非線形均質化理論に基づく骨組要素を用いた セル構造材料のマルチスケール解析*

齊 木 功^{*1}, 大 植 健^{*2}
寺 田 賢二郎^{*3}, 中 島 章 典^{*4}

Multi-Scale Analysis of Cellular Materials with Frame Elements by Nonlinear Homogenization

Isao SAIKI^{*5}, Ken OOUE,
Kenjiro TERADA and Akinori NAKAJIMA

^{*5} Department of Civil Engineering, Utsunomiya University,
7-1-2 Yoto, Utsunomiya-shi, Tochigi, 321-8585 Japan

Cellular materials consist of lattice-like microstructures are usually treated as continua which have equivalent macroscopic mechanical properties for structural analysis. Whereas the linear theory that estimates the equivalent properties for composites include cellular materials is mature, the theory and the methodology for the nonlinear analysis of cellular materials remain active fields of research. Then, in this context, we apply the homogenization method, which utilizes multiple scales and realizes macro and micro coupling multi-scale analysis, to cellular materials. Frame elements are employed in the multi-scale analysis based on the homogenization method since it is rational from computational viewpoint for discretizing the lattice-like microstructure. Finally, we show some numerical examples of the nonlinear multi-scale analysis of cellular materials in order to validate our multi-scale analysis.

Key Words: Finite Deformation Theory, Computational Mechanics, Framed Structure, Homogenization Method, Multi-Scale Analysis, Cellular Materials

1. 緒言

複合材料の開発によってなされる材料特性の向上は、今日の工業製品の高性能化、高機能化に必要不可欠な要素の一つである。また、木材や骨といった生命体が形成する材料は、剛性・質量比などの観点から高機能な複合材料であり、軽量構造物にとって特に重要なハニカムパネルやフォーム材といった人工のセル構造材料として応用されている⁽¹⁾。セル構造材料を有する構造物の解析に際しては、数値解析における効率の観点から、いわゆる複合材料と同様に巨視的に等価な材料特性を有する連続体として取り扱われる。

複数の材料によって新たに合成される複合材料の平均物性を評価することを目的とした研究が、1950 年以降、盛んに行われた⁽²⁾。しかしながら、単なる平均物性の枠を越えて、非線形力学応答に話を転じると、古典的な複合材料の平均化手法は解析的に解を求めることに主眼がおかれているため、非線形問題を取り

扱うための理論、方法論の整備は今なお十分とはいえない。

材料の非線形応答は、当然のことながら材料の微視的な構造の非線形挙動に起因する。したがって、複合材料の平均物性評価と同様に、微視的な構造の変化と材料としての非線形応答を関連づけることができそうである。このような観点から、通常の構造物を捉えるスケールに加え、材料の微視構造を記述するもう一つのスケールを用いた均質化理論⁽³⁾に基づく非線形マルチスケール解析⁽⁴⁾の試みが近年行われている。この手法は、微視構造の解析とその平均挙動を用いた構造物の解析を連成して行うマルチスケールモデリングであり、単なる平均化手法とは異なるものである。

セル構造材料への均質化法の適用に関する検討は、主に薄肉部材からなる微視構造の分岐挙動への興味から、大野ら^(5,6)や著者ら^(7,8)によってなされている。ただし、計算負荷の高い分岐解析を巨視構造の全ての物性評価点で実行する必要があることから、巨視、微視構造の相互作用を考慮した真の意味でのマルチスケール解析は未だ実用化されたとはいえない。このような観点から、著者らは、従来の定式化で得られる微視構造の連続体の境界値問題において、計算効率を高

* 原稿受付 2002 年 5 月 15 日。

^{*1} 正員, 宇都宮大学工学部(☎ 321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)。

^{*2} 川田テクノシステム(☎ 116-0014 東京都荒川区東日暮里 5-51-11)。

^{*3} 正員, 東北大学大学院工学研究科(☎ 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)。

^{*4} 宇都宮大学工学部。

E-mail: saiki@cc.utsunomiya-u.ac.jp

Fig. 1 Concept of multi-scale modeling.

