表面層を有する圧電セラミックス半無限体に存在する 垂直き裂の衝撃応答*

上 田 整^{*1}, 村 田 誠^{*2}

Impact Response of a Cracked Piezoelectric Half-Plane with a Surface Layer

Sei UEDA^{*3} and Makoto MURATA

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

In this study, the impact response of a coated piezoelectric half-plane containing a crack perpendicular to the boundary is considered. The Laplace and Fourier transform techniques are used to formulate the problem in terms of a singular integral equation. The singular integral equation is solved by using the Gauss-Jacobi integration formula. Both the cases of an internal crack and a terminated crack are studied. Numerical calculations are carried out, and the effects of the geometric parameters on the dynamic stress intensity factor and the dynamic energy density factors are shown graphically.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Piezoelectric Half-Plane, Dynamic Energy Density Factor, Integral Transform

1. 結 言

圧電材料は、機械系と電気系という異なる系の間でエネルギー変換を伴う材料で、センサー・アクチュエータ用材料として利用され、様々な応用が進められている⁽¹⁾。最近では、生体適合性向上のため、PZT系圧電セラミックスをTitaniumでコーティングした圧電複合材料の医療システムへの応用に向けた新しい試みが報告されている^{(2),(3)}。

一方、圧電セラミックスに代表される圧電材料には微小き裂が潜在・発生することが多く、これらの微小き裂は、圧電材料の機械的電気的特性に大きな影響を及ぼすため、電気破壊力学的挙動の解明が要望されている。このため、中央き裂を有する圧電帯板⁽⁴⁾や圧電積層板⁽⁵⁾、偏心き裂を有する圧電帯板⁽⁶⁾の電気弾性問題などが解析されている。また、衝撃応答問題に関しては、無限領域を占める圧電材料を対象とした解析結果^{(7),(8)}、有限領域を対象とした中央き裂を有する圧電帯板のモードⅠ型⁽⁹⁾およびⅢ型⁽¹⁰⁾き裂問題や圧電積層板の中央き裂問題⁽¹¹⁾なども報告されている。

本報では、表面コーティングされた圧電材料の界面に垂直に存在する微小き裂の衝撃挙動に注目し、動的

応力拡大係数および圧電材料の破壊力学的パラメータとして有効な動的エネルギー密度係数⁽¹²⁾の時間的挙動を厳密に理論解析した。解析には、Laplace-Fourier二重積分変換法を用い、問題の解を特異積分方程式の解に導いて解く方法を採用した^{(13),(14)}。また、特異積分方程式の数値解析には、Gauss-Jacobiの数値積分公式⁽¹⁵⁾を用い、Laplace逆変換には、数値Laplace逆変換法を適用した⁽¹⁶⁾。内部き裂および界面に到達したき裂の場合について数値計算を行い、動的応力拡大係数および動的エネルギー密度係数の時間的挙動に及ぼす幾何学的形状の影響を明らかにして、詳細な検討を加えた。

2. 問題の設定と基礎式

Fig.1 Geometry of the crack problem in a piezoelectric half-plane with a surface layer

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において、圧電セラミックス半無限弾性体Ⅰおよび幅 h の均質等方性弾性体からなる表面層Ⅱを考え、 $z = 0$ 面上に長さ

* 原稿受付 2002年10月15日。

^{*1} 正員、大阪工業大学工学部 (〒535-8585 大阪市旭区大宮5-16-1)。

^{*2} 学生員、大阪工業大学大学院。

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

$2c = b - a$ ($0 \leq a < b$) のき裂が界面に対して垂直に存在するものとし、平面ひずみを仮定する。この場合、分極方向は z 軸方向である。以後、下添字 $\delta = \text{I, II}$ で圧電セラミックス半無限体 I および表面層 II を、下添字 x, y, z で座標軸方向を示すものとする。

変位ベクトルの成分を $u_{x\delta}(x, z, t)$, $u_{z\delta}(x, z, t)$ ($\delta = \text{I, II}$)、電界の強さベクトルの成分を $E_x(x, z, t)$, $E_z(x, z, t)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{xx\delta}(x, z, t)$, $\sigma_{zz\delta}(x, z, t)$, $\sigma_{zx\delta}(x, z, t)$ ($\delta = \text{I, II}$) および電束密度ベクトルの成分 $D_x(x, z, t)$, $D_z(x, z, t)$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx\delta} &= c_{11\delta} \frac{\partial u_{x\delta}}{\partial x} + c_{13\delta} \frac{\partial u_{z\delta}}{\partial z} - \beta e_{31} E_z \\ \sigma_{zz\delta} &= c_{13\delta} \frac{\partial u_{x\delta}}{\partial x} + c_{33\delta} \frac{\partial u_{z\delta}}{\partial z} - \beta e_{33} E_z \\ \sigma_{zx\delta} &= c_{44\delta} \left(\frac{\partial u_{x\delta}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z\delta}}{\partial x} \right) - \beta e_{15} E_x \end{aligned} \right\} \quad (\delta = \text{I, II}) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= e_{15} \left(\frac{\partial u_{x\text{I}}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z\text{I}}}{\partial x} \right) + \epsilon_{11} E_x \\ D_z &= e_{31} \frac{\partial u_{x\text{I}}}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_{z\text{I}}}{\partial z} + \epsilon_{33} E_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 t は時間、 $c_{11\delta}$, $c_{13\delta}$, $c_{33\delta}$, $c_{44\delta}$ ($\delta = \text{I, II}$) は弾性定数、 ϵ_{11} , ϵ_{33} は誘電定数、 e_{15} , e_{31} , e_{33} は圧電定数であり、 $\delta = \text{I}$ の時 $\beta = 1$, $\delta = \text{II}$ の時 $\beta = 0$ である。静電ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ を導入すると、電界の強さベクトルの成分は次のように表される。

