面外せん断荷重下での多層円形介在物を有する
等方性圧電弾性体の解析解とその計算例*鈴木 拓雄^{*1}, 佐々木 徹^{*2}
木村 清和^{*3}, 吉野 昇^{*4}Analyses of Isotropic Piezoelectric Materials
with Multilayered Circular Inclusions
under Out-of-Plane Shear Loadings and Their Numerical ExamplesTakuo SUZUKI^{*5}, Toru SASAKI,
Kiyokazu KIMURA and Noboru YOSHINO^{*5} Materials and Environment Technology, Graduate School of Engineering, Yamanashi University,
4-3-11 Takeda, Kofu-shi, Yamanashi, 400-8511 Japan

Piezoelectric materials are gradually expected in industrial areas from the excellent characteristics of the mechanical and electrical couplings such as the sensors and actuators. When such roles are expected in the piezoelectric materials, they are laminated in order to improve the efficiency. Therefore, it is important to study mechanical and electro-physical quantity in each layer by theoretical analysis sense. In this paper, two-dimensional electro elastic analysis is performed for an isotropic piezoelectric materials containing multilayered circular inclusions under out-of-plane mechanical and electrical loads at infinity. General solutions are provided in terms of complex functions and several numerical examples are shown by graphical representation.

Key Words: Piezoelectric, Multilayered Inclusion, Out-of-Plane Shear Loading, Complex Analytical Solutions

1. 結 言

圧電物質は電気-力学変換デバイスとして有用な材料であり, 多方面にわたる利用が期待されている。例えば, 力学的負荷により生じたひずみを電氣的な値に変換するセンサーとしての利用や, 逆に電氣的負荷を与えることで応力・ひずみを発生させるアクチュエーターとしての利用である。

圧電物質にこのような役割を期待した場合, より効率の良い動作をさせるために圧電物質や弾性体を積層させることなどが行われている^①。したがって, 積層された圧電弾性体に力学的・電氣的負荷が作用した場合の各層の力学的・電氣的物理量を理論解析的に把握することは重要である。

この種の研究として鈴木ら^②は 2 層の圧電弾性体に対する解析解を導出し, 平島ら^③は任意層数の円形リング状介在物を有する弾性体の解析解を導いているが, そこでは圧電効果が考慮されていない。他方, Jiang&Cheung^④は圧電効果を考慮した多層問題に対す

る理論解析結果を示しているが, 円形介在物の層数は媒体を含め, 接着層, 介在物で構成される 3 までに限定されている。

本論文では, 面外せん断荷重下における任意層数の円形介在物をもつ等方性圧電弾性体の解析解を閉じた形で導き, いくつかの数値計算例を示す。層数を十分に多くとることの意義は介在物と媒体の接合に際し

Fig.1 Piezoelectric medium with multilayered circular inclusion

* 原稿受付 2002 年 6 月 7 日。

^{*1} 正員, 山梨大学大学院工学研究科(〒400-8511 甲府市武田 4-3-11)。

^{*2} 山梨大学大学院自然機能開発専攻。

^{*3} 正員, 群馬工業高等専門学校(〒371-8530 前橋市鳥羽 580)。

^{*4} (株) コミヤマ工業(〒400-0067 甲府市長松寺町 6-2)。

E-mail: suzutaku@ccn.yamanashi.ac.jp

て硬化熱などの影響によって接着層や介在物は必ずしも一定の物性状態ではないこと、他方、非均一物性をもつ介在物問題の解析は実質的に困難であることなどによって、ここでのように多層問題として取り扱うことが最近増大してきていることに応えるためでもある。ここで導かれた解析解は、従来までは円形介在物内の各物理定数が一定で変化しないとして簡略的に取り扱われてきたものを、例えば介在物内の物性が連続的ないし断続的に変化するような数十ないし数百以上ある場合であっても精度良く近似させることができるようにしたものとなっている。

2 基礎方程式と基本解

2.1 応力・電場・電気変位を求める公式 本論文においては図1に示すように、奥行き方向に断面形状の変化のない等方性圧電弾性媒体内に同じく物性値の異なる圧電弾性体の円形介在物が同心円状に多数存在し、無限遠より面外方向に一樣なせん断荷重および面内方向に一樣な電気的負荷が作用する問題を取り扱う。したがって、 xy -平面に垂直な厚さ方向の座標を z 軸として、面外せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} 、変位 w および電場 E_x, E_y 、電気変位 D_x, D_y はいずれも面内座標 (x, y) のみの関数となる。物体力を無視した力学的釣合式と電気変位に対するガウスの法則から次式が成立する。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

