (31) に Papoulis の数値 Laplace 逆変換法 (18) を適用し動的エネルギー密度係数 $S_a(t)$, $S_b(t)$ の時間的挙動を明らかにする。数値例として用いた圧電セラミックス PZT-4, PZT-5H, PZT-6B の材料定数を表 1 に示す (4), (6)。

Table.1 Material properties of PZT-4, PZT-5H and PZT-6B.

	PZT-4	PZT-5H	PZT-6B
c_{11} ($\times 10^{10}$ Pa)	13.9	12.6	16.8
c_{13} ($\times 10^{10}$ Pa)	7.43	8.41	6.00
c_{33} ($\times 10^{10}$ Pa)	11.3	11.7	16.3
c_{44} ($\times 10^{10}$ Pa)	2.56	2.30	2.71
e_{31} (C/m ²)	-6.98	-6.50	-0.90
e_{33} (C/m ²)	13.8	23.3	7.10
e_{15} (C/m ²)	12.7	17.0	4.60
ϵ_{11} (10^{-10} C/Vm)	60.0	150.4	36.0
ϵ_{33} (10^{-10} C/Vm)	54.7	130.0	34.0

図 2 ~ 4 は、それぞれ PZT-4, PZT-5H, PZT-6B の場合について、き裂位置 $(a+b)/2c > 1.0$ である内部き裂の無次元化された動的エネルギー密度係数 $(S_a(t), S_b(t))/\sigma_0^2 c(2c_{33})^{-1}$ の時間的挙動を、 $(a+b)/2c$ をパラメータとして示したグラフであり、実線が $S_a(t)$ 破線が $S_b(t)$ である。いずれの場合も時間の経過に伴い、動的エネルギー密度係数 $S_a(t), S_b(t)$ は急激に増大して、時刻 t_a^{max} , t_b^{max} で最大値 S_a^{max} , S_b^{max} に達した後、静的値 S_a^∞, S_b^∞ に振動しながら漸近しており、これらの値を表 2, 3 に示す。 $(a+b)/2c$ の増大に伴って、 $S_a(t)$, S_a^{max} , S_a^∞ は急激に減少するが、慣性効果を表す $(S_a^{max} - S_a^\infty)/S_a^\infty$ は増大する傾向を示す。 $S_b(t), S_b^{max}, S_b^\infty$ も同様であるが、 $(a+b)/2c$ の影響はき裂先端 $x = a$ の場合に比べて小である。また、 $(a+b)/2c \rightarrow \infty$ の $S_a(t), S_b(t)$ は点線で示すように

一致し、 $S_a(t), S_b(t)$ は PZT-6B, PZT-4, PZT-5H の順に増大する。

Fig.2 Dynamic energy density factors of the internal crack in the PZT-4 half-plane.

Fig.3 Dynamic energy density factors of the internal crack in the PZT-5H half-plane.

Fig.4 Dynamic energy density factors of the internal crack in the PZT-6B half-plane.

図 5 は、PZT-4, PZT-5H, PZT-6B の場合について、き裂位置 $(a+b)/2c = 1.0$ とした縁き裂の $S_b(t)/\sigma_0^2 b(2c_{33})^{-1}$ の時間的挙動を示したもので、各々の材料に対する S_b^{max} , t_b^{max} , S_b^∞ および $(S_b^{max} - S_b^\infty)/S_b^\infty$ の値を表 3 に示す。縁き裂の場合も図 2 ~ 4

の内部き裂の場合と同様の傾向であり, $S_b(t)$ におよぼす材料特性の影響は顕著である.

Table.2 The values of S_a^{max} , t_a^{max} , S_a^∞ and $(S_a^{max} - S_a^\infty)/S_a^\infty$.

Material	$\frac{a+b}{2c}$	$\frac{S_a^{max}}{\sigma_0^2 c(2c_{33})^{-1}}$	$\frac{c_2 t_a^{max}}{c}$	$\frac{S_a^\infty}{\sigma_0^2 c(2c_{33})^{-1}}$	$\frac{S_a^{max} - S_a^\infty}{S_a^\infty}$
PZT-4	1.1	16.936	3.18	10.751	0.575
	1.2	11.627	2.96	7.434	0.564
	1.5	7.762	2.66	5.021	0.549
	2.0	6.643	2.54	4.109	0.573
	∞	5.737	2.32	3.437	0.669
PZT-5H	1.1	24.456	3.30	14.950	0.636
	1.2	16.727	3.12	10.326	0.620
	1.5	11.182	2.84	6.934	0.613
	2.0	9.387	2.72	5.659	0.659
	∞	8.098	2.52	4.701	0.723
PZT-6B	1.1	4.026	3.24	2.740	0.469
	1.2	2.756	3.04	1.909	0.444
	1.5	1.865	2.74	1.317	0.417
	2.0	1.583	2.54	1.105	0.433
	∞	1.472	2.38	0.953	0.558

Table.3 The values of S_b^{max} , t_b^{max} , S_b^∞ and $(S_b^{max} - S_b^\infty)/S_b^\infty$.