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3)$$

変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{11\delta} \frac{\partial^2 u_{x\delta}}{\partial x^2} + c_{44\delta} \frac{\partial^2 u_{x\delta}}{\partial z^2} + (c_{13\delta} + c_{44\delta}) \frac{\partial^2 u_{z\delta}}{\partial x \partial z} \\ + \beta (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \rho_\delta \frac{\partial^2 u_{x\delta}}{\partial t^2} \\ c_{44\delta} \frac{\partial^2 u_{z\delta}}{\partial x^2} + c_{33\delta} \frac{\partial^2 u_{z\delta}}{\partial z^2} + (c_{13\delta} + c_{44\delta}) \frac{\partial^2 u_{x\delta}}{\partial x \partial z} \\ + e_{15} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho_\delta \frac{\partial^2 u_{z\delta}}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (\delta = \text{I, II}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u_{x\text{I}}}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 u_{z\text{I}}}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_{z\text{I}}}{\partial z^2} \\ - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中、 ρ_δ ($\delta = \text{I, II}$) は圧電セラミックスおよび表面層の質量密度である。自由空間を考えると、式(2), (5)は

$$D_x = \epsilon_0 E_x, \quad D_z = \epsilon_0 E_z \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

ここに、 ϵ_0 は自由空間における誘電定数である。

き裂を有する無限圧電体 ($a, b \rightarrow \infty$) の場合、き裂面に垂直に入射する膨張波は次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} u_z^i &= \frac{\sigma_0}{c_{33\text{I}}} (z + c_1 t) H\left(t + \frac{z}{c_1}\right) \\ \phi^i &= \frac{e_{33} \sigma_0}{c_{33\text{I}} \epsilon_{33}} (z + c_1 t) H\left(t + \frac{z}{c_1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 $c_1 = (C_{33}/\rho_{\text{I}})^{1/2}$ は膨張波の伝播速度、 $C_{33} = c_{33\text{I}} + e_{33}^2/\epsilon_{33}$, σ_0 は応力の次元を有する定数、 $H(t)$ は Heaviside の単位階段関数であり、上添字 i は入射波の成分を示す。重ね合わせの原理により、この問題の解は、き裂面に $-(C_{33}/c_{33\text{I}})\sigma_0 H(t)$ が作用する問題の解と等価となる。そこで本報では、 $0 \leq a < b < \infty$ の場合についても、き裂による散乱場及ぼす表面層の影響に注目し、 $a, b \rightarrow \infty$ の場合と比較することも考慮して、き裂面に $-(C_{33}/c_{33\text{I}})\sigma_0 H(t)$ が作用する場合の問題を考えることにする。従って、問題の対称性を考慮すると、境界条件式および対称条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx\text{I}}(x, 0, t) &= -\frac{C_{33}}{c_{33\text{I}}} \sigma_0 H(t) \quad (a < x < b) \\ u_{z\text{I}}(x, 0, t) &= 0 \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x(x, 0, t) &= E_x^c(x, 0, t) \quad (a < x < b) \\ \phi(x, 0, t) &= 0 \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\sigma_{xx\text{I}}(x, 0, t) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (11)$$

$$\sigma_{zx\text{II}}(x, 0, t) = 0 \quad (-h \leq x < 0) \quad (12)$$

$$u_{z\text{II}}(x, 0, t) = 0 \quad (-h \leq x < 0) \quad (13)$$

$$\sigma_{xx\text{II}}(-h, z, t) = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \quad (14)$$

$$\sigma_{zx\text{II}}(-h, z, t) = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \quad (15)$$

$$\sigma_{xx\text{I}}(0, z, t) = \sigma_{xx\text{II}}(0, z, t) \quad (0 \leq z < \infty) \quad (16)$$

$$\sigma_{zx\text{I}}(0, z, t) = \sigma_{zx\text{II}}(0, z, t) \quad (0 \leq z < \infty) \quad (17)$$

$$u_{x\text{I}}(0, z, t) = u_{x\text{II}}(0, z, t) \quad (0 \leq z < \infty) \quad (18)$$

$$u_{z\text{I}}(0, z, t) = u_{z\text{II}}(0, z, t) \quad (0 \leq z < \infty) \quad (19)$$

$$D_x(0, z, t) = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \quad (20)$$