圧電効果を考慮した構成式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= C_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = C_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ D_x &= e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - d_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad D_y = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - d_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 C_{44} はせん断弾性定数、 d_{11} は誘電率、 e_{15} は圧電定数である。

次に、ひずみ γ_z および電場 E は z 方向変位 w および電気ポテンシャル φ によって次式で関連づけられる。

$$\gamma_z = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3)$$

以上に示した式を組み合わせることにより、次の調和方程式が得られる。

$$\nabla^2 w = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4)$$

したがって、 w と φ の一般解は、上式を満足する複素ポテンシャル関数 $\Psi(z)$ 、 $\Phi(z)$ によって次式のように表すことができる。

$$w = \operatorname{Re} \Psi(z), \quad \varphi = \operatorname{Re} \Phi(z). \quad (5)$$

ここに圧電媒体を第1層とし、円形リング状介在物を外側より数えて、第1層から第 $n-1$ 層までに対しては次式：

$$\left. \begin{aligned} \Psi^M &= \left(A_-^M \frac{1}{z} + A_+^M z \right), \\ \Phi^M &= \left(B_-^M \frac{1}{z} + B_+^M z \right), \quad (M=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

また、最も内側の第 n 層に対しては次式：

$$\Psi^n = A^n z, \quad \Phi^n = B^n z \quad (7)$$

とそれぞれ設定する。ここに、 A^n, B^n, A_+^n, B_+^n は複素定数であり、上添字 M, n は各層に対応することを示す。

以上の式から、圧電媒体および介在物内の各物理量は次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^M &= C_{44}^M \left\{ r^{-2} \left(-A_-^M \cos 2\theta - A_+^M \sin 2\theta \right) + A_+^M \right\} \\ &\quad + e_{15}^M \left\{ r^{-2} \left(-B_-^M \cos 2\theta - B_+^M \sin 2\theta \right) + B_+^M \right\}, \\ \tau_{yz}^M &= C_{44}^M \left\{ r^{-2} \left(A_-^M \cos 2\theta - A_+^M \sin 2\theta \right) - A_+^M \right\} \\ &\quad + e_{15}^M \left\{ r^{-2} \left(B_-^M \cos 2\theta - B_+^M \sin 2\theta \right) - B_+^M \right\}, \\ D_x^M &= e_{15}^M \left\{ r^{-2} \left(-A_-^M \cos 2\theta - A_+^M \sin 2\theta \right) + A_+^M \right\} \\ &\quad - d_{11}^M \left\{ r^{-2} \left(-B_-^M \cos 2\theta - B_+^M \sin 2\theta \right) + B_+^M \right\}, \\ D_y^M &= e_{15}^M \left\{ r^{-2} \left(A_-^M \cos 2\theta - A_+^M \sin 2\theta \right) - A_+^M \right\} \\ &\quad - d_{11}^M \left\{ r^{-2} \left(B_-^M \cos 2\theta - B_+^M \sin 2\theta \right) - B_+^M \right\}, \\ E_x^M &= r^{-2} \left(B_-^M \cos 2\theta + B_+^M \sin 2\theta \right) - B_+^M, \\ E_y^M &= r^{-2} \left(-B_-^M \cos 2\theta + B_+^M \sin 2\theta \right) + B_+^M, \\ &\quad M=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^n &= C_{44}^n A^n + e_{15}^n B^n, \quad \tau_{yz}^n = -C_{44}^n A^n - e_{15}^n B^n, \\ D_x^n &= e_{15}^n A^n - d_{11}^n B^n, \quad D_y^n = -e_{15}^n A^n + d_{11}^n B^n, \\ E_x^n &= -B^n, \quad E_y^n = B^n. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、上添字の $\cdot$ および $'$ はそれぞれの係数の実部および虚部であることを示す。

2.2 未定定数の決定 ここでは、前節で導かれた各物理量の解析解に含まれている未定定数を境界条件から決定する方法を述べる。以下では最も内側の介在物の物性を3つの場合に分けて論ずる。一方、無限遠では力学的負荷である応力またはひずみ、ならびに電気的負荷の電場または電気変位が作用することになる。したがって、無限遠においては力学的負荷と電気的負荷に対して4つの組み合わせが考えられ、それぞれの