Material	$\frac{a+b}{2c}$	$\frac{S_b^{max}}{\sigma_0^2 c(2c_{33})^{-1}}$	$\frac{c_2 t_b^{max}}{c}$	$\frac{S_b^\infty}{\sigma_0^2 c(2c_{33})^{-1}}$	$\frac{S_b^{max} - S_b^\infty}{S_b^\infty}$
PZT-4	1.1	7.556	3.08	5.068	0.491
	1.2	7.065	2.90	4.670	0.513
	1.5	6.436	2.70	4.149	0.551
	2.0	5.862	2.56	3.826	0.532
	∞	5.737	2.32	3.437	0.669
PZT-5H	1.1	10.912	3.18	7.001	0.559
	1.2	10.332	3.02	6.444	0.603
	1.5	9.468	2.86	5.713	0.657
	2.0	8.527	2.76	5.256	0.622
	∞	8.098	2.52	4.701	0.723
PZT-6B	1.1	1.780	3.20	1.340	0.328
	1.2	1.659	2.92	1.242	0.336
	1.5	1.550	2.60	1.116	0.389
	2.0	1.487	2.42	1.041	0.429
	∞	1.472	2.38	0.953	0.558
PZT-4	1.0	6.494b/c	2.59b/c	4.356b/c	0.491
PZT-5H	1.0	9.069b/c	2.68b/c	6.032b/c	0.504
PZT-6B	1.0	1.626b/c	2.67b/c	1.137b/c	0.430

Fig.5 Dynamic energy density factor of the edge crack.

6. 結 言

本報は, モード I 型の表面き裂を有する圧電セラミックス半無限体の衝撃応答問題を厳密に理論解析したものである. 解析には Laplace-Fourier 二重積分変換法を用い, 問題の解を特異積分方程式の解に導いて解く方法を採用した. 数値 Laplace 逆変換法を適用し, 内部き裂および縁き裂の場合の動的エネルギー密度係数の時間的挙動に及ぼす幾何学的形状および材料特性の影響を定量的に明らかにした.

付 録 1

$Q(v, s, p)$ は次式で与えられる.

$$Q(v, s, p) = \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^\infty}{k_0^\infty} p_{1j}^\infty \exp\left(-\frac{sv}{\gamma_j^\infty}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty \left[\frac{k_j(\eta, p)}{k_0(\eta, p)} \frac{\{\eta \gamma_j(\eta, p)\}^2 p_{1j}(\eta, p)}{s^2 + \{\eta \gamma_j(\eta, p)\}^2} - \frac{k_j^\infty}{k_0^\infty} \frac{\{\eta \gamma_j^\infty\}^2 p_{1j}^\infty}{s^2 + \{\eta \gamma_j^\infty\}^2} \right] \frac{\sin(\eta v)}{\eta} d\eta \quad (34)$$

ここに, $p_{1j}(\eta, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は

$$p_{1j}(\eta, p) = c_{11} a_j(\eta, p) - c_{13} + e_{31} b_j(\eta, p) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (35)$$

定数 k_0^∞ , k_j^∞ , γ_j^∞ , p_{1j}^∞ は

$$\left. \begin{aligned} k_0^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} k_0(\eta, p) \\ k_j^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} k_j(\eta, p) \\ \gamma_j^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \gamma_j(\eta, p) \\ p_{1j}^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} p_{1j}(\eta, p) \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, 3) \quad (36)$$

また, $d_j(s, p)$ ($j = 2, 3$), $q_{1j}(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は

$$\left. \begin{aligned} d_2(s, p) &= -\frac{1}{d_0(s, p)} \{ q_{33}(s, p) q_{21}(s, p) - q_{23}(s, p) q_{31}(s, p) \} \\ d_3(s, p) &= \frac{1}{d_0(s, p)} \{ q_{32}(s, p) q_{21}(s, p) - q_{22}(s, p) q_{31}(s, p) \} \\ d_0(s, p) &= q_{33}(s, p) q_{22}(s, p) - q_{23}(s, p) q_{32}(s, p) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{1j}(s, p) &= c_{11} \gamma_j'(s, p) a_j'(s, p) + c_{13} \frac{1}{\gamma_j'(s, p)} - e_{31} \frac{b_j'(s, p)}{\gamma_j'(s, p)} \\ q_{2j}(s, p) &= c_{44} a_j'(s, p) - c_{44} + e_{15} b_j'(s, p) \\ q_{3j}(s, p) &= e_{15} a_j'(s, p) - e_{15} - \varepsilon_{11} b_j'(s, p) \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, 3) \quad (38)$$

