衝撃音による異方性複合材料の横弾性係数の測定* (準ニュートン法を用いた弾性係数値探索プログラムの開発)

吉田 勉^{*1}, 松井 新一^{*1}, 坂田 勝^{*1}

Measurement for Shear Moduli of Anisotropic Composites from Impact Sound (Program Development with Quasi-Newton's Method for Elastic Constants)

Tsutomu YOSHIDA^{*2}, Shin-ichi MATSUI and Masaru SAKATA

^{*2} Department of Mechanical Systems Engineering, Takushoku University,
815-1 Tatemachi, Hachioji-shi, Tokyo, 193-0985 Japan

A simple instrumentation system has been developed to determine the elastic moduli of engineering ceramics and their composites from the sound produced by the impact of a ball upon a specimen. In the system, a small rectangular bar specimen is suspended by thin ceramic threads. Using a fast Fourier transform analyzer, the natural frequencies are analyzed from the impact sound for the flexural and torsional vibration modes of the specimen. In this paper, elastic constants were evaluated from these frequencies using Timoshenko's beam theory, Saint-Venant's torsion theory and unconstrained optimization algorithm based upon quasi-Newton's method. Four-points bending test were conducted to measure anisotropic elastic shear moduli of the specimen. Elastic constants evaluated by the impact sound agreed well with those measured by the bending test.

Key Words: Composite, Anisotropic Elastic Constant, Impact Sound, Natural Frequency, Bending Test, Nondestructive Testing, Unconstrained Optimization Problem

1. 結 論

マトリックスおよび強化繊維に炭化ケイ素 (SiC) を用いた織物セラミックス複合材料は超高温で利用できる材料として航空エンジンなどへの利用に注目されている。複合材料の特性を活かした構造設計を行うためには、高温における弾性定数を評価しておく必要がある。特に熱衝撃強度、破壊じん性などが問題となる場合には、広い温度範囲における縦および横弾性定数とポアソン比の正確な値が必要となるため、高温での弾性定数の計測が種々の方法⁽¹⁾⁽²⁾で行われている。しかし、それらの方法は材料とともに測定装置の一部が高温炉の中に含まれることによ

り生じる問題のために現状では簡便で正確な計測法が確立されていない。

筆者らは高温炉内に吊り下げた角棒状の試験片に衝撃を与え、発生する衝撃音を高温炉外部に設置したマイクロフォンにより計測し、曲げ振動に対してはチモシェンコの理論、ねじり振動に対してはサンブナンの理論を適用することにより、広い温度範囲における材料の縦および横弾性係数とポアソン比を簡便かつ迅速に計測する方法を提案し⁽³⁾、さらにこれを異方性材料の弾性定数の計測にも拡張した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これらの研究では、弾性定数は衝撃音から得られる固有振動数と振動数方程式から計算される固有振動数の残差二乗値を最小化する値として最急降下法を用いて求められている。

本論文ではヘッセ行列を用いる準ニュートン法プログラムを応用して固有振動数の残差二乗和を最小化

* 原稿受付 2002 年 3 月 1 日。

^{*1} 正員, 拓殖大学工学部 (☎ 193-0985 八王子市館町 815-1)。
E-mail: t-yosida@ms.takushoku-u.ac.jp

することにより、弾性係数値を求めた。この結果、異方性が大きい材料についても初期値に依存しない解が得られるようになった。SiC/SiC 異方性複合材料について非対称4点曲げ試験を行い、得られた横弾性係数値と開発プログラムを用いて同定した横弾性係数値とを比較し、衝撃音を用いる物性同定手法の有効性を示した。