めるために有利な骨組等の構造要素による離散化を試みた。この過程で周期性を仮定する微視スケール変位と構造要素における変位場の不整合に起因する問題点が指摘された⁽⁹⁾が、微視構造解析の自由度に一樣変位と周期変位との和を用いることで前述の問題を解決し、線形問題⁽¹⁰⁾、非線形問題⁽¹¹⁾への適用可能性を示してきた。これにより、セル構造材料の非線形マルチスケール解析を効率的に行うための基本ツールが完成したと言える。そこで本論文では、骨組要素を微視構造解析に用いたセル構造材料のマルチスケール解析の定式化および解析アルゴリズムを示し、具体的な平面問題のマルチスケール解析例により本手法の妥当性を確認する。

2. 非線形均質化法の定式化

本節では、Terada and Kikuchi⁽⁴⁾が行った2変数収束論⁽¹²⁾に基づく、非線形均質化法の定式化の概要を示す。ただし、ここで取り扱っているようなセル構造材料の微視構造には分岐座屈が起こることが知られており、したがって、ポテンシャルの凸性は保証されない。非凸ポテンシャル問題に対する均質化法の適用と注意点については著者らの文献⁽⁸⁾に記述されているが、本論文では微視構造の分岐は考慮しないこととする。

2.1 境界値問題の設定 図1に示すように、非常に小さい ϵ によって規定される大きさ ϵY の微小な単位周期構造により、周期的に埋め尽くされた領域 Ω^ϵ を解析対象とする。このとき、対象領域は大きさ ϵY の並進変換に対して不変である。この構造全体の力学挙動は基本周期構造のみならず、その大きさを表すパラメタ ϵ にも影響を受ける。以下の定式化では、領域 Ω^ϵ のように各変数に添え字 ϵ を付してパラメタ ϵ への依存性を明示することとする。

一般的有限変形境界値問題

$$\nabla_X \cdot \mathbf{P}^\epsilon + \rho^\epsilon \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^\epsilon = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad \mathbf{P}^{\epsilon T} \cdot \mathbf{N} = \underline{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (2)$$

を考える。ここに、 $\mathbf{P}^\epsilon$ は第1 Piola-Kirchhoff 応力、 ρ は密度、 $\mathbf{b}$ は単位質量当たりの物体力、 $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{t}}$ は与えられる幾何学的、および力学的境界条件、 $\mathbf{N}$ は参照配置における外向き単位法線ベクトルである。また、 Γ は領域 Ω^ϵ の境界、 ∇ は下付きの変数による勾配を取る演算子であり、 $\mathbf{X}$ は物質座標を表す。本研究では、物体を構成する材料がひずみエネルギー $\mathcal{W}^\epsilon$ を持つ超弾性体であると仮定して、構成関係を

$$\mathbf{P}^\epsilon = \frac{\partial \mathcal{W}^\epsilon}{\partial \mathbf{F}^\epsilon} \quad (3)$$

と表すことにする。ここに、 $\mathbf{F}^\epsilon$ は変形勾配テンソルである。

均質化法の通常の手続きに従って、微視構造を観察するための微視スケール $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\epsilon$ を導入すれば、領域 Ω^ϵ は $\mathbf{X}$ の属する Ω と $\mathbf{Y}$ の属する ϵY の2つの空間の直積として $\Omega^\epsilon = \Omega \times \epsilon Y$ と表すことができる。これにより、変位、応力といった場の変数は $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ の2変数の関数と見なすことになる。

2.2 2変数収束論による定式化 本節では、変分原理および2変数収束論に基づく定式化を行うが、それぞれの理論から得られる帰結のみを示すこととする。

仮想変位を $\boldsymbol{\eta}^0(\mathbf{x}) + \epsilon \boldsymbol{\eta}^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\epsilon)$ として、仮想仕事の原理により、釣合式(1)を弱形式に変換すると

$$0 = \int_{\Omega} (\nabla_X \boldsymbol{\eta}^0 + \nabla_Y \boldsymbol{\eta}^1 + \epsilon \nabla_X \boldsymbol{\eta}^1) : \mathbf{P}^\epsilon d\mathbf{v} - \int_{\Omega} \rho^\epsilon \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\eta}^0 + \epsilon \boldsymbol{\eta}^1) d\mathbf{v} - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\mathbf{t}} \cdot (\boldsymbol{\eta}^0 + \epsilon \boldsymbol{\eta}^1) d\mathbf{s} \quad (4)$$

