円弧断面帯板の単純曲げにおける座屈後挙動*
(第 1 報, エネルギー法による近似変形解析)井 関 日 出 男^{*1}Post-Buckling Behavior in Pure Bending of Thin Strips
with Arc Cross Section
(1st Report, Approximate Deformation Analysis Using Energy Method)Hideo ISEKI^{*2}^{*2} Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

A service cable with flat wires and an woven tube for an sensor of the sliding door was under consideration using the post-buckling behavior in pure bending of thin strips with arc cross section in order to keep quiet and to miniaturize the service system. The post-buckling deformation model was proposed and the post-buckling deformations of the flexible structure were approximately analyzed using the strain energy method for an infinitesimal strain problem of large deformation. The stability of the post-buckling was discussed checking the second variation of the total potential energy. The theoretical predictions were compared with experimental results about the relationship between the radius of curvature under post-buckling and the radius of circular arc and the pure bending moments of the barrel-shape and the saddle-shape deformations, and the correspondence was found to be acceptable.

Key Words: Bending, Buckling, Flexible Structure, Energy Method, Stability

1. 緒 言

移動する物体に取付けたモータ, ヒータ, ライトやセンサなどに電力を供給する方法として, パンタグラフ, カールコード, フラットケーブルやチェーン方式のケーブルベアなどがある。またフラットケーブルやチューブを円弧断面を持つ帯板(コンベックス)の折り曲げ座屈形状で補強する方法⁽¹⁾も考案されている。最近, このようなエネルギー供給法も高速化, 小型化もしくは大型化, 耐久性や静粛性などが要求されている。スティール製巻尺のような曲線断面を持つ帯板の折り曲げ座屈形状は座屈平行移動や静粛性に優れており(図 1 参照), 引き戸式自動ドアに取付けられたセンサへの給電ケーブルとして期待されている。しかし座屈後形状を利用した柔軟構造物やその変形挙動についての研究は少ない。Funk⁽²⁾が円弧断面帯板の折り曲げ座屈後変形において, 半円筒状の折り曲げ部分のひずみエネルギー関数が極小になると仮定し, 半円筒部半径が帯板の円弧半径に等しくなることを導いてい

る。しかし半円筒部以外の円弧帯板の形状や機械的性質が半円筒部の半径に及ぼす影響については検討されていない。Wuest⁽³⁾は円筒殻理論を用いて円弧断面帯板の単純曲げにおける屈服変形を解析しているが座屈や座屈後変形については言及していない。

したがって, 給電ケーブルの試作の際に用いる形状や寸法などの概略値を見通し良く見積もることのできる近似変形解析は必要であり, また実物試験や数値シミュレーションにおいても有用である。本報では, 単純曲げ方式の給電ケーブルを考案し, 円弧断面帯板の折り曲げ座屈後の変形モデルを提案し, エネルギー法による近似変形解析と単純曲げ実験を行い, その変形特性を考察した。

2. 理 論

2-1 単純曲げ方式の給電ケーブルと座屈後の変形モデル 図 1(a)に示すように, 円弧断面帯板は折り曲げ座屈域で部分円筒状になり, 端部を移動させるとその曲率半径がほぼ一定の状態では座屈域が移動する。この柔軟機構に着目し, ケーブルを円弧帯板に接着するか, ひもで留めたりしてタイプライタなどで使用されていたが, 耐久性に問題があった。図 1(b)に示すようにフラットケーブルを織物のチューブで帯板

* 原稿受付 2002 年 4 月 24 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院理工学研究科(〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

E-mail: isekih@mech.titech.ac.jp

に抱き留める構造にすると給電ケーブルの耐久性が格段に向上することが井関、林田によって実証され⁽⁴⁾、引き戸式自動ドアなどへの適用が検討されている。これは骨、血管、皮膚からなる動物の関節構造を模造しており、生体工学的にも興味ある問題となっている。