2. 衝撃音による物性推定

2.1 衝撃音の分析 衝撃音から試験片の固有振動数を測定する方法については文献⁽⁶⁾⁽⁷⁾に詳しいので本論文では簡単な説明にとどめる。図1に実験・測定系の概略図を示した。細いセラミックス製の糸により、長方形断面の試験片を加熱炉内につり下げる。直径3mmの鋼製もしくはセラミックス製のボールを自由落下させ、試験片と衝突させる。ボールにより衝撃を受けた試験片から発せられる衝撃音を炉外に設置した図1に示すマイクロフォンにより測定する。マイクロフォンからの音声信号をフーリエ分析装置に取り込み、一例として示す図2のフーリエスペクトルを得る。図2において縦軸の音圧レベル値が大きい周波数は低次の曲げ振動、ねじれ振動モードに対応している。

なお、本研究では衝撃音を用いる弾性定数同定手法の有効性を示すことが目的であるので、実験は全て室温で行っている。

2.2 固有周期の計算

2.2.1 曲げ振動 直交異方性材料の異方性軸をxおよびy軸と一致させた図3に示す板材から、x軸を軸方向として切り出した長方形断面を有する試験片Iの固有振動数を計算する。はりの両端が自由な境界条件の下で、せん断力の効果を考慮したチモシェンコ理論を用い⁽⁸⁾、y軸方向とz軸方向の振動の相互作用はないものと仮定すると、はりのz軸方向の曲げ振動方程式は式(1)となる。

$$\begin{aligned}
 E_x I_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I_y \left(1 + \frac{E_x}{\kappa_{zx} G_{zx}} \right) \\
 \times \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_y}{\kappa_{zx} G_{zx}} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで、 w はz方向変位、 E_x は縦弾性係数、 G_{zx} は横弾性係数、 I_y はy軸に関する断面2次モーメント、 A は断面積、 ρ は密度、 κ_{zx} は断面形状に依存するせん断係数である。式(1)に対する振動数方程式は次式で与えられる。

Fig.1 Experimental apparatus and instrumentation system

Fig.2 Fourier spectrum of the sound pressure

Fig.3 Specimen and coordinate system

$$2 - 2 \cdot \cosh b\alpha \cdot \cosh b\beta + \frac{b}{\sqrt{1 - b^2 r^2 s^2}} \times [b^2 r^2 (r^2 - s^2)^2 + (3r^2 - s^2)] \sinh b\alpha \sinh b\beta = 0 \quad \dots (2)$$

ここで、次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \alpha \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \mp (r^2 + s^2) + \sqrt{(r^2 - s^2)^2 + \frac{4}{b^2}} \right\}^{1/2} \\ b^2 &= \frac{\rho A}{E_x I_y} \cdot l^4 \omega^2, \quad r^2 = \frac{I_y}{A \cdot l^2}, \\ s^2 &= \frac{E_x I_y}{\kappa_{zx} A G_{zx} l^2} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

なお、 l ははりの長さ、 ω は固有振動数である。y 軸方向をはりの軸方向として切り出した図 3 に示す試験片 II についても添字を変えることにより同様な方程式が得られる。

上式は超越方程式であるが、試験片の高さおよび幅方向の曲げ振動に対する n 次の固有振動数 ω_{vn} および ω_{Hn} を数値解析により求めることが出来る。

等方性材料の長方形断面に対するせん断係数値 κ は ν を等方性材料のポアソン比として Cowper⁽⁹⁾ により $\kappa = 10(1 + \nu) / (12 + 11\nu)$ となることが報告されている。 $\nu = 0.28 \sim 0.30$ に対して $\kappa = 0.8488 \sim 0.8497$ となることから、本研究ではせん断係数 $\kappa_{zx} = 0.8490$ を用いる。

2.2.2 ねじり振動 サン・ブナンの理論によれば、試験片 I に対するねじり振動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{G_J}{I_p} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \dots (4)$$

ここで、 ψ はねじれ角であり、

$$\frac{G_J}{I_p} = \frac{4G_{zx}}{\rho \left\{ 1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\}} \left(1 - \sqrt{\frac{G_{zx}}{G_{xy}}} \cdot \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{h} \times \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^5} \cdot \tanh \frac{i\pi h}{2a} \sqrt{\frac{G_{xy}}{G_{zx}}} \right) \quad \dots (5)$$

