確率論的損傷累積モデルに基づく Mode I 疲労き裂の伝ば機構*

伊 原 千 秋^{*1}, 田 中 武 之^{*2}Mode I Fatigue Crack Propagation Mechanism
Based on Stochastic Accumulation ModelChiaki IHARA^{*3} and Takeyuki TANAKA^{*3} Kyoto University (Emeritus), 18 Okazaki-Tennocho, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8335 Japan

The mechanism of mode I fatigue crack propagation that the crack propagation consists of the initiation of the cleavage mode crack and the opening of it is proposed by the use of renewal stochastic damage accumulation model for crack propagation, in which the parameters are explained based on the dislocation density and the elastic energy of dislocation. The calculated results of ΔK_{eff} for da/dn agree with the experimental ones. ΔK_{eff} is calculated under the condition that the energy of cleavage crack initiation is equal to the one given from the outside. The plastic zone size is calculated in consideration with the number of dislocation on the each slip line contained in it.

Key Words: Mode I Fatigue Crack Propagation, Stochastic Damage Accumulation Model, Cleavage Crack Initiation, Crack Opening, Slip Deformation

1. 結 論

約 20 年前, 著者らの一人およびその共同研究者が, 疲労き裂伝ばに対する確率論的損傷累積モデルを提案した^①. そのモデルは Oh によって提案された最弱リンクモデル^②に端を発する. Oh のモデルでは, き裂先端から前方に並んだ材料の微小な要素に, 繰り返し応力のもとで損傷が累積すると考える. そして, ある要素に累積した損傷が許容値を越えると, その要素は破壊し, き裂はその破壊した要素まで進むとした. さらに, 要素の強度は確率変数とし, その分布関数は適当に仮定され, その結果, き裂伝ば則が導かれた. しかし, このモデルでは, (1)き裂が 1 回伝ばするのに必要な繰り返し数が連続値である. (2)分布関数の漸近形が要素の大きさに比例し, その後, 要素の大きさを 0 に移行して, 伝ば速度が発散するという不自然さが現れる. そこで, 鶴井ら^③は繰り返し数は離散値のままとし, 要素の大きさも有限にするよう修正した. しかし, このモデルでも, Oh のモデル同様, 分布関数の形は適当に仮定され, 何ら物理的な観点から導かれたものではなかった.

そこで, 前述の論文^④では, 各要素の強度の分布関

数を, 疲労き裂発生分布^⑤を求める際に用いたものと同様に, 転位の増殖によって損傷が累積するというモデルから導いた. その上, き裂先端付近の損傷の著しい領域は 2 次元的広がりをもつと考えられることから, 前述までの 1 次元モデルを 2 次元に拡張した. かくして, (1)き裂伝ば速度が応力拡大係数のべきに比例するという結果が導かれ, 同時に, (2)間欠的に進むき裂が 1 回に進む距離, および(3)き裂が 1 回進むのに要する繰り返し数等が求められ, ストライエーションの発生が理論的に導かれることが明らかになった. しかし, このモデルも一つの数学的モデルであって, その中で用いられた parameter の物理的意味が十分明らかにされることなく, また当時, き裂伝ば過程の破面観察などから, き裂伝ば機構を模式的に表したものはあったが^{⑥, ⑦}, き裂先端付近のすべり変形の詳細を示すようなものはなく, われわれのモデルもその後手をつけないままであった.

ところが最近この二つに進展がみられた. その一つは疲労き裂発生に対する確率論的損傷累積モデルの物理的意味が明らかになった^⑧ことである. すなわち, (1)疲労損傷は転位の形で累積される. (2)き裂発生時のエネルギーが転位密度を含む形で表される. (3)き裂発生までの過程はミクロ現象で, すべり帯き裂の発生がミクロ領域とマクロ領域の接点である, ということである. さらに, 実験的には次のような進展がみられた. すなわち, 菅田ら^⑨が mode I で伝ばする疲労

* 原稿受付 2002 年 11 月 6 日.

^{*1} 正員, 京都大学名誉教授 (〒606-8335 京都市左京区岡崎天王町 18).^{*2} 福井県立大学情報センター (〒910-1195 福井県吉田郡松岡町兼定島 4-1-1).