を得る。ここで、 $\epsilon \rightarrow 0$ を考え2変数収束論を適用すると、式(4)の2変数極限から、微視、巨視、両スケールでの弱形式の釣合式

$$g(\mathbf{P}^0, \boldsymbol{\eta}^1) := \langle \mathbf{P}^0 : \nabla_Y \boldsymbol{\eta}^1 \rangle = 0 \quad (5)$$

$$G(\tilde{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\eta}^0) := \int_{\Omega} \nabla_X \boldsymbol{\eta}^0 : \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{v} - \int_{\Omega} \tilde{\rho} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 d\mathbf{v} - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 d\mathbf{s} = 0 \quad (6)$$

を得る。ここに、 $\langle \bullet \rangle_Y$ は

$$\langle \bullet \rangle := \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet d\mathbf{Y} \quad (7)$$

で定義される代表体積要素 Y における体積平均演算子である。また、 $\mathbf{F}^0$ は全変形勾配、 $\mathbf{P}^0$ は全応力、 $\tilde{\mathbf{P}}$ は平均応力、 $\tilde{\rho}$ は平均密度であり、それぞれ

$$\mathbf{F}^0 := \mathbf{1} + \nabla_X \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 \quad (8)$$

$$\mathbf{P}^0 := \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{F}^0}, \quad \tilde{\mathbf{P}} := \langle \mathbf{P}^0 \rangle, \quad \tilde{\rho} := \langle \rho \rangle \quad (9)$$

により定義した。また、このとき、代表体積要素内の全変形に起因する実変位 w は、式(8)より一様変形に起因する成分と周期成分 u^1 の和として

$$w(X, Y) = \nabla_X u^0(X) \cdot Y + u^1(X, Y) \quad (10)$$

により与えられる⁽⁴⁾。

3. 線形化と解析アルゴリズム

微視、巨視スケール釣合式(5), (6)のような非線形方程式を解く場合、何らかの線形化を行う必要がある。微視スケール問題の線形化を考えれば

$$\begin{aligned} g(P^0, \eta^1, \Delta u^1) &:= \\ g(P^0, \eta^1) + Dg(P^0, \eta^1) \cdot \Delta u^1 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここに、 $D\bullet \cdot \Delta\phi$ は $\bullet$ の ϕ に関する方向微分を表し、 $Dg \cdot \Delta u^1$ の具体形は

$$\begin{aligned} Dg(P^0, \eta^1) \cdot \Delta u^1 &= \left\langle \nabla_Y \eta^1 : \left\{ \frac{\partial P^0}{\partial F^0} : (DF^0 \cdot \Delta u^1) \right\} \right\rangle \\ &= \langle \nabla_Y \eta^1 : \mathcal{A} : \nabla_Y (\Delta u^1) \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

である。ここに、 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} := \frac{\partial P^0}{\partial F^0} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial F^0 \partial F^0} \quad (13)$$

により定義される材料の接線係数テンソルである。同様に、巨視スケール問題における線形化釣合式は

$$\begin{aligned} G(\tilde{P}, \eta^0, \Delta u^0) &:= \\ G(\tilde{P}, \eta^0) + DG(\tilde{P}, \eta^0) \cdot \Delta u^0 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで、 $DG \cdot \Delta u^0$ は

$$\begin{aligned} DG(\tilde{P}, \eta^0) \cdot \Delta u^0 &= \int_{\Omega} \nabla_X \eta^0 : \left\{ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial F^0} : (DF^0 \cdot \Delta u^0) \right\} dv \\ &= \int_{\Omega} \nabla_X \eta^0 : \left\{ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial F^0} : (DF^0 \cdot \Delta u^0) \right\} dv \end{aligned} \quad (15)$$

であるが、 u^1 を $\tilde{H} := \nabla_X u^0$ の関数と考えると $DF^0 \cdot \Delta u^0$ は

$$DF^0 \cdot \Delta u^0 = \left\{ I + \nabla_Y \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{H}} \right\} : \Delta \tilde{H} \quad (16)$$

となる。ここに、 I は4階の単位テンソル、 $\Delta \tilde{H}$ は $\Delta \tilde{H} := \nabla_X (\Delta u^0)$ と定義した。線形均質化法の類推から、微視変位 u^1 の平均変位勾配 $\tilde{H}$ に関する勾配であるという意味で、特性変位関数 χ を

$$\chi := -\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{H}} \quad (17)$$

により定義する。すると、式(16)は

$$DF^0 \cdot \Delta u^0 = (I - \nabla_Y \chi) : \Delta \tilde{H} \quad (18)$$

Fig. 2 Algorithm of nonlinear multi-scale analysis.