しかしながら、図1(c)のストローク S が変化すると座屈形状や端部の支持力が変動し、また重いケーブルやパイプを支えるために帯板の剛性を大きくすると端部に作用する支持力も大きくなるなどの問題がある。そこで、座屈形状が維持され、端部の支持力をなくすために端部に曲げモーメントのみが作用する単純曲げ方式の給電ケーブルを考案し、その概略を図2に示す。その円弧断面帯板の座屈後変形を対象とした単純曲げ変形モデルを図3に提示する。すなわち図3は円弧の平均半径 r 、中心角 ϕ 、板厚 t 、長さ L の円弧断面帯板が折り曲げ座屈して、固定及び移動端部に外力モーメント M_0 を受けている状態を示す。座屈部の変形経路は屈服変形による降状を避けるために幅方向に曲率変化 $-1/r$ の単純曲げによって平板になり、さらに長手方向に曲率変化 $1/R$ の単純曲げによって部分円筒状になっているものとする。座屈していない領域の断面の図心を通る曲率半径を R_1 とし、また各円弧の中心角をそれぞれ θ 、 θ_1 、 θ_2 とする。挿入図は部分

(c) Schematic view

Fig. 1 A service cable using the post-buckling deformation of convex steel strips under bending, (a) Buckling deformation of convex steel tape, (b) Service cable with flat wire and woven tube

Fig. 2 A proposed service cable using the post-buckling deformation of convex steel strip under pure bending

円筒の座屈域の断面であり、半径 r 、中心角 ϕ 、板厚 t であった円弧断面帯板が座屈後において、幅 $b(=r\phi)$ 、板厚 t の長方形になっていることを示す。

2.2 座屈後変形における全ポテンシャルエネルギー

円弧断面帯板の座屈後状態において、曲げモーメント M_0 によって単純曲げを受ける座屈後変形の全ポテンシャルエネルギー Π は円筒部と円弧断面部への接続部の影響は小さいとして板とはりの曲げ理論から求めると次のように表せる。

$$\Pi = U_\phi + U_1 + U_2 + W \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 U_ϕ は曲率 $1/r$ の円弧帯板が長手方向の曲率変化 $1/R$ (樽形変形、同方向曲率)、円弧幅方向の曲率変化 $-1/r$ の曲げを受けるときの部分円筒部における曲げひずみエネルギーであり、次式で表される。

$$U_\phi = (D/2) \{ (1/R)^2 - [2\nu/(Rr)] + (1/r^2) \} R\theta b \\ = \{ EI/[2(1-\nu^2)] \} [(R/r^2) + (1/R) - (2\nu/r)] \theta \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 D および I はそれぞれ薄板の曲げ剛性と円筒部の長方形断面における断面二次モーメントである。ヤング率およびポアソン比をそれぞれ E および ν とし、 $b=r\phi$ として、それらは次のように表せる。

$$D = Et^3/[12(1-\nu^2)] \dots \dots \dots (3)$$

$$I = bt^3/12 \dots \dots \dots (4)$$

U_1 および U_2 は各円弧におけるはりの単純曲げ理論によるひずみエネルギーであり、それらは次のようになる。

$$U_1 = (EI_1/2) R_1 \theta_1 / R_1^2 = (EI_1/2) \theta_1 / R_1 \dots \dots (5)$$

$$U_2 = (EI_1/2) R_1 \theta_2 / R_1^2 = (EI_1/2) \theta_2 / R_1 \dots \dots (6)$$

ここで、 I_1 は円弧断面の図心における断面二次モーメントであり、 $r_2=r+t/2$ 、 $r_1=r-t/2$ として、次式から算出できる。

$$I_1 = (1/8)(r_2^4 - r_1^4)(\phi + \sin \phi)$$

Fig. 3 A proposed post-buckling deformation model of convex strip under pure bending

$$-(8/9)[(r_2^3 - r_1^3)^2 / (r_2^2 - r_1^2)] [\sin(\phi/2)]^2 / \phi \quad \dots\dots\dots (7)$$

W は外力によるポテンシャルであり, 端部に作用する曲げモーメント M_o と回転角 θ を用いて次のように表される.

$$W = -M_o \theta \quad \dots\dots\dots (8)$$

回転角 θ は幾何学的な関係から各円弧の中心角の総和となる.

