重合メッシュ法による熱応力解析*

(第1報, 解析手法の定式化)

座 古 勝^{*1}, 林 晋 也^{*2}
倉 敷 哲 生^{*1}, 久 保 太^{*3}

Thermal Stress Analysis by Mesh Superposition Method

(1st Report, Formulation of Mesh Superposition Method for Thermal Stress Analysis)

Masaru ZAKO^{*4}, Shinya HAYASHI,
Tetsusei KURASHIKI and Futoshi KUBO

^{*4} Department of Manufacturing Science, Osaka University,
2-1 Yamada-oka, Suita-shi, Osaka, 565-0871 Japan

It is well known that at the meso-scale, a fusion cast refractory usually exhibits local heterogeneities. During the fabrication or heating process, these heterogeneities generate stresses that might lead to failure. It is very necessary to investigate these microscopic stresses associated to the local heterogeneities. It is also difficult to analyze the microscopic stress using a traditional procedure such as the finite element method. This is mainly due to the fact that we cannot numerically solve the stress without considering the multi-scale problem, i.e. the coupling of macro- and meso-scale. In this paper we propose the use of the mesh superposition method, which is one of the effective multi-scale numerical methods, to analyze the correlation between the local and global behavior. The advantage of this method resides in the possibility of performing the stress analysis on both of the macro- and the mesostructures simultaneously by superimposing the local mesh that expresses the local heterogeneity, such as an inclusion, onto the global mesh that expresses the homogenous media. The results obtained by our proposed procedure and those obtained by the traditional method using a fine mesh were compared. The comparison revealed that the results of both procedures were very close. This validation proves that our proposed procedure has a good accuracy to justify its use instead of time consuming traditional method with a fine mesh.

Key Words: Local Heterogeneity, Computational Mechanics, Finite Element Method, Multi-Scale Problem, Mesh Superposition Method, Thermal Stress

1. 緒 言

材料中の不均一要素は材料の機械的特性に影響を与える。例えば、鑄造により作成される耐火物等には、メソスケールで観察すれば空孔やガラスが支配的な部分が存在する。また、ミクロに観察すれば極微量に製造中に混入する介在物や温度履歴により異なった組織が観察される。ミクロスケールでの異なる組織は材料物性に影響を与え、メソスケールでの局所的不均質部は材料の破壊に影響を与える。セラミックスである耐火物は一般に優れた硬度・弾性・耐食性を有する反面、

脆性材料としても知られており、特に熱衝撃に対しては非常に弱い。これは、前述した材料中の不均質部によるものであると考えられる。この種の挙動はセラミックスだけでなく、構造物に多く見受けられる。従って、材料中の不均質部が強度に及ぼす影響をより正確に評価することが必要とされ、それらを用いて温度条件制御に適用することで致命的な破壊を防ぐことができると考える。

コンピュータ技術の進歩に伴い、数値解析手法が、理論解析・実験に次ぐ第3の評価手法として確立されている。そして、これまで実験の補助的・検証手段として用いられていた数値解析が、実施困難な実験に変わる手段として採用され始めている。従来では等価物性値を用いることでミクロ構造を考慮しない解析がなされてきたが、近年、微視的構造内の評価が要求されるとともに、ミクロとマクロという2つの異なるスケ

* 原稿受付 2002 年 11 月 21 日。

^{*1} 正員, 大阪大学大学院工学研究科(☎ 565-0871 吹田市山田丘 2-1)。

^{*2} 旭硝子株式会社高砂工場 CRT ガラス部製造課(☎ 676-8655 高砂市梅井 5-6-1)。

^{*3} 大阪大学大学院工学研究科(☎ 565-0871 吹田市山田丘 2-1)。
E-mail: zako@mapse.eng.osaka-u.ac.jp

ここで, T^L および ΔT^L は $\{\mathbf{u}^L\}$ と同様, 局所領域の詳細な温度場, 温度変化量を表現する役割を有する. 従って, 熱ひずみベクトル $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ は次のように表される.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\} = \begin{cases} \{\boldsymbol{\varepsilon}_t^G\} = \alpha^G \Delta T^G & \text{in } \Omega^G \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}_t^L\} = \alpha^L (\Delta T^G + \Delta T^L) & \text{in } \Omega^L \end{cases} \quad (9)$$