となり、さらに式(15)は

$$\begin{aligned} DG(\tilde{P}, \eta^0) \cdot \Delta u^0 &= \int_{\Omega} \nabla_X \eta^0 : \mathcal{A}^H : \nabla_X (\Delta u^0) dv \end{aligned} \quad (19)$$

と表される。ここに、 $\mathcal{A}^H$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^H &:= \left\langle \frac{\partial P^0}{\partial F^0} : (I - \nabla_Y \chi) \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{A} : (I - \nabla_Y \chi) \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

により定義される均質化接線係数テンソルである。

微視変位 u^1 は、前述の定式化において平均変位勾配 $\tilde{H}$ の陽な関数としては表れないが、式(5)で規定される微視スケール問題 $g(P^0(\tilde{H}, u^1), \eta^1) = 0$ は与えられた平均変位勾配に対する微視応答を求めるための関係である。実際に、線形化微視スケール問題(11)は式(12), (16)を用いて

$$\langle \nabla_Y \eta^1 : \mathcal{A} : (I - \nabla_Y \chi) \rangle = 0 \quad (21)$$

と表せ、上式より特性変位関数を求めることができる。次に、解析アルゴリズムを図2に図示し、以下に解説する。

1. 巨視問題における荷重ステップを更新し、荷重増分を不釣合力とする。
2. 線形微視構造解析 (tangential homogenization): 巨視モデルでの各物性評価点 (Gauss 点) において、線形化微視問題(21)により、特性関数 χ を求め、均質化接線係数 $\mathcal{A}^H$ を求める。
3. 得られた $\mathcal{A}^H$ を用いて線形化巨視問題(14)を解き、巨視増分変位 Δu^0 を求める。
4. 非線形微視構造解析: 求めた Δu^0 から、 $\nabla_X (\Delta u^0)$ を増分荷重として、非線形微視問題(5)を解く。まず、荷重増分を不釣合力とする。
 - (a) 線形化微視釣合式(11)により、不釣合力に対応する微視変位増分 Δu^1 を求め、微視変位 u^1 を更新する。

- (b) 更新された微視変位 u^1 により, 微視問題での不釣合力を求める. このとき, 収束判定を満たさなければ, (a)に戻り, 収束判定を満たすまで繰り返し計算を行う.
- (c) 収束判定を満たした後の自己釣合状態において, 巨視(平均)応力を求める.
5. 得られた巨視応力により, 巨視問題での不釣合力を求める. このとき, 収束判定を満たさなければ, 2に戻り, 収束判定を満たすまで繰り返し計算を行う.
6. 収束判定を満たした場合, 荷重ステップが所定の荷重となるまで, 1に戻り繰り返し計算を行う.
- このように, 巨視構造解析の1回の反復過程で, 全ての物性評価点ごとに1回の線形微視構造解析および1回の非線形微視構造解析が必要となる.

4. 骨組要素による微視構造解析

均質化法の定式化より, 元の問題は巨視, 微視の両スケールの問題に分割されるが, 微視構造である代表体積要素において物理的に意味のある変形はあくまでも両スケールの変形の和として表される. このため, 粒状体や薄肉要素のように要素内の一部の変形が拘束されるモデルを微視モデルに用いる場合, 実際の物理現象との矛盾が生じることが報告されていた⁽⁹⁾. この問題に対し, 著者らの文献⁽¹⁰⁾では, いわゆる周期微視変位 u^1 ではなく, 微視, 巨視両変形に起因する代表体積要素の実変位 w を微視問題の定式化および解析に用いることで, 線形微視問題に任意の変位場を導入できることが示された. さらに, 著者ら⁽¹¹⁾は, 非線形微視構造解析に対して, 骨組要素の変位場を適用した. 本節では, それらの概要と非線形マルチスケール解析における注意点を述べる.