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(2), (5), (6)および式(8)を式(1)に代入すると Π は次のように表せる.

$$\begin{aligned} \Pi = & \{EI/[2(1-\nu^2)]\}[(R/r^2) + (1/R) - (2\nu/r)]\theta \\ & + (EI/2)(\theta_1 + \theta_2)/R_1 - M_o(\theta + \theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

一方, 本論文では近似解析解を得るために部分円筒域の幅方向の自由端部における境界条件を無視し, 長手方向のモーメントの接続条件のみを考慮して, 次式を得る.

$$EI_1/R_1 = [EI/(1-\nu^2)][(1/R) - (\nu/r)] \quad \dots\dots\dots (11)$$

また, はりの中立面(伸びなし面)の条件から, 円弧帯板の全長を L として, 次の関係が成立する.

$$R\theta + R_1\theta_1 + R_1\theta_2 = L \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(11), (12)を用い, 式(10)から $R_1, (\theta_1 + \theta_2)$ を消去して, 次式を得る.

$$\Pi = \{EI/[2(1-\nu^2)]\}[(R/r^2) + (1/R) - (2\nu/r)]\theta$$

Fig. 4 Relationship between the ratio of second moment of area β and central angle ϕ

$$\begin{aligned} & + \{EI/[2(1-\nu^2)]\}\beta[(1/R) - (\nu/r)]^2(L - R\theta) \\ & - M_o\{\theta + \beta[(1/R) - (\nu/r)](L - R\theta)/(1-\nu^2)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで, β は断面二次モーメント I と I_1 の比であり, 円弧半径 r , 中心角 ϕ および板厚 t の関係である.

$$\beta(r, \phi, t) = I/I_1 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$r = 20$ mm の場合の β と ϕ の関係を板厚 t をパラメータとして図4に示す.

2.3 エネルギー法による座屈後変形解析 全ポテンシャルエネルギー Π の停留原理⁽⁵⁾により, 座屈後変形の平衡点において, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} \partial\Pi/\partial R = & \{EI/[2(1-\nu^2)]\}[(1/r^2) - (1/R^2)]\theta + \{EI/[2(1-\nu^2)]\}\beta[(1/R) - (\nu/r)] \\ & \times \{(-2L/R^2) + [(1/R) + (\nu/r)]\theta\} - M_o\beta[(\nu/r)\theta - (L/R^2)]/(1-\nu^2) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned} \partial\Pi/\partial\theta = & \{EI/[2(1-\nu^2)]\}[(R/r^2) + (1/R) - (2\nu/r)] + \{EI/[2(1-\nu^2)]\}\beta(-R)[(1/R) - (\nu/r)]^2 \\ & - M_o\{1 + \beta(-R)[(1/R) - (\nu/r)]/(1-\nu^2)\} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

[式(15)の第2式] $\times R$ - [式(16)の第2式] $\times \theta = 0$ の関係から, 次式を得る.

$$\{[1 - \beta/(1-\nu^2)]\}\theta + \{\beta/(1-\nu^2)\}(L/R)\{M_o - [EI/(1-\nu^2)][(1/R) - (\nu/r)]\} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

上式の前括弧は零でないので, 式(11)に適合する単純曲げの外力モーメント M_o が得られる.

$$M_o = [EI/(1-\nu^2)][(1/R) - (\nu/r)] \quad \dots\dots\dots (18)$$

このモーメント M_o を式(16)に代入すると次の関係が得られる.

$$\{[1 + \beta\nu^2/(1-\nu^2)]\}R^2 - [2\beta\nu/(1-\nu^2)]rR + \{[\beta/(1-\nu^2)] - 1\}r^2 \times \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

部分円筒部の中心角 θ は零とならないので, R についての二次方程式が得られる.

$$\{1 + \beta\nu^2/(1-\nu^2)\}R^2 - [2\beta\nu/(1-\nu^2)]rR + \{[\beta/(1-\nu^2)] - 1\}r^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

解を求めると次のようになる.

$$R = \{[\nu\beta \pm (1-\nu^2)(1-\beta)^{1/2}]/[1-\nu^2 + \beta\nu^2]\} \times r \quad \dots\dots\dots (21)$$