式(6)で示したひずみに対し, 応力-ひずみマトリックス $[\mathbf{D}]$ を用い, 応力ベクトル $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ について整理すると式(10)を得る.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{cases} [\mathbf{D}^G](\{\boldsymbol{\varepsilon}^G\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_t^G\}) & \text{in } \Omega^G \\ [\mathbf{D}^L](\{\boldsymbol{\varepsilon}^G\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}^L\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_t^L\}) & \text{in } \Omega^L \end{cases} \quad (10)$$

さらに, 構造体に物体力が作用しない場合の仮想仕事の原理は以下のように表すことができる.

$$\int_{\Omega} \delta \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega = \int_{\Gamma_s} \delta \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{t}_s\} d\Gamma \quad (11)$$

ただし, $\{\mathbf{t}_s\}$ は表面力ベクトル, $\delta\{\ast\}$ は任意のベクトル $\{\ast\}$ の仮想変化量を示す. 以上より, 式(11)に式(3)-(5), 式(9) および式(10) を代入し整理すると平衡方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}^G] & [\mathbf{K}^{GL}] \\ [\mathbf{K}^{LG}] & [\mathbf{K}^L] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{d}^G\} \\ \{\mathbf{d}^L\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_s^G\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_t^G\} \\ \{\mathbf{F}_t^L\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで, $[\mathbf{K}]$ は剛性マトリックス, $[\mathbf{K}^{GL}]$ は大域メッシュと局所メッシュの相関を表す剛性マトリックス, $\{\mathbf{F}_s^G\}$ は大域メッシュにおける表面力による節点荷重ベクトル, $\{\mathbf{F}_t\}$ は熱ひずみによる見かけの節点荷重ベクトルである. これらは具体的には式(13)-(18)のように表される.

$$[\mathbf{K}^G] = \int_{\Omega^G} [\mathbf{B}^G]^T [\mathbf{D}^G] [\mathbf{B}^G] d\Omega + \int_{\Omega^L} [\mathbf{B}^G]^T [\mathbf{D}^L] [\mathbf{B}^G] d\Omega \quad (13)$$

$$[\mathbf{K}^L] = \int_{\Omega^L} [\mathbf{B}^L]^T [\mathbf{D}^L] [\mathbf{B}^L] d\Omega \quad (14)$$

$$[\mathbf{K}^{GL}] = [\mathbf{K}^{LG}]^T = \int_{\Omega^L} [\mathbf{B}^G]^T [\mathbf{D}^L] [\mathbf{B}^L] d\Omega \quad (15)$$

$$\{\mathbf{F}_s^G\} = \int_{\Gamma_s} [\mathbf{N}^G] \{\mathbf{t}_s\} d\Gamma \quad (16)$$

$$\{\mathbf{F}_t^G\} = \int_{\Omega^G} [\mathbf{B}^G]^T [\mathbf{D}^G] \{\boldsymbol{\varepsilon}_t^G\} d\Omega + \int_{\Omega^L} [\mathbf{B}^G]^T [\mathbf{D}^L] \{\boldsymbol{\varepsilon}_t^L\} d\Omega \quad (17)$$

$$\{\mathbf{F}_t^L\} = \int_{\Omega^L} [\mathbf{B}^L]^T [\mathbf{D}^L] \{\boldsymbol{\varepsilon}_t^L\} d\Omega \quad (18)$$

2・2 計算手法 解析では最終的には式(12)で表される連立方程式を解くことになる. この際, $[\mathbf{K}^L]$, $\{\mathbf{F}_s^G\}$ と $\{\mathbf{F}_t\}$ は従来の有限要素法の剛性マトリックス, 荷重ベクトルと同様に扱うことができるが, それ以外の計算については従来の有限要素法とは異なる. そこで, 以下にそれらの計算手法について述べる.