である。 a は幅、 h は高さであり、 I_p は次式で与えられる極慣性モーメントである。

$$I_p = \rho \cdot \frac{a^3 \cdot h + a \cdot h^3}{12}$$

ねじれ振動に対する振動数方程式は次式で与えられる。

$$\omega_{Tn} = \frac{n\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{G_J}{I_p}} \quad \dots (6)$$

2.2.3 準ニュートン法による弾性定数の同定

前報⁽¹⁰⁾では最急降下法を用いて弾性定数の同定を行った。しかし、この方法では、異方性が大きい材料については計算が収束しないために横弾性定数値が得られなかったり、得られても初期値に依存するなど正確に同定出来ない問題点の生じることがわかった。これは固有振動数を変数とする弾性係数値の関数が小さな勾配の関数となっていることが一つの原因と考えられる。

本研究では E_x , G_{zx} , G_{xy} を変数として (2), (3), (5), (6) 式により表される固有振動数 ω_{vn}^{cal} , ω_{Hn}^{cal} および ω_{Tn}^{cal} と、衝撃音の実験から得られる固有振動数 ω_{vn}^{exp} , ω_{Hn}^{exp} および ω_{Tn}^{exp} を用いて式 (7) に示す関数 $f(E_x, G_{zx}, G_{xy})$ を定義し、関数 f を最小化する弾性係数 E_x , G_{zx} , G_{xy} が試験片材料の弾性定数であるとする方法を用いた。

$$f(E_x, G_{zx}, G_{xy}) = \sum_n \left\{ (\omega_{vn}^{cal} - \omega_{vn}^{exp})^2 + (\omega_{Hn}^{cal} - \omega_{Hn}^{exp})^2 + (\omega_{Tn}^{cal} - \omega_{Tn}^{exp})^2 \right\} \dots (7)$$

ここで、 n は固有振動モードの次数であり、本研究では $n=2$ として、2 次までの固有振動数を用いる。

関数 f を最小化する弾性係数の探索には多変数の非線形関数を最小化する問題に対して用いられる次の準ニュートン法⁽¹¹⁾を応用した。

n 個の実数、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ の集合に対して関数 $f(\mathbf{x})$ を最小にするような $\mathbf{x}_{min}$ を求める問題において、その局所的最適解を反復法により求める場合、適当な初期値 $\mathbf{x}_0$ から出発して最適解に収束するような点列 $\mathbf{x}_k$ を生成していく。準ニュートン法では、点 $\mathbf{x}_k$ からの変位を $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$ とすると、次の 2 次関数 $q_k(\mathbf{d})$ を最小とする $\mathbf{d}$ を用いて次の点 $\mathbf{x}_{k+1}$ を決め、関数値を減少させる。

$$q_k(\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}_k \mathbf{d} \dots (8)$$

ここで、 $\nabla f(\mathbf{x})$ および $\mathbf{B}_k$ はそれぞれ次式で示される関数 $f(\mathbf{x})$ の勾配ベクトルとヘッセ行列 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ の近似行列となるように選んでいく $n \times n$ 正定値対称

行列である。

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_{k+1})(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \cong \mathbf{B}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \cdots (9)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial f(\mathbf{x}) / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f(\mathbf{x}) / \partial x_n \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial^2 f(\mathbf{x}) / \partial x_1^2 & \cdots & \partial^2 f(\mathbf{x}) / \partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f(\mathbf{x}) / \partial x_n \partial x_1 & \cdots & \partial^2 f(\mathbf{x}) / \partial x_n^2 \end{bmatrix} \cdots (10)$$

本研究では BFGS 公式¹⁰⁾を用いて $\mathbf{B}_k$ の更新を行っている。

3. 非対称4点曲げ試験による横弾性係数の測定

3.1 実験装置 衝撃音の実験を行った試験片に対して、図4に示す非対称4点曲げ試験装置を用いてその横弾性係数値を測定した。図4に示すように、支点中央に位置する試験片側面に、ゲージ軸方向が試験片軸方向と 45° をなすようにひずみゲージを貼付した。