4.1 骨組の変位場の導入 本論文では, 巨視問題に関しては, 何ら制限を設けない大変形理論を採用する. 一方, 微視問題に関しては, 微視構造が細長い部材から構成されるという幾何学的特徴から, 文献⁽¹¹⁾に従い有限変位, 微小ひずみ問題に限定し, 極分解の定理⁽¹³⁾に基づく剛体変位除去の手法⁽¹⁴⁾により骨組要素での離散化を行う. さらに, ここでは図3に示す Bernoulli-Euler のはり理論に基づく変位場を用いるが, Timoshenko はり理論の変位場も適用可能であり, 問題によって適宜選択することが可能である.

全体系を規定する単位直交基底ベクトルの組 e_I を図3に示すように定義する. はり断面と共に移動する単位直交基底ベクトルの組 $\bar{e}_i$ を同図のように定義する. すると, はり断面の任意点の変位 w^a ははりの軸

Fig. 3 Kinematic field of frame elements.

Fig. 4 Characteristic function of a regular hexagonal cell for a solid element.

線上の点の変位 w および軸線の回転により

$$w^a(Y) = w(Y_1) + Y_2(\bar{e}_2 - \bar{e}_2^0) \quad (22)$$

と表される. ここに, $\bar{e}_i^0$ は初期配置での基底ベクトル, $\bar{e}_i$ は現配置での基底ベクトルである.

剛体回転除去の手法に従い, 要素と共に移動する局所座標系を規定する単位直交基底ベクトルの組 $\bar{e}_i^s$ を定義すれば, 局所座標系での断面の微小回転角 $\bar{\theta}$ は

$$\bar{\theta} \simeq \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2^s \quad (23)$$

と表される. 本論文では, 2節点はり要素を用い, 局所座標系は2節点を通る直線上に $\bar{e}_1^s$ を設定するいわゆる割線座標系を採用する.

4.2 実変位による微視問題の記述 図4は連続体ソリッド要素による正六角形セルの単位の巨視鉛直ひずみに対する特性変位関数 χ であるが, 通常の骨組構造では起こり得ない軸直角方向の変形(膨張)が生じている. しかし, 骨組要素では式(22)に示した変位場により軸直角方向の変形が完全に拘束されているため, 特性変位関数に骨組要素を用いても正しい結果を得られないことが報告されている⁽⁹⁾. 著者らの文献⁽¹⁰⁾では, 特性変位関数と巨視スケールの一様変形に対応する

る微視変位を合計した変位を、(微視スケールの)実変位と定義し、これを用いることにより前述の問題を解決した。本節では、非線形微視スケール問題を実変位により定式化し、その具体的解析法を説明する。

実変位 w を微視スケール問題の自由度とすれば、線形化微視スケール釣合式(11)は

$$\langle \nabla_Y \eta^1 : \mathcal{A} : \nabla_Y (\Delta w) \rangle = -g(P^0, \eta^1) \quad (24)$$

と表される。このとき、 u^1 に関する Y 周期性

$$u^1(Y + r_i) - u^1(Y) = 0$$

と等価な実変位 w に対する周期境界条件は

$$w(Y + r_i) - w(Y) = \{ \nabla_x u^0 \} \cdot r_i \quad (25)$$

により表される。ここに、 r_i ($i = 1, 2, 3$) は微視構造の周期長さを表す基本並進ベクトルである。実変位 w に対する周期境界条件式(25)は文字通り実変位 w を解析の自由度とした場合に必要な周期境界条件であり、構造要素のみに有効な関係ではない。ただし、構造要素を用いた場合には、前述の変位場の問題から、全変位を用いるのが妥当であり、必然的に式(25)を用いることになるというのが著者らの主張である。また、構造要素では自由度に回転を含むが、回転自由度 θ に関する周期境界条件は

$$\theta(Y + r_i) - \theta(Y) = 0$$

で与えられる。

以下、非線形微視構造解析における巨視変形を増加させた後の最初の繰り返し計算、もしくは均質化接線係数を得るための線形計算を考える。周期境界を考慮せずに式(24)を離散化すると

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{io} & K_{id} \\ K_{oi} & K_{oo} & K_{od} \\ K_{di} & K_{do} & K_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_o \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ 0 \\ t_d \end{pmatrix} \quad (26)$$

となる。ここに、 w などの下付の添字はそれぞれ

i: 微視スケール Y の原点が属する境界上の節点

o: 境界上にない通常の節点

d: i を r_i だけ並進させた点にある境界上の節点を意味し、また、 t は本来、無限周期構造である代表体積要素を周期境界として切り出すことに対する形式的な節点力であり、ここでは未定である。ここで、 w における u^1 の Y 周期性を表す式(25)を離散系で

$$d = w_d - w_i \quad (27)$$

Fig. 5 Multi-scale analysis model for uniform tension.