付録 2

$$\gamma_j'^\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_j'(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (44)$$

積分核 $M(v, x, p)$ は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} M(v, x, p) &= \sum_{i=1}^3 M_i(v, x, p) \\ M_i(v, x, p) &= -\frac{2}{Z_0^\infty} \int_0^\infty m_i(v, x, s, p) ds \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ここに, $m_i(v, x, s, p)$ ($i = 1, 2, 3$) は

$$\left. \begin{aligned} m_1(v, x, s, p) &= -\frac{1}{2} \{Z_0(s, p) - Z_0^\infty\} \\ &\quad \times [\sin\{s(v-x)\} + \sin\{s(v+x)\}] \\ m_2(v, x, s, p) &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{k_k^\infty}{k_0^\infty} p_{1k}^\infty q_{0j}^\infty r_j^\infty \\ &\quad \times \exp\left\{-s\left(\frac{v}{\gamma_k^\infty} + \gamma_j'^\infty x\right)\right\} \\ m_3(v, x, s, p) &= Q(v, s, p) \sum_{j=1}^3 q_{0j}(s, p) r_j(s, p) \\ &\quad \times \exp\{-s\gamma_j'(s, p)x\} - m_2(v, x, s, p) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

定数 Z_0^∞ および Z_D^∞ は

$$\left. \begin{aligned} Z_0^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} Z_0(s, p) \\ Z_0(s, p) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_j(s, p) k_j(s, p) p_{0j}(s, p)}{k_0(s, p)} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_D^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} Z_D(s, p) \\ Z_D(s, p) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_j(s, p) k_j(s, p) p_{Dj}(s, p)}{k_0(s, p)} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

であり, 上式中の $p_{0j}(s, p)$, $p_{Dj}(s, p)$, $q_{0j}(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) および $\gamma_j'^\infty$ は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} p_{0j}(s, p) &= c_{13} a_j(s, p) - c_{33} + e_{33} b_j(s, p) \\ p_{Dj}(s, p) &= e_{31} a_j(s, p) - e_{33} + e_{33} \varepsilon_j(s, p) \\ q_{0j}(s, p) &= c_{13} \gamma_j'(s, p) a_j'(s, p) \\ &\quad + c_{33} \frac{1}{\gamma_j'(s, p)} - e_{33} \frac{b_j'(s, p)}{\gamma_j'(s, p)} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (43)$$

文 献

- (1) Rao, S.S. and Sunar, M., *Appl. Mech. Rev.*, **47** (1994), 113-123.
- (2) 新実, センシング工学, (1992), コロナ社.
- (3) 進藤, 機械の研究, **50** (1998), 933-941.
- (4) Shindo, Y., Narita, F. and Tanaka, K., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **25** (1996), 65-71.
- (5) Shindo, Y., Narita, F. and Tanaka, K., *Acta. Mech.*, **120** (1997), 31-45.
- (6) Shindo, Y., Narita, F. and Watanabe, K., *Int. J. Eng. Sci.*, **38** (2000), 1-19.
- (7) 上田・金田, 機論, **68**-668, A(2002), 638-644.
- (8) Narita, F. and Shindo, Y., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **29** (1998), 169-180.
- (9) Shindo, Y., Narita, F. and Ozawa, E., *Acta. Mech.*, **137** (1999), 99-107.
- (10) Chen, Z.T. and Meguid, S.A., *Int. J. Solids Struct.*, **37** (2000), 6051-6062.
- (11) 上田, 機論, **67**-657, A(2001), 887-884.
- (12) Shen, S. and Nisioka, T., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **33** (2000), 57-65.
- (13) Zuo, J.Z. and Sih, G.C., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **34** (2000), 17-33.
- (14) Sih, G.C. and Zuo, J.Z. *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **34** (2000), 123-141.
- (15) Sneddon, I.N. and Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York
- (16) Gupta, G.D., *Int. J. Solids Struct.*, **9** (1973), 1141-1154.
- (17) Erdgan, F., Gupta, G.D. and Cook, T.S., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by G.C.Sih), (1972), Noordhoff, Leyden
- (18) Papoulis, A. *J. Appl. Mathe.*, **14** (1957), 405-414