場合に対して未定係数を決定することが可能である²⁾が、ここでは便宜的に次式で示すように、無限遠では応力と電場が負荷されているものとする。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} \Big|_{|z| \rightarrow \infty} &= \tau_{xz}^0, \quad E_x \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = E_x^0, \\ \tau_{yz} \Big|_{|z| \rightarrow \infty} &= \tau_{yz}^0, \quad E_y \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = E_y^0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

この条件から実定数 A^I, B^I, A^{II}, B^{II} は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} A^I &= \frac{\tau_{xz}^0 + e_{15}^I E_x^0}{C_{44}^I}, \quad B^I = -E_x^0, \\ A^{II} &= -\frac{\tau_{yz}^0 + e_{15}^{II} E_y^0}{C_{44}^{II}}, \quad B^{II} = E_y^0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

なお、本論文では境界 $L_1, L_2, \dots, L_{n-2}$ において完全結合であるとし合応力 T_r , 合電気変位 D_D を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} T_r &= -\int (\tau_{yz} dx - \tau_{xz} dy) = \text{Im} [C_{44} \Psi(z) + e_{15} \Phi(z)], \\ D_D &= -\int (D_y dx - D_x dy) = \text{Im} [e_{15} \Psi(z) - d_{11} \Phi(z)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 Im は複素関数の虚部であることを示す。このとき、各層の変位 w , 合応力 T_r , 電気ポテンシャル φ , 合電気変位 D_D は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} w^M &= w^{M+1}, \quad T_r^M = T_r^{M+1} \\ \varphi^M &= \varphi^{M+1}, \quad D_D^M = D_D^{M+1} \quad \text{on } L_M \quad (M=1, 2, \dots, n-2). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

したがって、境界 L_M ($M=1, \dots, n-2$) での完全接合条件を用いることによって付録 A に示すように、各層の複素係数 A^M, B^M, A^N および B^N ($M=1, 2, 3, \dots, n-1; N=2, 3, 4, \dots, n-1$) は2つの複素係数 A^I, B^I で表される。これらの複素係数は以下で述べる最も内側の境界 L_{n-1} の条件によって決定され、最終的にすべての複素係数が定まることになる。

[A] 最も内側の介在物が中実の圧電弾性体の場合
ここでは最も内側の層が圧電弾性体であると想定し、境界 L_{n-1} で完全接合であることから、各層の変位 w , 合応力 T_r , 電気ポテンシャル φ , 合電気変位 D_D は次式のように4つの条件を設定できる。

$$\left. \begin{aligned} w^M &= w^{M+1}, \quad T_r^M = T_r^{M+1}, \\ \varphi^M &= \varphi^{M+1}, \quad D_D^M = D_D^{M+1}, \quad \text{on } L_{n-1}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

一方、未定係数は式(7)で示した A^N と B^N および上述の A^I と B^I なので、上式から導かれる連立方程式

を解くことによってこれら4つの複素定数が定まることになる。

[B] 最も内側の介在物が空孔の場合 ここでは、最も内側の層が空孔である場合を想定し、境界 L_{n-1} における電氣的境界条件は空孔が真空または空気で満たされているとすれば、それらの誘電率は圧電物質の誘電率より非常に小さいことから、境界に垂直な方向の電気変位 D_n は無視できることになる。また、力学的境界条件は合応力 T_r が零になることから次式が成立する。

$$T_r^{n-1} = 0, \quad D_n^{n-1} = 0, \quad \text{on } L_{n-1}. \dots\dots\dots (15)$$

したがって、この2つ境界条件から導かれる連立方程式を解くことによって未定複素定数 A^I と B^I が定まることになる。

[C] 最も内側の介在物が剛体の場合 ここでは最も内側の層が剛体の介在物であると想定し、境界 L_{n-1} における電氣的境界条件は電気ポテンシャル φ が零であると設定する。また、力学的境界条件は変位 w が零になることから、次式が成立することになる。

$$\varphi^{n-1} = 0, \quad w^{n-1} = 0, \quad \text{on } L_{n-1} \dots\dots\dots (16)$$