と表せば、線形化微視離散釣合式(26)は

$$\begin{pmatrix} K_a & K_{io} + K_{do} \\ K_{oi} + K_{od} & K_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_o \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (K_{id} + K_{dd}) \cdot d \\ K_{od} \cdot d \end{pmatrix} \quad (28)$$

となり、 w について解くことができるようになる。ここに、 $K_a = K_{ii} + K_{id} + K_{di} + K_{dd}$ である。上式により求められた w から節点力 t が得られる。

本論文で対象としている Bernoulli-Euler はり要素などのせん断変形が拘束されるようなモデルでは、せん断および軸直角方向のひずみは常にゼロであるが、せん断力はゼロとはならないため、平均応力の算出には注意が必要である。そこで、骨組により離散化された微視自己釣合問題から平均応力を求める場合、平均応力を表面力の面積分により表しておく为好都合である⁽¹⁰⁾。ここでも微小ひずみ問題と同様に、有限ひずみ問題における各種応力の平均を表面力により表しておく。例えば、平均第1 Piola-Kirchhoff 応力 $\bar{P}$ は

$$\begin{aligned} \bar{P} = \langle P^0 \rangle &= \langle \{ \nabla_Y \cdot (P^0 \otimes Y) \}^T \rangle \\ &= \int_{\partial Y} \{ N \cdot (P^0 \otimes Y) \}^T ds \\ &= \int_{\partial Y} Y \otimes t ds \end{aligned} \quad (29)$$

となる。式(29)に基づいた平均応力の算定では、微視領域の境界面での表面力が既知であればよいので、前述の変位場を用いたモデルにおいても不都合なく適用することができる。

5. 非線形マルチスケール解析例

5.1 一様引張を受けるセル構造体における有限要素解析との比較 本節では、図5(a)に示す正六角形セルからなるセル構造体を解析対象として、本論文で構築したマルチスケール解析と通常の有限要素解析との比較を行う。本例題の主な目的は、一軸引張という単

Fig. 6 FE analysis model for uniform tension.

Fig. 7 Deformation by uniform tension.

純な変形状態において、セル数を増加させた有限要素解析結果が本マルチスケール解析結果に漸近するという理論から予想される事実を実際に確認することである。解析対象の幅 W と高さ H の比は $W/H = 0.66$ であり、正六角形セルのセル壁の1辺の長さ l に対する厚さ h の比 h/l は $h/l = 0.11$ とした。また、セル壁を構成する材料は Young 率 E_s の線形弾性体とした。

マルチスケール解析においては、解析対象を図5(b)に示す巨視構造および図5(c)に実線で示す微視構造にモデル化した。このとき、巨視構造は24要素の4節点4辺形要素で離散化し、微視構造はセル壁1辺を8要素として24要素の骨組要素により離散化した。本論文では微視構造の座屈を考慮していないため、以下の例題の微視構造において大変位が生じないため、1辺当たりの要素分割は8で十分であると判断した。また、巨視構造の離散化に用いた4辺形要素の Gauss 点は4点としている。一様変形では巨視構造の要素分割は解析結果に大きな影響を及ぼさないため、巨視構造の要素分割等の議論は、次の例題において述べる。境界条件は、巨視構造の下端部においては左隅を鉛直、水平方向固定、他は鉛直方向のみ拘束し、上端に鉛直上向きの一様変位を与えた。これに対し、図6に示す3種類の通常の有限要素モデルによる解析を比較のために行なった。ここに、FEMa, b, cはそれぞれ100, 200, 320個の正六角形セルを有し、要素分割数は2340, 4556, 7508である。

図7に上端の鉛直変位 v を解析対象の高さ H で無次

Fig. 8 Load-displacement relationship for uniform tension.