ここに、上添字 c はき裂内部の自由空間の場を示すものとする。

3. 解 析

Laplace 変換およびその逆変換を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(p) \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに、 Br は Bromwich の積分路である。圧電セラミックス半無限体 ($\delta = \text{I}$) の場合、式(4), (5)に Laplace-Fourier 変換を適用して変位場および静電ポテンシャルの一般解を求めると⁽¹³⁾

$$u_{x1}^*(x, z, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \left[a_j(s, p) A_j(s, p) \right. \\ \left. \times \exp\{-s\gamma_{1j}(s, p)z\} \sin(sx) \right. \\ \left. - a'_j(s, p) B_j(s, p) \exp\{-s\gamma'_{1j}(s, p)x\} \cos(sz) \right] ds \quad (22)$$

$$u_{z1}^*(x, z, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\gamma_{1j}(s, p)} A_j(s, p) \right. \\ \left. \times \exp\{-s\gamma_{1j}(s, p)z\} \cos(sx) \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma'_{1j}(s, p)} B_j(s, p) \exp\{-s\gamma'_{1j}(s, p)x\} \sin(sz) \right] ds \quad (23)$$

$$\phi^*(x, z, p) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 \left[\frac{b_j(s, p)}{\gamma_{1j}(s, p)} A_j(s, p) \right. \\ \left. \times \exp\{-s\gamma_{1j}(s, p)z\} \cos(sx) \right. \\ \left. - \frac{b'_j(s, p)}{\gamma'_{1j}(s, p)} B_j(s, p) \exp\{-s\gamma'_{1j}(s, p)x\} \sin(sz) \right] ds \quad (24)$$

ここに, $A_j(s, p)$, $B_j(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は境界条件より決定される未知関数であり, $\gamma_{1j}(s, p)$, $\gamma'_{1j}(s, p)$, $a_j(s, p)$, $a'_j(s, p)$, $b_j(s, p)$, $b'_j(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は文献⁽⁹⁾の付録1に示す既知関数である. Laplace 像空間における電界の強さ $E_x^*(x, z, p)$, $E_z^*(x, z, p)$ は式(24)を式(3)に代入して得られ, 応力成分 $\sigma_{xx1}^*(x, z, p)$, $\sigma_{zz1}^*(x, z, p)$, $\sigma_{xz1}^*(x, z, p)$ および電束密度成分 $D_x^*(x, z, p)$, $D_z^*(x, z, p)$ は式(22), (23) および得られた電界の強さを式(1), (2)に代入することにより求まる.

表面層 ($\delta = \Pi$) の場合, 変位場の一般解は

$$u_{x\Pi}^*(x, z, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\gamma_{21}(s, p) [B_4(s, p) \right. \\ \left. \times \exp\{s\gamma_{21}(s, p)x\} - B_5(s, p) \exp\{-s\gamma_{21}(s, p)x\}] \right. \\ \left. + [B_6(s, p) \exp\{s\gamma_{22}(s, p)x\} \right. \\ \left. - B_7(s, p) \exp\{-s\gamma_{22}(s, p)x\}] \right] \cos(sz) ds \quad (25)$$

$$u_{z\Pi}^*(x, z, p) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[[B_4(s, p) \right. \\ \left. \times \exp\{s\gamma_{21}(s, p)x\} + B_5(s, p) \exp\{-s\gamma_{21}(s, p)x\}] \right. \\ \left. + \gamma_{22}(s, p) [B_6(s, p) \exp\{s\gamma_{22}(s, p)x\} \right. \\ \left. + B_7(s, p) \exp\{-s\gamma_{22}(s, p)x\}] \right] \sin(sz) ds \quad (26)$$

ここに, $B_j(s, p)$ ($j = 4, 5, 6, 7$) は境界条件より決定される未知関数であり, $\gamma_{21}(s, p)$, $\gamma_{22}(s, p)$ は

$$\gamma_{21}(s, p) = \left\{ 1 + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\rho_{\Pi}}{\mu} \left(\frac{p}{s} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ \gamma_{22}(s, p) = \left\{ 1 + \frac{\rho_{\Pi}}{\mu} \left(\frac{p}{s} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (27)$$

ここに, μ はせん断弾性係数, ν は Poisson 比であり, Laplace 像空間における応力成分は式(25), (26)を式

(1)に代入することにより求まる. また, 求められた変位成分, 応力成分は境界条件式(12), (13)を自動的に満たしている.