樽形変形すなわち $1/r > 0, 1/R > 0$ を満足する部分円筒の半径 R は, $(1-\nu^2) \leq \beta \leq 1$ のとき, 正符号の半径 R^+ と負符号の半径 R^- の二とおり存在する. β の定義域に対する負符号半径 R^- の値域は次のようになり, 軟鋼などの実験で得られる弾性座屈半径 $R(=r)$ よりもかなり小さい.

$$0 \leq R^- \leq \nu r \quad \dots\dots\dots (22)$$

一方, 式(21)および式(18)から曲げ半径および曲げモーメントについての大小関係が容易に得られる.

$$R^+ \geq R^-, \quad M_o(R^+) \leq M_o(R^-) \quad \dots\dots\dots (23)$$

これらの関係は物理的にも妥当であり、また実験においても明りょうな半径 R を確認できておらず、座屈後においても小さい外力モーメントによる変形が優先するものと考え、正符号の半径を採用した。

$$R = \{[\nu\beta + (1-\nu^2)(1-\beta)^{1/2}]/[1-\nu^2 + \beta\nu^2]\} \times r \quad (24)$$

半径 R はポアソン比 ν および断面二次モーメント比 $\beta (=I/I_1)$ すなわち円弧帯板の半径 r 、中心角 ϕ および板厚 t の影響を受けるが、任意の中心角 θ に対し一定になる。また式(18)、(24)における R に一符号を付ければ、鞍形変形(異方向曲率)の場合の曲げモーメントと曲率半径になる。樽形曲げと鞍形曲げの座屈後変形における曲げモーメントは異なるが、曲率半径 R は等しくなる。

R_1 は式(11)から次のようになり、 R_1 も一定になる。

$$R_1 = (1-\nu^2)(r/\beta)/[(r/R)-\nu] \quad (25)$$

これは円弧帯板を、座屈後変形の開始時 ($\theta=0$, $\Theta=0$) から現在 (θ , Θ) まで、一定のモーメント M_0 で折り曲げることができることを意味する。

θ と $(\theta_1+\theta_2)$ は式(9)と(12)から次のようになる。

$$\theta = (R_1\Theta - L)/(R_1 - R) \quad (26)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = (L - R\Theta)/(R_1 - R) \quad (27)$$

R_1 は式(25)の関係から一定であり、移動端部の回転角 Θ が一定であれば、 θ と $(\theta_1+\theta_2)$ は一定になる。これは回転角 Θ を一定に保持しながら端部を移動させると一定の曲率半径 R と中心角 θ となる座屈域が伝ばすることを意味する。

2・4 座屈後変形の安定性 全ポテンシャルエネルギー Π の第二変分の符号を調べれば、座屈後変形の安定性を判別できる⁽⁶⁾。式(15)の第1式を θ で偏微分してから式(18)の関係を代入し、さらに式(20)の関係を考慮して次式を得る。

$$\begin{aligned} \partial^2 \Pi / \partial R \partial \theta &= \{EI/[2(1-\nu^2)]\}[(1/r^2)-(1/R^2)] + \{EI/[2(1-\nu^2)]\}\beta[(1/R)^2-(\nu/r)^2] - M_0\beta(\nu/r)/(1-\nu^2) \\ &= \{EI/[2(1-\nu^2)r^2R^2]\} \{[1+\beta\nu^2/(1-\nu^2)]R^2 - [2\beta\nu/(1-\nu^2)]rR + [\beta/(1-\nu^2)]r^2\} = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

式(16)の第1式を θ で偏微分して、次式を得る。

$$\partial^2 \Pi / \partial \theta^2 = 0 \quad (29)$$

第二変分 $\partial^2 \Pi$ の符号は次の判別式 Δ の符号と同値である。式(28)、(29)の関係から、

$$\begin{aligned} \Delta &= (\partial^2 \Pi / \partial R \partial \theta)^2 - (\partial^2 \Pi / \partial R^2)(\partial^2 \Pi / \partial \theta^2) \\ &= (0)^2 - (\partial^2 \Pi / \partial R^2)(0) = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

