無限体中に存在する円周き裂を有する軸対称空かの K_I *西谷 弘 信^{*1}, 福山 慶 介^{*2} K_I of the Axisymmetrical Cavity with a Circumferential Crack
in an Infinite BodyHironobu NISITANI^{*3} and Keisuke FUKUYAMA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Kyushu Sangyo University,
2-3-1 Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 813-8503 Japan

Recently one of the authors has proposed a method for the analysis of stress intensity factor which uses the crack tip stress calculated by FEM. It is called the crack tip stress method. In this paper, the crack tip stress method is applied to the K_I analysis of an infinite body subjected to tension, which has an axisymmetrical ellipsoidal cavity or a disk-type cavity with a circumferential crack. The values of K_I are discussed based on the effective crack size $(a+\lambda)$, where a is the radius of ellipsoid or disk and λ is the size of crack emanating from the notch root. Furthermore, based on the linear notch mechanics it is shown that the relation between $F_I = K_I / (1.1215 \sigma_{\max} \sqrt{\pi \lambda})$ and λ/ρ is almost independent of ρ/a , where ρ is the notch root radius and $\sigma_{\max}$ is the maximum stress at the notch root when the crack does not exist.

Key Words: Elasticity, Finite Element Method, Body Force Methods, Stress Intensity Factor, Cavity

1. 緒 言

一般にき裂は応力集中部より発生し、機械や構造物の破壊の原因となる。したがって、応力拡大係数 K を求めることは実用上重要な意味を持っている。一般の応力解析で使用する有限要素法(FEM)は汎用性にすぐれた有力な手法ではあるが、そのままでは K の解析には一般に不向きである。それは FEM では無限大となるべきき裂先端の応力値が有限となるからである。

現在までに、FEM を用いて応力拡大係数 K を求める手法は数多く提案されている^{(1)~(3)}。最近、著者の一人はそのような手法の一つとして第ゼロ節点法を提案した。第ゼロ節点法は FEM 解析で求まるき裂先端の応力値 $\sigma_{y0,FEM}$ を用いて K を求める方法である。このとき K は外挿を必要とせず一意的に求まる。これまでに各種二次元問題と丸棒における軸対称問題で高精度な解が得られることを示した^{(4)~(6)}。

本論文の目的は第ゼロ節点法の有用性をさらに確認

するとともに、今まで解が与えられていなかったいくつかの問題について解析することである。

本研究では、第ゼロ節点法を用いて、円周き裂を有する、回転円体空かと円板状空かが無限体に存在するときの K_I の解析を行い、対応する二次元問題の体積力法(BFM)による解析結果を用いて、それらの特徴を検討した。

2. 第ゼロ節点法の概要

第ゼロ節点法は図1に示すように(1)基準となる問題と(2)応力拡大係数を求めたい問題の応力拡大係数の比が、FEM で解析したそれらのき裂先端の応力の比にほぼ等しいことに基づくものである。この事実に基づいて著者の一人は式(1)を提案している^{(4)~(6)}。

$$F_{I,appr} = \sigma_{y0,FEM} \cdot \frac{F_{I,real}^*}{\sigma_{y0,FEM}^*} \cdot \frac{\sigma^*}{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{e}{e^*}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)の $\sigma_{y0,FEM}$ は FEM 解析で求められたき裂先端の応力値、 F_I は無次元化応力拡大係数であり、また $F_I = K_I / (\sigma \sqrt{\pi \lambda})$ により定義される。 σ は公称応力、 λ はき裂長さ、 e はき裂先端の要素サイズである。 $*$ 印は基準問題であることを意味する。添字の appr は近似解、real は厳密解、FEM は FEM 解析による値を

* 原稿受付 2002 年 8 月 26 日。

^{*1} 名誉員, 九州産業大学工学部(〒813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1)。^{*2} 正員, 九州産業大学大学院。

E-mail: nisitani@ip.kyusan-u.ac.jp

意味している。式(1)に K_I を求めるべき部材の $\sigma_{y0,FEM}$, σ , λ , e を代入することで近似値 $F_{I,appr}$ が求まる。

本研究では基準問題として、図2に示した平面ひずみ条件下で一き裂を持つ無限板が無限遠で一様な引張荷重を受ける問題を取り上げる。図2に示すようにき裂の大きさに対して無限板とみなせる問題である。すなわち、一辺の長さが約3000 mmの正方形有限板の中央にき裂がある問題を基準とした。図2において