式(7)を考慮すると, Laplace 変換した境界条件式(10), (11)より, 未知関数 $A_j(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は1つの新しい未知関数 $B_0(s, p)$ を用いて次のように表せる.

$$A_j(s, p) = \frac{k_j(s, p)\gamma_{1j}(s, p)}{k_0(s, p)} B_0(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (28)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} k_0(s, p) &= \sum_{j=1}^3 k_j(s, p) \\ k_1(s, p) &= b_2(s, p)f_3(s, p) - b_3(s, p)f_2(s, p) \\ k_2(s, p) &= b_3(s, p)f_1(s, p) - b_1(s, p)f_3(s, p) \\ k_3(s, p) &= b_1(s, p)f_2(s, p) - b_2(s, p)f_1(s, p) \\ f_j &= c_{44I} [\{\gamma_{1j}(s, p)\}^2 a_j(s, p) + 1] - e_{15} b_j \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (29)$$

新しい未知関数 $G(x, p)$ を次のように導入する⁽¹⁵⁾.

$$G(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u_{z1}^*(x, 0, p) & (a < x < b) \\ 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x < \infty) \end{cases} \quad (30)$$

式(28)を考慮して式(23)を式(30)に代入し, Fourier 逆変換することにより, $B_0(s, p)$ が次のように求まる.

$$B_0(s, p) = -\frac{1}{s} \int_a^b G(v, p) \sin(sv) dv \quad (31)$$

また, Laplace 変換された境界条件式(9)の第2式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_a^b G(v, p) dv = 0 \quad (32)$$

Laplace 変換された境界条件式(14) ~ (20)より, 未知関数 $B_j(s, p)$ ($j = 1, 2, \dots, 7$) が $G(v, p)$ を用いて次式で表される.

$$DB = R \quad (33)$$

ここに, D および R は付録1に示す $d_{ij}(s, p)$ および $R_i(s, p)$ ($i, j = 1, 2, \dots, 7$) を要素とする正方マトリクスおよび列ベクトルである. 式(33)より未知関数 $B_j(s, p)$ ($j = 1, 2, \dots, 7$) が次のように求まる.

$$B_j(s, p) = \sum_{i=1}^7 r_{ji}(s, p) R_i(s, p) \quad (j = 1, 2, \dots, 7) \quad (34)$$

ここに, $r_{ji}(s, p)$ ($i, j = 1, 2, \dots, 7$) は

$$r_{ji}(s, p) = \frac{D_{ij}(s, p)}{|D|} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \quad (35)$$

上式中, $|D|$ はマトリクス D の行列式, $D_{ij}(s, p)$ はマトリクス D の行列式における要素 $d_{ij}(s, p)$ ($i, j = 1, 2, \dots, 7$) の余因子である.

式(28),(31)および式(34)を用いると, Laplace 変換された境界条件式(9)の第1式より, 未知関数 $G(v, p)$ に関する次の特異積分方程式が得られる.

$$\int_a^b G(v, p) \left\{ \frac{1}{v-x} + \frac{1}{v+x} + M(v, x, p) \right\} dv = \frac{C_{33}}{c_{33I}} \frac{\sigma_0}{Z_0^\infty} \frac{\pi}{p} \quad (36)$$

式中の積分核 $M(v, x, p)$ および定数 Z_0^∞ は付録2に示す.

4. エネルギー密度係数

特異積分方程式(36)および補足の条件式(32)を Gauss-Jacobi⁽¹⁵⁾ の数値積分公式を用いて数値解析するために, 解の特異性を考慮して次の滑らかな関数 $\Psi(u, pc/c_2)$ を導入する.

$$G(v, p) = \sigma_0 \Psi \left(u, \frac{pc}{c_2} \right) \left\{ \frac{1}{(1-u)^{1/2}(1+u)^\omega} \right\} \quad (37)$$

ここに, $u = \{2v - (b+a)\}/(b-a)$, $c_2 = (c_{44I}/\rho_I)^{1/2}$ はせん断波の伝播速度であり, ω はき裂先端 $x=a$ におけるの応力特異性の次数である.

き裂先端 $x=a, b$ での動的応力拡大係数 $K_{Ia}(t)$, $K_{Ib}(t)$ は次のように得られる.