元化した無次元化変位 v/H が $v/H = 0.2$ のときの巨視構造と FEMb の変形を示す。この変形図からマルチスケール法と有限要素法による変形に定性的な相違は認められず、両者とも Poisson 比がほぼ1となる正六角形セル構造体の特徴を表している。

次に、図8に荷重-変位関係を示す。同図において、横軸は上端の無次元化鉛直方向変位 v/H 、縦軸は上端に作用する荷重の総和 f を巨視構造の幅 W とセル壁の Young 率 E_s により無次元化した無次元化荷重 f/WE_s である。この結果から、いずれの解析結果においても、変形の初期段階ではセル壁の曲げにより、変形が大きくなるにつれセル壁の軸剛性により外力に抵抗するセル構造体の特徴が確認できる。さらに、本マルチスケール解析結果は、有限要素法による結果と定量的にも大きな差はないと言える。また、図8の右下に示した荷重-変位関係の拡大図より、有限要素法による解析結果は、モデルのセル数が増加するほどマルチスケール解析結果に近づくことが分かる。このことは、均質化法において微視構造の大きさを無限小、すなわち単位周期構造の数を無限大とする仮定と整合する。

ここで、マルチスケール解析と通常の有限要素解析の計算コストに関して考察する。マルチスケール解析では、巨視構造が35節点70自由度であり、さらに各物性評価点には24節点72自由度の微視構造が存在する。巨視構造の物性評価点は1要素当たり4点とすれば、微視構造の総数は $24(\text{要素}) \times 4(\text{Gauss 点}) = 96$ 個である。以上から、両スケールでの総自由度数は2374となる。一方、有限要素モデルにおける全自由度数は、FEMaで7020, FEMcで22524である。連立方程式の求解に必要な計算量は、直接法で自由度の3乗、反復法では必要な計算量を事前に見積もることは簡単ではないが、自由度数の2乗を下回ることはない。いま、連立方程式の求解に自由度数の2乗の演算が必要であると仮定す

(a) macroscopic structure (b) microscopic structure

Fig. 9 Multi-scale analysis model for nonuniform deformation.

Fig. 10 Deformation and J_2 strain distribution at $u/W = 0.25$.

ると、マルチスケール、FEMa, FEMcに必要な計算量の比は $70^2 + 96 \times 72^2 : 7020^2 : 22524^2 = 1 : 99 : 1010$ となる。ただし、この考察はあくまで本例題に限ってのことであり、通常のFEMとマルチスケール法において等価な精度を保証する要素分割は自明ではないこと、係数行列のスパース性を利用した場合や、非線形計算に必要な繰り返し過程など、計算効率を左右する要因は多々あるため、今後、更なる検討の必要があると考える。

5.2 非一様変形を受けるセル構造体の解析 前節と同様の解析対象に対し、図9に示すように下端部においては左隅を鉛直、水平方向固定他は鉛直方向についてのみ拘束し、上端部の左隅に水平方向右向きの変位を与えることで曲げ変形を与え、非一様な変形を受けるセル構造体の解析を行う。

ここで、巨視構造の左上端部の水平変位 u を解析対象の幅 W で無次元化した無次元化変位 u/W が 0.25 となったときの巨視構造の変形を図10に示す。図中の濃淡はGreenひずみ E の第2不変量分布を表す。また、無次元化変位 u/W が 0.15 および 0.25 における図10に記した巨視構造の Gauss 点 I, II, III において局所化により得られる微視構造の変形をそれぞれ図11, 図12に示す。これらの図より、Gauss 点 I は、片持ちりの先端における剛体回転に加え、付近の水平荷重の影

Fig. 11 Deformation of microstructure at $u/W = 0.15$. Fig. 12 Deformation of microstructure at $u/W = 0.25$.