Fig.4 Asymmetrical four-point bending test device

3.2 評価方法 ひずみゲージにより測定される垂直ひずみ ε とひずみゲージを貼付した領域に作用するせん断応力 τ_{gage} に対して式 (11) の関係を用いて横弾性係数を評価する。

$$\tau_{gage} = G \cdot 2 \varepsilon \cdots (11)$$

長方形断面の試験片を用いた非対称4点曲げ試験において試験片断面上に生じる理論的なせん断力は式 (12) で与えられる。

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{a \cdot h} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2s}{h} \right)^2 \right\} \cdots (12)$$

ここで、 Q はせん断荷重、 s は中立軸からの高さ方向への距離、 a 、 h は試験片の幅と高さである。

図5(b)に汎用有限要素法プログラム MARC⁽¹²⁾ による三次元ソリッド要素を用いた数値計算結果と式 (12) による分布の比較を示す。実線で示した式 (12) による分布と MARC による数値計算結果はほぼ一致している。これより、以下で横弾性係数値を評価する際に必要となる試験片のせん断応力分布は式 (12) を用いる。図5(a)は MARC による数値計算の際に得られた変形図である。

(a) Deformation of specimen by MARC

(b) Shear stress distribution on cross section

Fig.5 Numerical calculation for asymmetrical four-point bending

ひずみゲージは実際にひずみを測定するゲージ部分とひずみの測定には関わらないベース部分からなる。式 (13) により、ゲージ部分上に生じる平均せん断応力 τ_{gage} を定義する。

$$\tau_{gage} \cdot A = \iint \tau(\xi, \eta) d\xi d\eta \cdots (13)$$

ここで、被積分関数の τ は式 (12) を用い、積分領域はゲージ部の長方形とする。また、 A はゲージ部面

積を表し、 ξ および η は試験片側面上に設けた試験片軸方向および高さ方向を座標軸とする変数である。

本研究では数値積分により計算される τ_{gage} とゲージにより測定されるひずみとを用いて、横弾性係数を式(11)により、評価する。

4. 推定結果と実験結果の比較

本研究で用いた複合材料はSiC繊維束が 90° に交差する面状繊維物構造となっている。複合材料の試験片はその軸が繊維束方向と平行となるように板材から切り出した。

表1にアルミニウム合金A5052P材および複合材料を用いて作成した試験片の寸法形状を示した。これらの長方形試験片に対して衝撃音を用いる同定手法により、横弾性係数値を推定した。また、非対称4点曲げ試験を行い、前節で示した方法により各試験片の横弾性係数値を測定し、衝撃音による推定値と比較した。以下の図6、7および9では、縦軸に衝撃音あるいは非対称4点曲げ試験によって得られた横弾性係数値をとり、横軸に試験片の高さ、幅方向の面内の横弾性係数(G_{xy} , G_{zx})あるいは等方性の横弾性係数(G_{iso})などの弾性係数の区分を用いて結果を示す。図中の◆、■および▲は衝撃音に基づく推定値を表し、◇、□および△は非対称4点曲げ試験による測定値を表す。

最適値探索問題においては、設計変数の初期値依存性が問題となる。本研究で行った試行においては最終的に得られた弾性係数値の0.5～1.5倍の初期値から、最終値の±1%以内に収束しており、初期値依存性は見受けられない結果となっている。

Table 1 Dimensions of specimen

specimen	density	height	width	length
A5052P	2.77	7.05	5.04	50.02
TyrannoHex	2.42	4.02	3.01	49.41
Hinicaroceram (no heat treated)	2.20	4.55	1.84	49.25
		4.56	1.88	49.21
Hinicaroceram (heat treated)	2.20	4.99	2.75	53.05

g/cm³ mm mm mm

4.1 A5052P 材料 等方性材料であるA5052P材については、衝撃音を用いて横弾性係数値を同定する際、等方性材料として推定した結果を▲により、異方性材料として推定した結果を◆、■により図6に示した。実験値に対して高めの横弾性係数値を推定する結果となった。