$$\left. \begin{aligned} K_{Ia}(t) &= \mu^* \sigma_0 \pi^{1/2} c^\omega \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Psi(-1, pc/c_2)}{p} \exp(pt) dp \\ K_{Ib}(t) &= \sigma_0 2^{1/2-\omega} (\pi c)^{1/2} Z_0^\infty \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Psi(1, pc/c_2)}{p} \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ここに, μ^* は付録3に示す定数である. また, き裂先端 $x=a, b$ での電束密度拡大係数 $K_{Da}(t)$, $K_{Db}(t)$ は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} K_{Da}(t) &= \frac{Z_D^\infty}{Z_0^\infty} K_{Ia}(t) \quad (a > 0) \\ K_{Db}(t) &= \frac{Z_D^\infty}{Z_0^\infty} K_{Ib}(t) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中の定数 Z_D^∞ は付録2に示す. さらに, き裂先端 $x=a, b$ における動的エネルギー密度係数⁽¹²⁾ $S_a(t)$, $S_b(t)$ は, $K_{Ia}(t)$, $K_{Ib}(t)$ および $K_{Da}(t)$, $K_{Db}(t)$ を用いて次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} S_a(t) &= A_{11} K_{Ia}(t)^2 + 2A_{14} K_{Ia}(t) K_{Da}(t) \\ &\quad + A_{44} K_{Da}(t)^2 \quad (a > 0) \\ S_b(t) &= A_{11} K_{Ib}(t)^2 + 2A_{14} K_{Ib}(t) K_{Db}(t) \\ &\quad + A_{44} K_{Db}(t)^2 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

上式中, A_{11} , A_{14} , A_{44} は材料定数とき裂面からの角度 θ のみに依存する係数である⁽¹²⁾.

5. 数値結果および考察

Table.1 Material properties of the piezoelectric and elastic materials.

	piezoelectric ($\delta = \text{I}$)	elastic ($\delta = \text{II}$)
$c_{11\delta}$ (GPa)	139	139
$c_{12\delta}$ (GPa)	77.8	54.1
$c_{13\delta}$ (GPa)	74.3	54.1
$c_{33\delta}$ (GPa)	113	139
$c_{44\delta}$ (GPa)	25.6	42.5
e_{31} (C/m ²)	-6.98	-
e_{33} (C/m ²)	13.8	-
e_{15} (C/m ²)	12.7	-
ϵ_{11} (10 ⁻¹⁰ C/Vm)	60.0	-
ϵ_{33} (10 ⁻¹⁰ C/Vm)	54.7	-
ρ_δ ($\times 10^3$ kg/m ³)	7.50	4.57

Fig.2 Dynamic energy density factor $S_a(t)$ of the internal crack for $h/c \rightarrow \infty$.

Fig.3 Dynamic energy density factor $S_b(t)$ of the internal crack for $h/c \rightarrow \infty$.

式(38)に Papoulis の数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁶⁾を適用し $\theta = 0^\circ$ の場合の動的エネルギー密度係数 $S_a(t)$, $S_b(t)$ の時間的挙動を明らかにする. 圧電セラミックス半無限体 $\delta = \text{I}$ および表面層 $\delta = \text{II}$ は表1に示す PZT-4, Titanium とし, $\mu = c_{44\text{II}}$, $\nu = 0.28$ である.

まず, き裂位置 $(a+b)/2c > 1.0$ である内部き裂の場合について検討する. 図2,3は, $h/c \rightarrow \infty$ と

した場合の無次元化された動的エネルギー密度係数 $(S_a(t), S_b(t))/\sigma_0^2 c(2c_{331})^{-1}$ の時間的挙動を $(a+b)/2c$ をパラメータとして示したグラフである。いずれの場合も時間の経過に伴い、動的エネルギー密度係数 $S_a(t), S_b(t)$ は急激に増大して、最大値に達した後、静的値に振動しながら漸近する。 $(a+b)/2c$ が減少するに伴いき裂先端からの散乱波と界面からの反射波との動的相互干渉が顕著になるため、き裂先端 $x=a$ における $S_a(t)$ の最大値は減少し、最大値に達するまでの時間も短くなる傾向を示す。また、き裂先端 $x=b$ における $S_b(t)$ も同様な傾向を示すが、界面からの距離が離れているため、 $S_b(t)$ におよぼす $(a+b)/2c$ の影響は、 $S_a(t)$ への影響に比べて小である。

Fig.4 Dynamic energy density factor $S_a(t)$ of the internal crack for $h/c = 0.1$.

Fig.5 Dynamic energy density factor $S_b(t)$ of the internal crack for $h/c = 0.1$.

図4,5は、 $h/c = 0.1$ とした場合の図2,3と同様のグラフである。き裂先端からの散乱波と界面および自由表面からの反射波とが相互干渉し、複雑な動的挙動を示しており、この動的相互干渉は $(a+b)/2c$ と h/c に依存する。表面層の厚さが比較的小さい $h/c = 0.1$ の場合には、自由表面からの反射波の影響が顕著になるため、 $(a+b)/2c$ の減少に伴い、 $S_a(t), S_b(t)$ の最大値は増大しており、図2,3と逆の傾向となる。

Fig.6 Dynamic stress intensity factor $K_{Ia}(t)$ of the terminated crack ($a/c = 0.0$).

Fig.7 Dynamic energy density factor $S_b(t)$ of the terminated crack for $a/c = 0.0$.