Fig. 1 Relation between $K_{I,real}$ and $\sigma_{y0,FEM}$

Fig. 2 Reference problem and its mesh pattern

Fig. 3 Treated problems (FEM 3D)

$\sigma^*=1$ のとき、式(1)の $\sigma_{y0,FEM}$ は 21.717 MPa である。なお、要素分割は図2の Part A に示すようにき裂先端の要素サイズを $1/243$ とし、き裂から遠ざかるにつれて等比級数的に要素サイズを大きくしている。

3. 解析形状および FEM の要素分割

3.1 解析形状 図3に本研究で取扱った問題を示す。(a)が円周き裂を持つ回転円体空か、(b)が円周き裂を持つ円板状空かの解析形状である。これらの円体空かおよび円板状空かは直径と高さが十分大きい円柱の中心に存在するものとする。本解析では半径 a を一定とし、切欠半径 ρ とき裂長さ λ を変化させて解析を行った。なお、この三次元問題では FEM 汎用プログラム (Marc) で解析を行った。

図4は、図3の解析結果と比較するための二次元問題の形状である。二次元問題も空か問題と同様に、円穴および長穴は幅と高さが十分大きい板の中心に存在するものとする。図4(a)の解析結果に関しては過去の値を引用した⁽⁷⁾。図4(b)の解析結果は BFM による二次元応力解析汎用プログラム⁽⁸⁾を用いて求めた。

3.2 FEM の要素分割 図5に円周き裂を持つ円板状空かが無限遠で一様な引張荷重を受ける問題の

Fig. 4 Two dimensional problems corresponding to Fig. 3

Fig. 5 Element division of FEM

FEMの要素分割を示す。 σ は1, 円板の半径 a は10 mmとして解析を行った。無限体とみなすには半径 a に対して円柱の高さ H と円柱の半径 R を十分大きくする必要がある。ここでは、 H と R を約1500 mmとした。また、図6に図5のき裂先端付近の要素分割を拡大して示す。図5の白抜き部をPart Aとして拡大して図6に示す。き裂先端の最小要素サイズ e は1/243 mmとしている。なお、図5と図6に示すように要素サイズはき裂先端から遠ざかるにつれて等比級数的に大きくしている。外周の $R=1500$ mmにおける要素サイズは81 mmである。

なお、だ円体空かのき裂先端近傍に対しては円板状空かのそれに対応するのと同様な要素分割を行い、だ円の境界に接する要素の分割では、境界に接する要素の二辺が境界に対して垂直となるように分割を行った(図6参照)。

Fig. 6 Mesh pattern near the crack chip

4. 解析結果

表1は円周き裂を持つ回転だ円体空かまたは円板状空かが無限体中に存在するときの第ゼロ節点法により求めた F_I の値と両者の差を示したものである。 $\rho/a = 0.09, 0.25$ ともに λ/a が小さい所で F_I の差は大きい傾向にあるが、その差は最大でも約2%以下である。ここで、この差は二つの空かで、 ρ は等しいが全体の形状が異なることに起因している。

図7は三次元問題の円周き裂を持つ、(a)回転だ円体空かの F_I と(b)円板状空かの F_I を等価き裂によって整理したものである。ここで、等価き裂とは半径 $(a+\lambda)$ の円板き裂を意味する。また、等価き裂による整理とは、無次元化応力拡大係数 F_I の定義として、与えられた問題の K_I を等価き裂の K_I で割った値を用いることである。

図7(a)のだ円体空かと(b)の円板状空かの F_I を

Table 1 Difference in F_I of ellipsoidal cavity and disk-type cavity

ρ/a	λ/a	Ellipsoidal cavity		Disk-type cavity		Difference [%]
		$\sigma_{y0, FEM}$ [MPa]	F_I	$\sigma_{y0, FEM}$ [MPa]	F_I	
0.09	0.025	41.0995	3.785	40.2220	3.704	2.18
	0.05	44.7717	2.916	44.5196	2.899	0.57
	0.1	46.5295	2.143	46.9191	2.160	-0.83
	0.2	48.3137	1.573	48.8650	1.591	-1.13
	0.4	51.9128	1.195	52.2606	1.203	-0.67
	0.6	55.4332	1.042	55.6432	1.046	-0.38
	0.8	58.7645	0.957	58.8991	0.959	-0.23
	1.0	61.9275	0.902	62.0184	0.903	-0.15
0.25	0.025	33.9245	3.124	33.2099	3.058	2.15
	0.05	40.9947	2.670	40.3802	2.630	1.52
	0.1	46.0188	2.119	45.7445	2.106	0.60
	0.2	49.0541	1.597	49.2669	1.604	-0.43
	0.4	52.4634	1.208	52.8232	1.216	-0.68
	0.6	55.7485	1.048	56.0387	1.053	-0.52
	0.8	58.9582	0.960	59.1711	0.963	-0.36
	1.0	62.0538	0.904	62.2102	0.906	-0.25