したがって、この2つ境界条件から導かれる連立方程式を解くことによって未定複素定数 A^I, B^I が定まることになる。

3. 数値計算例

ここでは、第2章で得られた解析解を用いて各条件の理論解を用いて数値計算を行った結果を示す。なお、本論文では、力場や電場の量を表現する方法として、次式で定義する最大せん断応力 $\tau_{\max}$ および最大電場 $E_{\max}$ を用いることとする。

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}, \quad E_{\max} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \dots\dots\dots (17)$$

3.1 最も内側の介在物が圧電弾性体・空孔および剛体の場合の比較 介在物が空孔または剛体の場合には圧電弾性体の場合に比べて解析解を導出することは比較的容易であるが、介在物が圧電弾性体とした場合の解は他の2つよりも一般的なものである。すなわち、介在物が空孔または剛体であるとしたものは圧電弾性介在物の物性の極限をとることによって表すことができることから、このことを数値計算で確認することによりそれぞれの解析解の正しさを確かめることが可能である。

ここでは、PZT-5の圧電媒体内に単一層の円形介在物が存在する場合にまで層数を縮退させて最大せん断

応力および最大電場についての検討を行う。なお、簡略化のため円形介在物の圧電定数 e_{15} は零とし、介在物内では力場と電場の連成効果が生じないようにした。また、円形の圧電弾性介在物の物性は、剛体を近似する場合には $C_{44} \rightarrow \infty$ および $d_{11} \rightarrow \infty$ 、空孔を近似する場合には $C_{44} \rightarrow 0$ および $d_{11} \rightarrow 0$ とした。

図2は各種の介在物を有する PZT-5 の圧電弾性媒体に無限遠より一様なせん断荷重 τ_y^0 を作用させた場合の媒体と介在物の境界での最大せん断応力を示したものであり、実線は空孔または剛体介在物の場合の計算結果である。なお、図中に示されている 10° は、媒体である PZT-5 に対する介在物の弾性定数 C_{44} および誘電率 d_{11} の倍率であることを意味する。この図から、圧電弾性介在物の物性を 10^{-1} あるいは 10^2 倍にするとそれぞれ空孔あるいは剛体の解とほぼ一致していることがわかる。

図3は、図2で用いたものと同じ系に対して無限遠より一様な電場 E_y^0 を作用させた場合の媒体と介在物の境界での最大電場を示したものであり、実線は空孔または剛体介在物の場合の計算結果である。なお、図中に示されている 10° は、図2で示されているものと同じことを意味している。

Fig.2 Boundary maximum shear stress $\tau_{\max}$ for various shear modulus ratios

Fig.3 Boundary maximum electric field $E_{\max}$ for various dielectric constant

以上により、圧電弾性介在物の物性が特別な場合には空孔あるいは剛体介在物の場合に帰着することが確認できたことから、導出された解析解が正しいものであると判断できる。なお、ここでは作用する負荷が力学的なものとな電氣的なものに分けて論じたが、力学的および電氣的負荷が同時に作用した場合には圧電定数 e_{15} の値に応じた重ね合わせで各物理量が計算されることになる。

3.2 層数を増減させた場合の各物理量の変化 ここでは、圧電弾性媒体中の円形リング状介在物の層数を変化させた場合の応力と電場の挙動について検討する。数値計算を実施する系は図4に示すように、最も外側の圧電弾性媒体領域と半径 a_2 からリング状円形介在物半径 a_1 までの領域および半径 a_2 までの円形介在物領域をそれぞれ領域 A_1, A_2 および A_3 とし、領域 A_2, A_3 の寸法比および領域 A_1, A_3 の物性値を固定するとともに、領域 A_2 の寸法比および物性値を1から10段階までに分割した。つまり、系全体としては3層から12層の介在物問題として数値計算を行ったことになるが、各領域に与えた寸法比や物性値を次のように定めた。すなわち、領域 A_2, A_3 の寸法比は $a_1/a_2 = 5/1$ となるようにし、具体的には $a_1 = 25, a_2 = 5$ として数値計算を行った。さらに領域 A_2 内の寸法比は分割数を n とした場合、各層の厚さが等しくなるように層厚を $(a_1 - a_2)/n$ に設定した。また物性値の決定には図5を用いた。図5は多孔質のPZT-5がもつ物性値を空隙率(空孔とPZT-5の体積比) λ に対して図示したものである。 $\lambda=0$ のときには空隙が存在せず、逆に $\lambda=1$ のときには空隙のみでPZT-5が存在していないことを意味する。なお、この図は文献⁴⁰で示された $\lambda=0$ から0.9までの0.1ごとの物性値を3次曲線で近似して作成したものである。図5を用いて、領域 A_1 に対しては $\lambda=0$ に対応する物性値に、領域 A_3 に対しては $\lambda=0.9$ に対応する物性値に固定した。また、これら両者の中間層となる領域 A_2 の物性値は λ の値を $0.9/(n+1)$ で等分割したものを外側の層から順に λ の値に対応する物性値を採用した。例えば、この領域を2つに分割する際には外側の層から順にそれぞれ $\lambda=0.225$ および 0.625 に対応する物性値に設定することになる。つまりこの系を全体的に見たときには、最も外側の層が最も剛で最も内側の層が最も柔であり、さらに外側から内側に向かうにしたがって、徐々に柔になっていく構造を想定したことになる。