次に、き裂先端 $x=a$ が界面に到達した場合 ($a/c = 0$) について検討する。界面に到達したき裂先端についてはエネルギー密度係数が適用できないため、き裂先端 $x=a$ においては動的応力拡大係数により評価する。図6は、無次元化された動的応力拡大係数 $K_{Ia}(t)/\sigma_0 \pi^{1/2} c^\omega$ の時間的挙動に及ぼす h/c の影響を示したものであり、 $\omega = 0.412$ である⁽⁵⁾。図7は $S_b(t)/\sigma_0^2 c(2c_{331})^{-1}$ の時間的挙動を示したものである。 $K_{Ia}(t)/\sigma_0 \pi^{1/2} c^\omega$ は h/c の減少に伴って著しく増大し、 $S_b(t)$ に比べ、 h/c の影響をより早く顕著に受ける傾向を示す。

6. 結 言

本報は、表面層を有する圧電セラミックス半無限体の衝撃応答問題を厳密に理論解析したものである。解析には、Laplace-Fourier 二重積分変換法を用い、問題の解の特異積分方程式の解に導いて解く方法を採用した。数値 Laplace 逆変換法を適用し、界面に垂直に存在する微小き裂の動的応力拡大係数および動的エネルギー密度係数の時間的挙動に及ぼす幾何学的形状の影響を定量的に明らかにした。

付録 1

正方マトリクス D の非零要素 d_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 7$) は

$$\left. \begin{aligned} d_{1j}(s, p) &= -q_{1j}(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \\ d_{14}(s, p) &= d_{15}(s, p) = \{1 + \gamma_{22}(s, p)^2\} \mu / c_{44I} \\ d_{16}(s, p) &= d_{17}(s, p) = 2\gamma_{22}(s, p) \mu / c_{44I} \\ d_{2j}(s, p) &= q_{2j}(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \\ d_{24}(s, p) &= -d_{25}(s, p) = 2\gamma_{21}(s, p) \mu / c_{44I} \\ d_{26}(s, p) &= -d_{27}(s, p) = \{1 + \gamma_{22}(s, p)^2\} \mu / c_{44I} \\ d_{3j}(s, p) &= q_{3j}(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \\ d_{4j}(s, p) &= q_{4j}(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \\ d_{44}(s, p) &= \gamma_{21}(s, p) \\ d_{44}(s, p) &= -d_{45}(s, p) = \gamma_{21}(s, p) \\ d_{46}(s, p) &= -d_{47}(s, p) = 1 \\ d_{5j}(s, p) &= q_{5j}(s, p) \quad (j = 1, 2, 3) \\ d_{54}(s, p) &= d_{55}(s, p) = 1 \\ d_{56}(s, p) &= d_{57}(s, p) = \gamma_{22}(s, p) \\ d_{64}(s, p) &= \{1 + \gamma_{22}(s, p)^2\} \exp\{-s\gamma_{21}(s, p)h\} \\ d_{65}(s, p) &= \{1 + \gamma_{22}(s, p)^2\} \exp\{s\gamma_{21}(s, p)h\} \\ d_{66}(s, p) &= 2\gamma_{22}(s, p) \exp\{-s\gamma_{22}(s, p)h\} \\ d_{67}(s, p) &= 2\gamma_{22}(s, p) \exp\{s\gamma_{22}(s, p)h\} \\ d_{74}(s, p) &= 2\gamma_{21}(s, p) \exp\{-s\gamma_{22}(s, p)h\} \\ d_{75}(s, p) &= -2\gamma_{21}(s, p) \exp\{s\gamma_{22}(s, p)h\} \\ d_{76}(s, p) &= \{1 + \gamma_{22}(s, p)^2\} \exp\{-s\gamma_{22}(s, p)h\} \\ d_{77}(s, p) &= -\{1 + \gamma_{22}(s, p)^2\} \exp\{s\gamma_{22}(s, p)h\} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ここに, $q_{ij}(s, p)$ ($i = 0 \sim 5, j = 1, 2, 3$) は

$$\left. \begin{aligned} q_{0j}(s, p) &= c_{13I}\gamma'_{1j}(s, p)a'_j(s, p) \\ &\quad + c_{33I}/\gamma'_{1j}(s, p) - e_{33}b'_j(s, p)/\gamma'_{1j}(s, p) \\ q_{1j}(s, p) &= c_{11I}\gamma'_{1j}(s, p)a'_j(s, p) \\ &\quad + c_{13I}/\gamma'_{1j}(s, p) - e_{31}b'_j(s, p)/\gamma'_{1j}(s, p) \\ q_{2j}(s, p) &= c_{44I}\{a'_j(s, p) - 1\} + e_{15}b'_j(s, p) \\ q_{3j}(s, p) &= e_{15}\{a'_j(s, p) - 1\} - e_{11}b'_j(s, p) \\ q_{4j}(s, p) &= a'_j(s, p) \\ q_{5j}(s, p) &= 1/\gamma'_{1j}(s, p) \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (42)$$