(a) Ellipsoidal cavity with a circumferential crack

(b) Disk-type cavity with a circumferential crack

Fig. 7 Relation between $F_{I, FEM3D}$ and λ/a

Fig. 8 Relation between $F_{I,BFM2D}$ and λ/a Fig. 9 Relation between $(F_{I,FEM3D})/(F_{I,BFM2D})$ and λ/a Fig. 10 Comparison of F_I of three dimensional problems and two dimensional problems

Fig. 11 Relation between $F_I, FEM3D$ and λ/ρ

比較すると ρ/a がある程度小さい場合 ($\rho/a=0.09, 0.25$) において, (b) の円板状空かの F_I のほうが (a) の円体空かの F_I より λ/a が早い段階で 1 に近づいている。したがって, ρ/a が 1 より小さい範囲では, (b) の円板状空かのほうが等価き裂による整理がより有効といえる。

図 8 は図 7 の問題に相当する二次元問題の F_I (BFM で求めた値) を等価き裂によって整理したものである。図 8 と図 7 を比較してわかるように, 二次元問題と三次元問題で対応する幾何学的形状の F_I と λ/a の関係を比較したとき, 三次元問題の F_I のほうが λ/a が早い段階で 1 に近づく傾向がある。したがって, 三次元問題のほうが等価き裂による整理がより有効である。

図 9 は三次元問題の F_I を二次元問題の F_I で割った値と λ/a の関係を示したものである。き裂のみのとき ($\rho/a=0.0$) の F_I の二次元と三次元の比は $2/\pi$ である。

図 10 の (a) は円板状空かの無次元化応力拡大係数 $F_{I, Disk-type cavity}$ を回転円体空かの $F_{I, Ellipsoidal cavity}$ で割った値と λ/a の関係を示したもので, (b) はこれに相当する二次元問題の場合である (F_I の定義は図 10 を参照)。三次元と二次元では同じ傾向を持っていることがわかる。

図 11 は (a) 円周き裂を持つ円体空かと (b) 円周き裂を持つ円板状空かの F_I を線形切欠力学⁽⁹⁾ の概念に基づいて整理したものである。き裂がないときの σ_{max} と ρ が等しければ, 切欠底に同一長さ λ のき裂が

入ったときの F_I の値は, λ/ρ が 1 以下の範囲で互いにほぼ等しくなっている。また, 円周き裂を持つ円体空かと円板状空かの F_I がともに同じ傾向を持っていることもわかる。

5. 結 言

(1) 第ゼロ節点法に基づいて, 円周き裂を持つ回転円体空かおよび円板状体空かが無限体中に存在するときの K_I を求め, 等価き裂の概念の当否について検討した。

(2) 円周き裂を持つ, 回転円体空かと円板状体空かが無限体中に存在するときの F_I を線形切欠力学の概念に基づいて整理し, F_I と λ/ρ の関係を求めると $F_I-\lambda/\rho$ の関係は ρ/a に無関係に λ/ρ が 1 以下の範囲においてほぼ一致する。

文 献

- (1) Yau, J. F. and Wang, S. S., *Eng. Fract. Mech.*, **20-3** (1984), 423-432.
- (2) 池田徹・荻原裕二・宮崎則幸, 機論, **63-611**, A (1997), 1377-1384.
- (3) 王樹波・白鳥正樹・Yu, Q., 機論, **63-606**, A (1997), 322-327.
- (4) 西谷弘信・川村莊司・藤崎渉・福田孝之, 機論, **65-629**, A (1999), 26-31.
- (5) 寺西高広・西谷弘信, 機論, **65-638**, A (1999), 2032-2037.
- (6) 西谷弘信・寺西高広, 機論, **66-652**, A (2000), 2204-2210.
- (7) Nisitani, H. and Isida, M., *Proc. 1982 Joint Conference on Exp. Mechanics*, (1982), 150-155, SESA & JSME.
- (8) 西谷弘信・陳琰珩・才本明秀, 体積力法による二次元応力解析汎用プログラム, (1994), 11, 培風館.
- (9) 西谷弘信, 機論, **49-447**, A (1983), 1353-1359.