まず, $[\mathbf{K}^{GL}]$ の計算において問題となるのが $[\mathbf{B}^G]$ である. $[\mathbf{K}^{GL}]$ の積分は局所領域で行うため, 局所メッシュの要素ごとにガウス積分を行う. しかし, ガウス積分点は局所メッシュの要素の正規化座標系で定義されているため, $[\mathbf{B}^G]$ を直接求めることは不可能である. そこで, 局所領域の要素の正規化座標系でのガウス積分点の座標を全体座標系に変換し, その後, そのガウス積分点が含まれる大域領域の要素の正規化座標系へ変換することにより $[\mathbf{B}^G]$ を求める. 通常, この全体座標系から大域領域の要素の正規化座標への変換は陽に表現できず, 探索を行うことで変換を可能にする⁶⁾. しかし, 大域メッシュに立方体要素を用いることにより, 全体座標系での局所領域の要素のガウス積分点から大域領域の要素の正規化座標への変換は陽に表すことが可能になるため, 本報では大域メッシュは立方体要素を用いてモデリングすることとする.

次に $[\mathbf{K}^G]$ の計算においては, $[\mathbf{D}^G]$ と $[\mathbf{D}^L]$ が同じ場合 ($[\mathbf{D}^G] = [\mathbf{D}^L] = [\mathbf{D}]$), 式(13) は以下のように変形でき, 従来の有限要素法における剛性マトリックスと同じになるため, 従来と同様に計算することが可能である.

$$[\mathbf{K}^G] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^G]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^G] d\Omega \quad (19)$$

しかし, $[\mathbf{D}^G]$ と $[\mathbf{D}^L]$ が異なる場合には, 大域領域と局所領域を分けて計算をする必要がある. ここで, 便宜的に $[\mathbf{D}^G]$ と $[\mathbf{D}^L]$ が異なる場合にも式(19)と表し, この $[\mathbf{D}]$ の取扱いについて考える. この取扱いとして以下の3つの手法が考えられる.

(a) 大域メッシュ要素の積分点に局所メッシュ要素が存在する場合は局所メッシュの応力-ひずみマトリックスを, それ以外の場合は大域メッシュの応力-ひずみマトリックスを用いる.

(b) 大域メッシュの応力-ひずみマトリックスを用いる.

(c) 均質化された応力-ひずみマトリックスを用いる.

(a) の手法はガウス積分点と局所メッシュの要素の位置関係に依存するが, 局所メッシュの物性を考慮することが可能である. (b) の手法は大域メッシュの物性と異なる物性を持つ局所メッシュ領域が大域メッシュの要素に比べ小さい場合は問題ないが, 大きくなると影響

がある。(c)の手法はガウス積分点の位置に依存することなく局所メッシュの物性を反映させることが可能である。大域メッシュの物性値と局所メッシュの物性値の差が小さい場合の弾性解析について、(b)と(c)の両手法には優位差がないことが報告されている⁶⁾。そこで本報では、単純にメッシュを重ねるということに重点を置いたため(b)の手法を採用した。

3. 精度検証

3・1 解析モデル 重合メッシュ法の有効性を確かめるため検証解析を行った。検証モデルとして図2に示すような中心部に球形介在物を含む直方体を想定し、

Fig. 2 The analytical model

(a) Global mesh

(b) Local mesh

(c) Local mesh onto global mesh

Fig. 3 The meshes with mesh superposition method

図2に示すモデルに対して重合メッシュ法による解析結果と詳細メッシュを用いた従来の有限要素法を用いた解析結果を比較することにより、数値実験的に精度検証を行った。重合メッシュ法におけるメッシュを図3に示す。(a)は大域メッシュ、(b)は局所メッシュ、(c)は大域メッシュに局所メッシュを重ね合わせた状態である。また、詳細メッシュを図4に示す。

検証解析は大域メッシュと局所メッシュの弾性係数の違いによる解析誤差への影響を調査するために弾性解析を、大域メッシュと局所メッシュの線膨張係数の違いによる解析誤差への影響を調査するために熱応力解析を行った。解析に使用した基準となる母材料の物性値を表1に示す。

3・2 弾性解析 介在物の弾性率を表1に示す母材の弾性率の1/10とし、境界条件として大域メッシュの

2535 element, 3136 nodes

Fig. 4 Fine mesh with traditional method

Table 1 Material properties

Young's modulus (GPa)	70.0
Poisson's ratio	0.3
Thermal expansion (ppm/K)	23.0

Fig. 5 Distribution of α_x in global mesh ($x=60.0\text{mm}$)