E-mail: ihara@mail.taishitsu.or.jp

き裂先端近傍の材料表面を原子間力顕微鏡(AFM)により観察し、き裂先端近傍のすべり変形と疲労き裂の伝ば挙動の関係を考察した。それによると、(1)疲労き裂縁から多数のすべり線が発生しているが、すべり線はき裂先端より後方のみで発生し、き裂先端で交差する二つのすべり系が荷重 1 サイクル中に作動することにより、き裂は伝ばする。(2)負荷過程では、直前の除荷過程で閉口したき裂の先端よりすべりが作動し、閉口している部分が再び開口をはじめる。そして、前回の最大負荷時のき裂先端まで開口した後、さらに前方にすべりが生じることにより、新しくき裂が開口、伝ばする、などが明らかになった。

以上の事情をふまえて、この論文では、伝ばモデル中の parameter に転位論に基づく物理的意味を付与し、これを用いて菅田ら⁹⁾の観察結果に矛盾しないような mode I 疲労き裂の伝ば機構を提案したい。 ΔK_{eff} もエネルギーの立場から計算され、また、塑性域の大きさも転位との関係から求められた。

2. 疲労き裂の伝ばモデル

ここでは、前述のモデル¹⁰⁾で、き裂伝ば機構を説明するため、モデルの基本的な形を簡単に述べるとともに、parameter に物理的な意味を与える。

繰り返し応力のもとでは、き裂先端の塑性域内には多くのすべり帯の交差により、図1のような損傷の著しい領域 *D* (破壊進行域) が現れるが、この領域を図のように大きさ d_0 の小さい要素に分割し、き裂先端を原点として、き裂の主な伝ば方向を *x* 軸、それに垂直に *z* 軸を決める。原点から *x* 方向に数えて *i* 番目、*z* 軸の正の方向に *j* 番目 ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$) の要素を (*i, j*) 要素とする。これらの各要素に損傷が確率的に累積し、*n* サイクル経過したときに、他の要素にさきがけて、ある 1 つの要素 (*i, j*) 内に蓄積された損傷が許容限度 *U* を越えると、その要素が破壊され、き裂がその要素まで進むと考える。すなわち、*n* 回の応力繰り返しでき裂は *x* 方向に長さ id_0 だけ進んだことになる。また、要素に蓄積される損傷量は確率変数であると考え、平均 $\sigma(i, j)$ の指数分布にしたがうとする。ところで、損傷はき裂に近いほど蓄積されやすく、領域 *D* の外部ではほとんど蓄積されないと考えられる。したがって、1 サイクルあたりに 1 つの要素 (*i, j*) に累積する損傷の平均値 $\sigma(i, j)$ は i, j の増加とともに減少し、

$$\sigma(i, j) = c_0 \exp\left(-\frac{d_0}{w}i - \frac{d_0}{2w}|j|\right) \quad (1)$$

の形になるとする。*w* は領域 *D* の *x* 方向の大きさ、 $2w$ は *z* 方向の大きさとし、 c_0 は定数とする。われわれの

モデルに示された方法によって、 $\frac{1}{d_0} \frac{da}{dn}$ (*a* はき裂長さ) と $\frac{w}{d_0}$ の関係を parameter U/c_0 のいくつかの値に

対して求めると、図 2 のようになる。また、き裂が 1 回に進む平均距離 $\langle X \rangle$ 、およびき裂が 1 回進むに要する

平均繰り返し数 $\langle N \rangle$ と、 $\frac{w}{d_0}$ の関係をいくつかの U/c_0 の値に対して求めたのが、それぞれ、図 3、図 4 である。図 2 から U/c_0 のどの値に対してもき裂伝ば速度が *w* のべきにほぼ比例することがわかる。また、図 4 からき裂が 1 回進むに要する平均繰り返し数 $\langle N \rangle$ が *w* の増加とともに 1 回になり、ストライエーションが現れることが示される。

つぎにわれわれの一連のモデルでは、転位が主役を演じていることから $d_0 = 1.3 \times 10^{-9}$ m (これは転位幅に相当する) を採用し、またき裂発生モデルにしたがって

$$c_0 = 2S_y \cdot 2\varepsilon_p \quad (2)$$

$$U = Gb^2 \rho_U \frac{l_C}{l_0} \exp\left(-\frac{Gb}{l_0 S}\right) \Bigg|_{S=S_y}^{l_0=l_C} \\ = Gb^2 e^{-1} \rho_U \quad (3)$$

Fig. 1. Schematic illustration of plastic zone and region *D* ahead crack tip.