図6および図7は、それぞれ層数 $n=3,4,12$ としたときに図中に示した無限遠応力・電場を同時に負荷した場合の x 軸上の最大せん断応力および最大電場を示したものである。上述したように層数は領域 A_2 内で変化し、層数が少ないほど層の境界での最大せん断応力ならびに最大電場の変動が大きくなっており、またどの層数においても遠方では負荷応力・電場に漸近していることがわかる。一方、これらの図においては、大局的には層数の増加に伴って最大せん断応力および最大電場は $n=12$ の場合の挙動に漸近していくことがわかるが $n=3$ から4へ変化する（つまり領域 A_2 が1層から2層に変化する）際には特に領域 A_2 における挙動の差が大きく異なっている。そのことの妥当性を確認するために、図8,9において $n=3$ から4へ層数が増加する際に圧電弾性材料の物性が図5に沿って緩やかに変化する場合について検討した。

すなわち、図8および9はそれぞれ最大せん断応力および最大電場を図示したものであり、表1に示すように領域 A_2 が1層の場合($n=3$)には図5における $\lambda_{out} = \lambda_{in} = 0.45$ (No. I)のときの物性値を取り、2層の場合($n=4$)には外側から順に $\lambda_{out} = 0.225$, $\lambda_{in} = 0.625$ のときの物性値をとるようにし、これら2つの場合を両極として、領域 A_2 内の2つの層の物性値の相違が表1に示すように、No. I から No. VII になるにしたがって互いに徐々に大きくなるようにした。このようにしたときの各物理量の挙動は、緩やかな変化を示していることがわかる。

ここでの数値計算例は緒論でも述べたように、物性が連続的に変化するような場合をモデル化したものであると考えることもできる。例えば、領域 A_2 が外側から内側に向かうにしたがって連続的に柔くなるようなものが存在する場合に対し、この領域を1つの物性で近似($n=3$)したときと10層で近似($n=12$)したときの各物理量がとる値を把握することが可能となる。

Fig.5 Each modulus for piezoelectric media with defect

Fig.4 Piezoelectric medium with multilayered circular inclusion model

Fig.6 Maximum shear stress τ_{max} along x -axis for various number of layers

Fig.7 Maximum electric field E_{max} along x -axis for various number of layers

Fig.8 Transition of maximum shear stress τ_{max} along x-axis for gradual change of each modulus

Fig.9 Transition of maximum electric field E_{max} along x-axis for gradual change of each modulus

Table 1 Value of λ on area A_2

Number of layers (n)		3						
No.		I	II	III	IV	V	VI	VII
Value of λ	$\lambda_{ax}(\text{Outer})$	0.45	0.44	0.42	0.40	0.35	0.25	0.225
	$\lambda_n(\text{Inner})$		0.46	0.48	0.50	0.55	0.65	0.625

4. 結 言

本論文では、遠方場からの一様な面外の力学的負荷および面内の電氣的負荷が作用する多層圧電弾性介在物を有する等方性圧電弾性媒体に対する解析解の提示を行うと共に、いくつかの数値計算を示した。