(a) Local mesh

(b) Fine mesh

Fig. 6 Distribution of α_x ($x=50.5\text{mm}$)

x方向の一端を固定，一方に強制変位 1mm (1%ひずみ) を与えた．解析結果を図 5-9 に示す．図 5 は大域メッシュの $x=60.0$ における断面の α_x である．図 6-9 はそれ

Fig. 7 Distribution of α_x ($x=50.5\text{mm}$)

Fig. 8 Distribution of τ_{xy} ($x=50.5\text{mm}$)

Fig. 9 Distribution of τ_{yz} ($x=50.5\text{mm}$)

Fig. 10 Comparison of α_x

それ $x=50.5$ における断面の α_x , α_y , τ_{xy} であり，(a) は局所メッシュ，(b) は詳細メッシュの結果である．

次に，母材と介在物との弾性率の比を変化させた場合の重合メッシュ法による解析と従来の有限要素法との誤差を調査した．誤差評価法は，重合メッシュ法による局所メッシュの解析結果を従来の有限要素法による解析結果で除することで行った．結果を図 10 に示す．

Fig. 11 Distribution of α_x in global mesh ($x=60.0\text{mm}$)

Fig. 12 Distribution of α_x ($x=50.5\text{mm}$)

Fig. 13 Distribution of α_y ($x=50.5\text{mm}$)

Fig. 14 Distribution of τ_{xy} ($x=50.5\text{mm}$)

評価点は中心付近の節点($x=49.444$, $y=21.944$, $z=21.944$)である。介在物の弾性率が母材よりも小さい場合には良好に一致するが、大きい場合には若干の誤差が生じることが分かる。

3・3 熱応力解析 介在物の線膨張係数を本解析の対象としている電鍍セラミックスを考慮して表1に示す線膨張係数の6分の1とし、境界条件としてx方向の両端を固定し、温度変化 $\Delta T=-100\text{K}$ を与えた。解析結果を図11-15に示す。図11は大域メッシュの $x=60.0$ における断面の σ_x である。図12-15はそれぞれx方向の中央付近($x=50.5$)における断面の σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} であり、(a)は局所メッシュ、(b)は詳細メッシュの結果である。また、母材と介在物との線膨張係数との比を変化させた場合の重合メッシュ法による解析と従来の有限要素法との誤差を調査した。誤差評価の方法は図10と同じ方法を用いた。結果を図16に示す。評価点は弾性解析と同様である。

Fig. 15 Distribution of τ_{yz} ($x=50.5\text{mm}$)

Fig. 16 Comparison of α

3・4 考察 図5あるいは図11から弾性解析や熱応力解析において重合メッシュ法を用いることにより、局所メッシュの物性値の影響が大域メッシュにも現れていることがわかる。また、弾性解析の結果である図6-9あるいは熱応力解析の結果である図12-15から、重合メッシュ法による解析結果は従来の有限要素法による解析結果と非常によく一致しており、重合メッシュ法の有効性を示していると考ええる。

ヤング率の比率による誤差の影響としては演算時の数値誤差やメッシュサイズによる誤差、またガウス積分点の位置からくる誤差によるものと考ええる。

4. 結 言

本報では、局所的不均質部を含む材料の熱処理時の応力評価を目的として、重合メッシュ法を用いたマルチスケール解析手法を提案した。これまで例を見なかった重合メッシュ法の熱問題に対して定式化を行った。内部に球形介在物が存在するような矩形構造物を想定し、詳細分割したメッシュに対する従来の有限要素法から得た解析解との比較により精度検証を行い、重合メッシュ法の有効性を示した。よって本報で提案した重合メッシュ法による熱応力解析システムは、従来の解析手法では困難であったマルチスケール解析に有効な手法であると考ええる。

文 献

- (1) Guedes, J., M. and Kikuchi, N., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **83**-2 (1990-10), 143-198
- (2) 座古勝, 藤原誠, 繊維機械学会誌 (論文集), **54**-1 (2000-10), 45-52
- (3) Belytschko, T., Fish, J. and Bayliss, A., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **81**-1 (1990-7), 71-89
- (4) Fish, J. and Guttal, R., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**-21 (1996-11), 3641-3662
- (5) 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣, 日本機械学会論文集, **68**-668, A (2002-4), 603-610
- (6) 高野直樹, 座古勝, 石園学, 日本機械学会論文集, **66**-642, A (2000-2), 220-226