とおく。ここで、 U はき裂発生時に D 内に累積する増殖源としての転位双極子の単位体積当りのエネルギー、 G は剛性率、 b はバーガースベクトル、 l_0 は転位セグメント長さ (確率変数) の平均値、 l_c は増殖源としての転位セグメントの最小値

$$l_c = \delta G b / S \quad \dots \dots \dots (4)$$

ρ_l はき裂発生時の転位双極子密度、 S_y は降伏応力、 S は応力振幅、 ϵ_p は下降伏点到達時の塑性歪みである。

(δ は 1 オーダーの値)

3. き裂伝ば機構

負荷過程を菅田ら®にしたがって 4 段階に分ける。

①—③段階では直前の負荷でき裂になった部分が、負荷によって徐々に開口し、③に到って、そのき裂先端領域 D に作用する負荷エネルギー $2w^2a_0$ によって、領域 D 内の損傷が空孔型転位双極子の集まりとして $2w^2U$ のエネルギー量に達する。[図 5(a)]。③—④段階では、図 5(b) のように、 D 内にあるすべり線 (間隔 d_0) に沿

Fig. 2. $(1/d_0)(da/dn)$ versus w/d_0 .

Fig. 3. $(1/d_0)\langle X \rangle$ versus w/d_0 .

Fig. 4. $\langle N \rangle$ versus w/d_0 .

って、転位双極子がならば、固執すべり帯内の転位双極子の振る舞い⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾から考えても、すべり帯内ではこのような状態が現れると思われる。なお、前述したモデルでは 1 回に伝ばするき裂長さは平均 $\langle X \rangle$ であるから、③-④段階では、③で D 内に存在した転位双極子($2w^2\rho_U$)がすべてき裂先端から $\langle X \rangle$ の距離内で交わる上下のすべり線上に並ぶことは高い確率で実現すると考えられる。すべり線の数に上下それぞれ $\langle X \rangle/d_0$ である。したがって、一つのすべり線に並ぶ

転位双極子の数は、 $w^2\rho_U/\langle X \rangle/d_0$ 。すなわち、一つのすべり線上の転位の数 m は

$$m = \frac{1}{2} \frac{w^2\rho_U}{\langle X \rangle/d_0} \quad (5)$$

最終④に到ると、図 5(c)に矢印で示すような方向に転位のすべりが起こり、(1) き裂伝ばと反対方向に移動する各すべり線上の転位は交差点で Cottrell の不動転位を形成し、後で示すように、き裂の前方に d_0 ($=13 \times 10^{-9}$ m) のへき開き裂が多数生じ、同時に(2) き裂の伝ば方向に動く転位は

$$\frac{S_y/2}{G} \times w_p = md_0 \quad (6)$$

にしたがって、長さ w_p のすべり帯上を D の外部へとすべり、発生したき裂を開口させる。式(6)はせん断

変位 (左辺) が堆積した m 個の転位によって生じた塑性変位 (右辺) にほぼ等しいことを示す。 d_0 は転位幅 13×10^{-9} m である。また、 w_p の大きさは破壊進行域の大きさ w のほぼ 100 倍に等しく、これがき裂先端の塑性域であると考えられる。

$$w_p = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Delta K_{eff}}{2S_y} \right)^2 \quad (7)$$

とおくと、 $\frac{da}{dn}$ と w の関係から、 $\frac{da}{dn}$ に対する ΔK_{eff} がえられる。き裂先端開口変位範囲 $\Delta\phi_i$ は

$$\Delta\phi_i = \frac{0.73\Delta K_{eff}^2}{E\sigma_Y} \quad (8)$$

とかける⁽¹¹⁾ので、エネルギー解放率 g は

$$g = S_y\Delta\phi_i = \frac{0.73\Delta K_{eff}^2}{E} \quad (9)$$

と表される。ところで、き裂が $\langle X \rangle$ だけ進むに要するエネルギー $g \cdot \langle X \rangle$ は図 5(a)のように D 内に累積したエネルギーに等しいので、