4.2 チラノヘックス(炭化ケイ素繊維強化複合材料) 本材料について得られた結果を図7に示す。試験片の幅および高さの各側面にひずみゲージ

を貼付し、各面の横弾性係数値を測定した。衝撃音による推定結果と実験結果はほぼ一致する結果となった。

ひずみゲージの大きさによる測定値への影響を調べるため、 G_{xy} に対して大きさの異なるゲージを用いて

Fig.6 Comparison of elastic constant by asymmetrical four-point bending test and impact sound test for A5052P

Fig.7 Comparison of elastic constant by asymmetrical four-point bending test and impact sound test for TyrannoHex

Fig.8 Strain gage size

Table 2 Comparison of natural frequencies <kHz>

mode	ω_{V1}	ω_{H1}	ω_{V2}	ω_{H2}	ω_{T1}	ω_{T2}
measured	8.813	11.688	23.750	31.000	40.188	—
computed	8.826	11.681	23.750	31.000	40.186	—

非対称4点曲げ試験を行った。ゲージ部の相対的な大きさの比較を図8に示す。図7中の曲げ試験による◇は図8(a) large gage を用いた結果であり、△は図8(b) small gage を用いた結果である。また、図8中の measured direction はひずみゲージの測定方向を示す。両ゲージによる横弾性係数値 G_{xy} はほぼ一致する結果が得られている。

表2には衝撃音の実験により測定された固有振動数値と、同定手法により推定された弾性係数を用いて計算される固有振動数値とを比較した一例を示した。

(a) no heat treated specimen

(b) heat treated specimen

Fig.9 Comparison of elastic constant by asymmetrical four-point bending test and impact sound test for Hinicaroceram

4.3 ハイニカロセラム (ハイニカロン繊維強化複合材料)

1300℃の温度にさらされた履歴をもつハイニカロセラムとそのような履歴を経ていないハイニカロセラムについて、その室温での横弾性係数を評価した。図9(a)は高温度にさらされていない試験片、図9(b)は高温度にさらされた試験片に対する推定および実験結果である。 G_{xy} について推定値、実験値がほぼ一致する結果となった。

5. 結言

直交異方性複合材料の弾性定数を同定するプログラムを開発した。SiC/SiC異方性複合材料に対して非対称4点曲げ試験を行い、横弾性係数値を測定し、上記の同定手法による推定値と比較した。推定値と測定値はよく一致し、異方性複合材料に対して衝撃音を用いる弾性係数同定手法が有効であることを示した。

謝辞

本研究は、文部科学省ハイテクリサーチセンター事業に基づく、拓殖大学先端工学研究センターの助成を受けて行われた。

文 献

- (1) ファインセラミックスの高温弾性率試験方法, JIS R1605-1989, 1.
- (2) Standard Test Method for Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio for Glass and Glass-Ceramics By Resonance, ASTM, C623-71 (1985), 224.
- (3) 坂田・ほか2名, 機講論 (A), No.900-14 (1990), 134.
- (4) Sakata, M., et al., *Proc. of ICM* 6, 4 (1991), 655.
- (5) 坂田・ほか3名, 機講論 (A), No.910-62 (1991), 464.
- (6) Sakata, M., et al., *Proc. Int. Symp. Impact Eng. II* (1992), 502-507.
- (7) Sakata, M., and Ohnabe, H., *Proc. Am. Soc. Composites-Ninth Tech. Conf.*, (1994) 79-86.
- (8) Timoshenko, S. P., *Philos. Mag.*, Ser.6, 41(1921), 744-746.
- (9) Cowper, G.R., *J. App. Mech.*, 33 (1966), 335-340.
- (10) 坂田・ほか3名, 機論, A-58, (1992), 2359-2364.
- (11) 茨木・福島, 最適化プログラミング, (1991), 岩波書店.
- (12) MSC/MARCK7.1, MSC Software Corp.