列ベクトル R の非零要素 $R_i(s, p)$ ($j = 1, 2, \dots, 7$) は

$$R_i(s, p) = -\frac{1}{s} \int_a^b Q_i(v, s, p) G(v, p) dv \quad (i = 1, 5) \quad (43)$$

ここに, $Q_i(v, s, p)$ ($i = 1, 5$) は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} Q_1(v, s, p) &= \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^\infty}{k_0^\infty} p_{1j}^\infty \exp(-\frac{sv}{\gamma_{1j}^\infty}) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty \left[\frac{k_j(\eta, p)}{k_0(\eta, p)} \frac{\gamma_{1j}(\eta, p)^2 p_{1j}(\eta, p)}{s^2 + \{\eta\gamma_{1j}(\eta, p)\}^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_j^\infty}{k_0^\infty} \frac{\{\gamma_{1j}^\infty\}^2 p_{1j}^\infty}{s^2 + \{\eta\gamma_{1j}^\infty\}^2} \right] \eta \sin(\eta v) d\eta \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_5(v, s, p) &= \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^\infty}{k_0^\infty} \exp(-\frac{sv}{\gamma_{1j}^\infty}) \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty s^2 \left[\frac{k_j(\eta, p)}{k_0(\eta, p)} \frac{1}{s^2 + \{\eta\gamma_{1j}(\eta, p)\}^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_j^\infty}{k_0^\infty} \frac{1}{s^2 + \{\eta\gamma_{1j}^\infty\}^2} \right] \frac{\sin(\eta v)}{\eta} d\eta \quad (45) \end{aligned}$$

ここに, $p_{1j}(\eta, p)$ ($j = 1, 2, 3$) は

$$p_{1j}(\eta, p) = c_{11I}a_j(\eta, p) - c_{13I} + e_{31}b_j(\eta, p) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (46)$$

また, 定数 $k_0^\infty, k_j^\infty, \gamma_{1j}^\infty, p_{1j}^\infty$ は

$$\left. \begin{aligned} k_0^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} k_0(\eta, p) \\ k_j^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} k_j(\eta, p) \\ \gamma_{1j}^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \gamma_{1j}(\eta, p) \\ p_{1j}^\infty &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} p_{1j}(\eta, p) \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (47)$$

付録 2

積分核 $M(v, x, p)$ は次式となる.

$$M(v, x, p) = -\frac{2}{Z_0^\infty} \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty m_i(v, x, s, p) ds \quad (i = 1, 2, 3) \quad (48)$$

ここに, $m_i(v, x, s, p)$ ($i = 1, 2, 3$) は

$$\left. \begin{aligned} m_1(v, x, s, p) &= -\frac{1}{2} \{Z_0(s, p) - Z_0^\infty\} \\ &\quad \times [\sin\{s(v-x)\} + \sin\{s(v+x)\}] \\ m_2(v, x, s, p) &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{q_{0j}^\infty k_k^\infty}{k_0^\infty} (r_{j1}^\infty p_{1k}^\infty + r_{j5}^\infty) \\ &\quad \times \exp\left\{-s\left(\frac{v}{\gamma_{1k}^\infty} + \gamma_{1j}^\infty x\right)\right\} \\ m_3(v, x, s, p) &= \sum_{j=1}^3 q_{0j}(s, p) \\ &\quad \times [r_{j1}(s, p)Q_1(s, p) - r_{j5}(s, p)Q_5(s, p)] \\ &\quad \times \exp\{-s\gamma'_{1j}(s, p)x\} - m_2(v, x, s, p) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

上式中, 定数 q_{ij}^∞ ($i = 0 \sim 5$), r_{ji}^∞ ($i = 1, 5$) および γ_{1j}^∞ ($j = 1, 2, 3$) は

$$\left. \begin{aligned} q_{ij}^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} q_{ij}(s, p) \quad (i = 0 \sim 5) \\ r_{ji}^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} r_{ji}(s, p) \quad (i = 1, 5) \\ \gamma_{1j}^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma'_{1j}(s, p) \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (50)$$

また, 定数 Z_0^∞ および Z_D^∞ は

$$\left. \begin{aligned} Z_0^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} Z_0(s, p), \quad Z_D^\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} Z_D(s, p) \\ Z_0(s, p) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_{1j}(s, p)k_j(s, p)p_{0j}(s, p)}{k_0(s, p)} \\ Z_D(s, p) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_{1j}(s, p)k_j(s, p)p_{Dj}(s, p)}{k_0(s, p)} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

上式中の $p_{0j}(s, p)$, $p_{Dj}(s, p)$ は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} p_{0j}(s, p) &= c_{131}a_j(s, p) - c_{331} + \varepsilon_{33}b_j(s, p) \\ p_{Dj}(s, p) &= e_{31}a_j(s, p) - e_{33} + \varepsilon_{33}b_j(s, p) \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (52)$$