となり、中立的な平衡状態になっている。これは中心角 θ (または回転角 Θ) が変化する端部の移動や中心角 θ (または回転角 Θ) が一定の端部の移動によっても全ポテンシャルエネルギーが一定であることを示し、この系へのエネルギーの出入りがないことである。すなわち端部の移動によって座屈域が伝ばしても外力エネルギーを必要としないことを意味し、移動体の案内面での摩擦損失はあるが給電ケーブルとして好ましい特性である。

3. 実験

3・1 試験片の形状 実験に使用したばね鋼製の円弧帯板の形状(曲率半径 r 、中心角 ϕ 、板厚 t 、板幅 b)を表1に示す。断面形状をスタンプインクで紙の上に転写し、デバイダと分度器を用いて曲率半径 r と中心角 ϕ を測定した。板幅 b は折り曲げ座屈後の部分円筒部から測定したもので、 $b=r\phi$ の関係にある。

3・2 大変形単純曲げ試験法 はりや板の単純曲げ試験として四点支持曲げ試験法が多用され、大たわみ変形の場合には支点にコロや円柱面座を用いて長手方向の摩擦力の軽減が計られている。しかしこの方法では薄肉帯板の曲げ変形が半円近くになると単純曲げ状態を維持するのが難しい⁽⁷⁾。そこで重力を利用した薄肉帯板の折り曲げ座屈後変形に適用できる単純曲げ

Table 1 Dimensions of convex steel strips

No.	Radius r mm	Central angle ϕ rad	Thickness t mm	Width b mm
1	68.5	0.74	0.20	50.8
2	59.0	0.86	0.10	50.6
3	32.0	1.25	0.10	40.0
4	28.5	1.75	0.15	50.0
5*	21.0	1.20	0.12	25.0
6	13.0	1.92	0.10	25.1
7	11.0	0.96	0.15	10.2
8*	10.0	0.99	0.12	10.0
9*	10.0	0.99	0.08	10.0

* Stainless steel strips

Fig. 5 Schematic view of a proposed measurement of pure bending moment for the buckled convex steel strip

Fig.6 Relationship between radius of curvature R under post-buckling and radius of circular arc r

試験法を考案し、その概略を図5に示す。円筒部の半径 R は帯板の長さ L_2 よりも十分に小さいとすると長さ (L_1+L_2) の帯板の重さ W_c を算出できる。すなわち座屈後状態で適当な長さ (L_1+L_2) をとり、台秤の荷重 W_{cs} を測定し、長さ (L_1+L_2) の円弧帯板の荷重 $W_{cg} [= \text{比重量} \times (L_1+L_2) \times \text{面積}]$ を算出する。例えば $W_{cg} > W_{cs}$ のときは、 L_1 側の端部を L_2 側に水平に押し L_2 側の端部を座屈させながら、 $W_{cg} = W_{cs} (= W_c)$ となる長さ L_1, L_2 を探索する。円筒部に作用するモーメント M_e は、長さ L_1, L_2 の帯板の重さをそれぞれ W_{c1}, W_{c2} とし、 $L_1 W_{c2} = L_2 W_{c1}$ の関係を考慮して、次のように算出できる。

$$\begin{aligned} M_e &= W_{c1}[(L_1/2) + L_2] + W_{c2}(L_2/2) \\ &\quad - (W_{c1} + W_{c2})L_2 \\ &= (W_{c1} + W_{c2})\{[(L_1+L_2)/2] - L_2\} \\ &= W_c\{[(L_1+L_2)/2] - L_2\} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

特に $L_1 \gg L_2$ の場合には $W_{c1} \gg W_{c2}$ となり、点Cより右側 (L_2 部) の帯板に作用するせん断力の影響は小さくなり、近似的な単純曲げ状態が得られる。