響を受け水平方向に圧縮されている様子が分かる。一方、Gauss 点 II は、荷重の载荷点よりほど遠いため、剛体回転のみを呈している。また、Gauss 点 III においては、せん断変形に加え、曲げ変形のための鉛直方向の圧縮、これに伴う Poisson 比の影響による水平方向の伸び変形を呈している。

ここで、巨視構造の要素分割と Gauss 点数が解析精度に与える影響を考察するために、上記例題(モデル1)と同じ要素分割で Gauss 点数を4倍にしたモデル2、モデル1の1要素を4分割(1要素当たりの Gauss 点数はモデル1と同じ)したモデル3についてマルチスケール解析を行った。無次元化変位 u/W が 0.15 のときの各モデルの荷重パラメータ f_i (i はモデル番号) の比は $f_2/f_1 = 1.00$, $f_3/f_1 = 0.680$ であった。この結果から、本例題の巨視構造の要素分割は不十分であるものの、Gauss 点数の増加は解析精度にあまり影響がないことが分かる。これは、本例題では微視構造の座屈を考慮していないため、平均物性としての剛性の変化がさほど大きくないためである。さらに、本例題の場合、巨視構造の自由度数が小さいため、計算に要する時間はほぼ微視構造の数、すなわち Gauss 点数に比例する。そのため、モデル2と3の計算時間はほぼ同じである。このように、マルチスケール解析の計算効率は、巨視構造の要素分割数、微視構造の要素分割数、微視構造解析から得られる平均物性の変化の大きさなどの影響を受けると考えられる。

6. 結論

2変数収束論から得られる結果を利用した非線形均質化法の定式化ならびに微視問題に骨組の変位場を導入するための方法の概要を示した。その上で、セル構造体のための新規の非線形マルチスケール解析手法を提案した。加えて、数値解析のための具体的なマルチ

スケール解析アルゴリズムを示した。

本論文で提案したマルチスケール解析の数値例として、正六角形ハニカムを取り上げ、セル構造材料により構成される構造の非線形マルチスケール解析結果を示した。さらに、この結果を通常の有限要素法により陽にモデル化された解析結果と比較し、本手法の妥当性および有効性を確認した。

本研究の成果により、複雑な格子状微視構造を有する構造体に対する非線形解析マルチスケール解析の実用性が示された。ただし、マルチスケール解析の計算効率については、さらに検討が必要がある。

謝辞: この研究は文部省(現文部科学省)科学研究費補助金奨励研究(A)(課題番号 12750416 平成12, 13年度)の補助を得た。

文 献

- (1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F., *Cellular solids 2nd ed.*, (1997), Cambridge University Press.
- (2) Nemat-Nasser, S. and Hori, M., *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials 2nd edition*, (1993), North-Holland.
- (3) Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicolaou, G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, (1978), North-Holland.
- (4) Terada, K. and Kikuchi, N., A class of general algorithm for nonlinear multi-scale analyses for heterogeneous media, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **190** (2001), 5427-5464.
- (5) 大野信忠・奥村 大・野口裕久, 有限変形の均質化理論に基づくセル状固体の微視的対称分岐解析(第1報, 理論), 日本機械学会論文集(A編), **67**-656, (2001), 618-214.
- (6) Ohno, N., Okumura, D. and Noguchi, H., Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation, *J. Mech. Phys. Solids*, **50** (2002), 1125-1153.
- (7) 斉木 功・寺田賢二郎・池田清宏, セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察, 土木学会応用力学論文集, **2** (1999), 287-294.
- (8) Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori, M., Appropriate number of unit cells in a representative volume element for microstructural bifurcation encountered in a multi-scale modeling, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **191** (2002), 2561-2585.
- (9) 大植 健・斉木 功・中島章典・寺田賢二郎, 骨組要素を用いたセル構造体のマルチスケールモデリング, 土木学会応用力学論文集, **3** (2000), 185-192.
- (10) 斉木 功・大植 健・寺田賢二郎・中島章典, 構造要素を用いた微視モデルによるマルチスケールモデリングとそのセル構造体への適用, 日本計算工学会論文集, **4** (2002), 139-144.
- (11) 大植 健・斉木 功・寺田賢二郎・中島章典, 骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング, 土木学会論文集, **724/I-62** (2003), 249-256.
- (12) Allaire, G., Mathematical approaches and methods, in: Hornung, U. ed., *Homogenization and Porous Media*, (1996), 225-250, Springer.
- (13) Malvern, L., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, (1969), Prentice-Hall.
- (14) Iwakuma, T., Hasegawa, A., Nishino, F. and Kuranishi, S., Principle and numerical check of a stiffness equation for plane frames, *Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng.*, **4** (1987), 73s-83s.