本論文の結果は第 22 節[A]で得られた解析解が最も一般的なものであり、そこでの各定数を特殊化することによって、その他の場合の解に帰着するものとなっている。

また、ここでの理論は層数が数十ないし数百以上になっても、さして困難はなく計算が可能なものであるため、物性が連続的に変化するような場合のモデルにも対応できる。

付録 A 境界 L_M ($M=1, \dots, n-2$) 上での複素定数の関係

各層の複素定数は本文の第 2 章で示した基礎式とそれぞれの境界条件から、決定することができる。境界 L_M 上での境界条件から次の関係式を導くことができる。

on L_M ($M=1, 2, \dots, n-2$)

$$\left. \begin{aligned} A^{M+1} &= R_{11}^{M'} A^{M'} + R_{12}^{M'} B^{M'} + P_1^{M'}, \\ B^{M+1} &= R_{21}^{M'} A^{M'} + R_{22}^{M'} B^{M'} + P_2^{M'}, \\ A^{M+1} &= (1 + b_M^2 R_{11}^{M'}) A^{M'} + b_M^2 R_{12}^{M'} B^{M'} + b_M^2 (P_1^{M'} - A^{M'}), \\ B^{M+1} &= b_M^2 R_{21}^{M'} A^{M'} + (1 + b_M^2 R_{22}^{M'}) B^{M'} + b_M^2 (P_2^{M'} - B^{M'}). \end{aligned} \right\}$$

..... (A.1)

$$\left. \begin{aligned} P_1^{M'} &= [d_{11}^{M+1} \{ (C_{44}^M + C_{44}^{M+1}) A^{M'} + (e_{15}^M + e_{15}^{M+1}) B^{M'} \} \\ &\quad + e_{15}^{M+1} \{ (e_{15}^M + e_{15}^{M+1}) A^{M'} - (d_{11}^M + d_{11}^{M+1}) B^{M'} \}] / \Delta^{M+1}, \\ P_2^{M'} &= [e_{15}^{M+1} \{ (C_{44}^M + C_{44}^{M+1}) A^{M'} + (e_{15}^M + e_{15}^{M+1}) B^{M'} \} \\ &\quad - C_{44}^{M+1} \{ (e_{15}^M + e_{15}^{M+1}) A^{M'} - (d_{11}^M + d_{11}^{M+1}) B^{M'} \}] / \Delta^{M+1}, \\ R_{11}^{M'} &= \{ d_{11}^{M+1} (C_{44}^M - C_{44}^{M+1}) / b_M^2 + e_{15}^{M+1} (e_{15}^M - e_{15}^{M+1}) / b_M^2 \} / \Delta^{M+1}, \\ R_{21}^{M'} &= \{ d_{11}^{M+1} (e_{15}^M - e_{15}^{M+1}) / b_M^2 + e_{15}^{M+1} (-d_{11}^M + d_{11}^{M+1}) / b_M^2 \} / \Delta^{M+1}, \\ R_{22}^{M'} &= \{ e_{15}^{M+1} (C_{44}^M - C_{44}^{M+1}) / b_M^2 - C_{44}^{M+1} (e_{15}^M - e_{15}^{M+1}) / b_M^2 \} / \Delta^{M+1}, \\ R_{12}^{M'} &= \{ e_{15}^{M+1} (e_{15}^M - e_{15}^{M+1}) / b_M^2 - C_{44}^{M+1} (-d_{11}^M + d_{11}^{M+1}) / b_M^2 \} / \Delta^{M+1}, \\ \Delta^{M+1} &= 2 \{ (e_{15}^{M+1})^2 + C_{44}^{M+1} d_{11}^{M+1} \}. \end{aligned} \right\}$$

..... (A.2)

参考文献

- (1)内野研二, 圧電/電歪アクチュエーター, (1986)森北出版.
- (2)鈴木拓雄・木村清和・平島健一・広瀬幸雄: 面外せん断荷重下での楕円形の空孔, 剛体または弾性介在物を有する等方性圧電弾性問題の解析解とその数値計算例, 機論, 64-619A(1998), 644-649.
- (3)平島健一・池田然之・木村清和: 面外せん断荷重下における多層だ円リングを有する弾性体の解析解とその数値計算例, 機論, 63-607A(1997), 73-80.
- (4)Jiang, CP., Cheung, YK, An exact solution for the three-phase piezoelectric cylinder model under antiplane shear and its applications to piezoelectric composites, Int. J. Solids Structures, 38(2001), 4777-4796.