$$g \cdot \langle X \rangle = 2w^2U \quad (10)$$

が成立するはずであるが、これは ρ_U を決める一つの条件式になる。

つぎに、へき開き裂発生について考える。上述のよ

Fig. 5. Schematic illustration of fatigue crack propagation process.*

* 図1の領域Dとすべり帯の存在を考慮した図5の領域Dは、面積が等しく、形の異なる要素から成り立っているので、両者に差異はない。

うに [図 5(c)], き裂進行方向と反対の向きにすべり線上を移動する転位は, すべり線が交差する点で不動転位となり, そこにへき開き裂が発生することは Cottrell によって解析されている⁽¹²⁾. その場合, 発生するき裂の長さ a は

$$a = \frac{2G}{\pi(1-\nu)S_Y^2} \left\{ \left(2\gamma_S - \frac{m_0 b S_Y}{2} \right) \pm \sqrt{2\gamma_S(2\gamma_S - m_0 b S_Y)} \right\} \quad (11)$$

で与えられる. ここで, γ_S は表面エネルギー, m_0 は合体する転位の数, $\nu=0.3$ である. この式から, $a = d_0$ ($=1.3 \times 10^{-9}$ m) のき裂が発生するために, 合体する転位の数 m_0 を求め, これを次式に代入して, 長さ d_0 のき裂の発生エネルギー W を求める⁽¹²⁾.

$$W = \frac{Gm_0^2 b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \left(\frac{4R}{d_0} \right) + 2\gamma_S d_0 - \frac{\pi(1-\nu)S_Y^2 d_0^2}{8G} - \frac{S_Y m_0 b d_0}{2} \quad (12)$$

ここで, R は転位場の有効半径である.

さらに, $\frac{W}{d_0} \langle X \rangle$ は長さ $\langle X \rangle$ のき裂を発生させるエネルギーであり, $\mathbf{g} \cdot \langle X \rangle$ は長さ $\langle X \rangle$ のき裂を進展させる (すなわち, き裂を発生させ, 同時に開口させる) エネルギーであることから, もし図 6 上で,

$$\frac{W}{d_0} \langle X \rangle = \mathbf{g} \cdot \langle X \rangle \quad (13)$$

なる点を求めると, 式(9)を用いて, この式は

$$\frac{W}{d_0} = \frac{0.73 \Delta K_{eff}^2}{E} \quad (14)$$

とかけるが, 式(14)から得られる ΔK_{eff} は外部から与えられたエネルギーがすべてき裂発生のために消費され, き裂が開口しない ΔK_{eff} の限界値を与えることになり, これが $\Delta K_{eff th}$ であると考えられる. 実験で得られた $\Delta K_{eff th}$ は

$$\Delta K_{eff th} = 1.64 \times 10^{-5} E \quad (15)$$

であるが⁽¹³⁾, 式(14)から得られる ΔK_{eff} がこれに等しくなることは次節で数値的に明らかにされる.

なお, ストライエーションの破面観察で重要なことは, 相手破面の凸部同志, 凹部同志が対向していることであるが, 上述のようなへき開き裂の発生, 開口というき裂伝ば機構は, この状況の実現を可能にすると思われる.

4. 計算結果ならびに実験値との比較

ここでは, 2, 3 節にしたがって, 具体的な計算例を示す. 比較のために用いられるのは, 3 % シリコン鉄における下限界近傍の疲労き裂伝ば試験結果⁽¹⁴⁾である. 化学成分, 機械的性質はそれぞれ表 1, 2 に示される.

まず, 式(2)において, $\varepsilon_p = 0.5\%$ とすると

Table 1. Chemical composition of material (Wt %)

C	Si	Mn	P	S	Al
0.007	3.02	0.15	0.013	0.004	0.46

Table 2. Mechanical properties of material

Yield strength S_Y (MPa)	Tensile strength S_B (MPa)	Reduction of area ϕ (%)
431	576	40.5