付 録 3

定数 μ^* は, $a > 0$ の場合は $\mu^* = -Z_0^\infty$, $a = 0$ の場合は次式で与えられる.

$$\mu^* = 2\mu \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{(\gamma_{1k}^\infty)^{1-\omega}}{\sin(\pi\omega)} \left(\beta_{1jk}^{(0)} + \omega \beta_{2jk}^{(0)} \right) \quad (53)$$

ここに, $\beta_{1jk}^{(0)}$, $\beta_{2jk}^{(0)}$ は

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1jk}^{(0)} &= \frac{k_k^\infty}{k_0^\infty} \left(r_{j1}^{(0)} p_{1k}^\infty + r_{j2}^{(0)} \right) \left\{ 2\delta_{1j}^{(0)} + (3 - \kappa)\delta_{3j}^{(0)} \right\} \\ \beta_{2jk}^{(0)} &= -\frac{2k_k^\infty}{k_0^\infty} \left(r_{j1}^{(0)} p_{1k}^\infty + r_{j2}^{(0)} \right) \delta_{3j}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (54)$$

上式中の定数 $r_{ji}^{(0)}$ ($i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$) および $\delta_{1j}^{(0)}$, $\delta_{3j}^{(0)}$ ($j = 1, 2, 3$) は

$$\left. \begin{aligned} r_{11}^{(0)} &= \lambda_{22}^{(0)} / (\lambda_{12}^{(0)} \lambda_{21}^{(0)} - \lambda_{11}^{(0)} \lambda_{22}^{(0)}) \\ r_{12}^{(0)} &= -\lambda_{12}^{(0)} / (\lambda_{12}^{(0)} \lambda_{21}^{(0)} - \lambda_{11}^{(0)} \lambda_{22}^{(0)}) \\ r_{21}^{(0)} &= -\lambda_{21}^{(0)} / (\lambda_{12}^{(0)} \lambda_{21}^{(0)} - \lambda_{11}^{(0)} \lambda_{22}^{(0)}) \\ r_{22}^{(0)} &= \lambda_{11}^{(0)} / (\lambda_{12}^{(0)} \lambda_{21}^{(0)} - \lambda_{11}^{(0)} \lambda_{22}^{(0)}) \\ r_{31}^{(0)} &= -(g_{31}^{(0)} r_{11}^{(0)} + g_{32}^{(0)} r_{21}^{(0)}) / g_{33}^{(0)} \\ r_{32}^{(0)} &= -(g_{31}^{(0)} r_{12}^{(0)} + g_{32}^{(0)} r_{22}^{(0)}) / g_{33}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1j}^{(0)} &= \{ \kappa q_{2j}^\infty - \mu(\kappa - 1)q_{4j}^\infty \} / \mu(1 + \kappa) \\ \delta_{3j}^{(0)} &= \{ q_{2j}^\infty - 2\mu q_{4j}^\infty \} / \mu(1 + \kappa) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

ここに, $\lambda_{ij}^{(0)}$ ($i, j = 1, 2$) および $g_{ij}^{(0)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) は

$$\lambda_{ij}^{(0)} = g_{ij}^{(0)} - g_{i3}^{(0)} g_{3j}^{(0)} / g_{33}^{(0)} \quad (i, j = 1, 2) \quad (57)$$

文 献

- (1) Rao, S.S. and Sunar, M., *Appl. Mech. Rev.*, **47** (1994), 113-123.
- (2) 仲町・飯星・槌谷, 機講論, No.01-27 (2001), 157-158.
- (3) 上辻・中村・上田, 機講論, No.01-27 (2001), 159-160.
- (4) Shindo, Y., Narita, F. and Watanabe, K., *Int. J. Eng. Sci.*, **38** (2000), 1-19.
- (5) Ueda, S., *Int. J. Frac.*, **114** (2002), 63-86.
- (6) 上田・金田, 機論, **68**-668, A(2002), 638-644.
- (7) Shindo, Y., Narita, F. and Ozawa, E., *Acta. Mech.*, **137** (1999), 99-107.
- (8) Chen, Z.T., Worswick, M.J., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **33** (2002), 173-184.
- (9) 上田, 機論, **67**-657, A(2001), 878-884.
- (10) Chen, Z.T. and Meguid, S.A., *Int. J. Solids Struct.*, **37** (2000), 6051-6062.
- (11) Ueda, S., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **38** (2002), 221-241.
- (12) Zuo, J.Z. and Sih, G.C., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **34** (2000), 17-33.
- (13) Sneddon, I.N. and Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York
- (14) Gupta, G.D., *Int. J. Solids Struct.*, **9** (1973), 1141-1154.
- (15) Erdgan, F., Gupta, G.D. and Cook, T.S., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by G.C.Sih), (1972), Noordhoff, Leyden
- (16) Papoulis, A., *J. Appl. Mathe.*, **14** (1957), 405-414