3.3 実験結果および理論値との比較 表1の帯板試験片を用い、図5の単純曲げ試験装置で測定した座屈部の曲率半径 R と帯板の曲率半径 r との関係を図6に示す。曲率半径 R は中心角 θ を $\pi/2$ にしたときの平均半径である。断面二次モーメント比 $\beta \approx 0$ の円弧帯板であり、式(24)の関係式は $R \approx r$ となり、理論値を実線で示す。Funk⁽²⁾ も式(2)の曲げひずみエネルギー U_ϕ において θ を固定し、 U_ϕ が極小になるとして $R=r$ の関係を得ている。これは座屈領域以外は剛体で変形しないとモデル化したものであり、式(14)から得られる $\beta=0$ の関係を式(24)に代入したこ

Table 2 Comparison of experimental and theoretical bending moments

No.	Bending moment M N·mm			
	Barrel-shape		Saddle-shape	
	Experiment	Theory	Experiment	Theory
1	90	80	154	148
2	12	13	26	25
3	17	16	30	30
4	92	80	159	148
5*	24	26	46	48
6	30	26	52	48
7	43	42	72	78
8*	18	22	33	40
9*	5.6	6.3	11	11

* Stainless steel strips

とになっている。式(31)による曲げモーメントの実験値と式(18)の理論値との比較を表2に示す。ばね用鋼板およびステンレス鋼板のヤング率をそれぞれ 210 GPa および 197 GPa とし、ポアソン比を 0.3 として算出した。座屈後変形の近似解析解を得るための単純なモデル化と曲げ試験法であるが、図6と表2における実験値の理論値に対する相対誤差は $\pm 18\%$ 以内に収まっている。その誤差の原因としては、(a)円筒部から円弧帯板への遷移領域(板幅の2~3倍)および幅方向端部の境界条件の影響が考慮されていない、(b)ロール加工や熱処理された薄い円弧状帯板 ($t \approx 0.1$ mm) のヤング率 E とポアソン比 ν の正確な測定が難しい、(c)図5において、遷移領域の影響を受ける曲率半径 R と長さ L_2 の正確な測定と算出が難しい、(d)図5のC支点や固定端において生じる薄い円弧帯板のゆがみ変形の影響を考慮するのが難しい、ことなどが挙げられる。

4. 結 論

(1) 座屈後変形を利用した単純曲げ方式の給電ケーブルと座屈後の単純曲げ変形モデルを提案し、エネルギー法を用いて近似変形解析を行い、設計の際に必要な概略値を迅速に算出できる関係式を導出した。

(2) ポテンシャルエネルギーの停留原理(第一変分)を用いて、樽形と鞍形曲げにおける座屈部半径が円弧帯板半径にほぼ等しくなり、座屈部の中心角は曲げモーメントが一定の状態では任意の値をとることができ、端部はモーメントが一定の状態では移動できることを示した。

(3) ポテンシャルエネルギーの第二変分を用いて座屈後変形が中立の平衡状態であることを導き、端部の移動によって座屈域が伝ばしても外力エネルギーの出入りがなく、給電ケーブルとして好ましい特性であ

ることを示した。

(4) 座屈後変形を対象とした簡易単純曲げ試験法を提案し、軟鋼製の帯板の円弧半径と板厚を変えて実験を行い、座屈部半径と端部の曲げモーメントについての理論値と実験値がおおむね一致することを確認した。

終わりに、本研究は天田金属加工機械技術振興財団、(株) ツーデンおよびサンコースプリング(株)の協力を得ており、感謝の意を表す。

文 献

- (1) 例えば、特開昭 62-19498, 特開昭 63-253813, 特開平 8-

132152, 特開平 8-149651 など。

- (2) Funk, P., *Z. Angew. Math. Mech.*, **14**-4 (1934), 251-252.
 (3) Wuest, W., *Zeit. f. Angew. Math. u. Mech.*, **34**-12 (1954), 444-454.
 (4) 井関日出男, 林田建一, 機講論, No. 99-23 (1999-11), 69-70.
 (5) Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, (1968), 27-28, Pergamon Press.
 (6) 土木学会鋼構造委員会編, 座屈設計ガイドライン, (1987), 16-21, 土木学会.
 (7) Sangdahl, G. S. Jr., Aul, E. L. and Sachs, G., *Exp. Stress Analysis*, **6**-1 (1948), 1-18.