Table 3. The calculated values based on our model

da/dn m/cycle	5.77×10^{-10}	1×10^{-9}	1×10^{-8}	2×10^{-7}	9.24×10^{-7}
w (m)	3.2×10^{-8}	5.07×10^{-8}	2.24×10^{-7}	1.9×10^{-6}	5.32×10^{-6}
$\langle X \rangle$ (m)	4.19×10^{-9}	6.34×10^{-9}	2.94×10^{-8}	2.57×10^{-7}	9.0×10^{-7}
$\langle N \rangle$	6.4	5.4	3.5	12	1
m	7.2	11.8	50	412	922
w_p (m)	3.6×10^{-6}	5.92×10^{-6}	2.5×10^{-5}	2.07×10^{-4}	4.63×10^{-4}
ΔK_{eff}	3.54	4.54	9.36	26.83	40.2
$2w^2 U$ (J/m)	1.78×10^{-7}	4.47×10^{-7}	8.37×10^{-6}	6.28×10^{-4}	4.93×10^{-3}
$\mathbf{g} \cdot \langle X \rangle$ (J/m)	1.78×10^{-7}	4.42×10^{-7}	8.70×10^{-6}	6.25×10^{-4}	4.92×10^{-3}
$\frac{W}{d_0} \langle X \rangle$ (J/m)	1.78×10^{-7}	2.69×10^{-7}	1.25×10^{-6}	1.09×10^{-5}	3.82×10^{-5}

$$c_0 = 8.62 \times 10^6 \text{ (J/m}^3\text{)}$$

また, $\rho_U = 4.51 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$, $G = 8.3 \times 10^4 \text{ MPa}$,
 $b = 2.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ として, 式(3)より,

$$U = 8.7 \times 10^7 \text{ (J/m}^3\text{)}$$

したがって, $U/c_0 \approx 10$.

今, 例として, $\frac{da}{dn} = 1 \times 10^{-9} \text{ m/cycle}$ の場合を考え

る. $d_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{ m}$ として, 図2より

$$w = 5.07 \times 10^{-8} \text{ (m)}$$

が得られ, これを用いると, 図3より

$$\langle X \rangle = 6.34 \times 10^{-9} \text{ (m)}$$

が得られる. 図5(a)で領域Dの上半分に含まれる転位
 双極子の数は

$$w^2 \rho_U = (5.07 \times 10^{-8})^2 \times 4.51 \times 10^{16} = 116$$

き裂 $\langle X \rangle$ を発生させるすべり帯内の転位双極子の列
 の数は

$$\frac{\langle X \rangle}{d_0} \approx 4.9$$

したがって, 図5(b)に示される一つの列の転位双極子
 の数は

Fig. 6. Values of $g \cdot \langle X \rangle$ and $\frac{W}{d_0} \cdot \langle X \rangle$ for da/dn .

$$\frac{116}{4.9} \approx 23.7$$

すなわち, 1列に並ぶ転位の数はそれぞれ $m \approx 11.8$ と
 なる. これを用いると, 式(6)より

$$w_p = 5.92 \times 10^{-6} \text{ (} \sim 116 w \text{) (m)}$$

これを式(7)に代入すると,

$$\Delta K_{\text{eff}} = 4.54$$

この値と, $E = 2.16 \times 10^5 \text{ MPa}$ を用いると, 式(9)より

$$g = 69.7 \text{ (J/m}^2\text{)}$$

g , $\langle X \rangle$, w , U が得られたので,

$$g \cdot \langle X \rangle = 4.42 \times 10^{-7} \text{ (J/m)}$$

また, $2w^2 U = 4.47 \times 10^{-7} \text{ (J/m)}$.

すなわち, 式(10)がほぼ成立する.

つぎに, $\gamma_s = 2 \text{ J/m}^2$ として, 式(11)よりき裂長さ
 $d_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{ m}$ を発生させる転位の数を求めると,
 $m_0 \approx 3$. したがって, き裂長さ $d_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{ m}$ を発生
 させるエネルギー W は, 式(12)より $R = 7.75 \times 10^{-6} \text{ m}$ として,

$$W = 5.51 \times 10^{-8} \text{ (J/m)}$$

すなわち, 単位長さのき裂を発生させるエネルギーは

$$\frac{W}{d_0} = 42.4 \text{ J/m}^2 = 42.4 \times 10^{-6} \text{ MPa} \cdot \text{m}$$

Fig. 7. da/dn versus ΔK_{eff} .

となる。これを式(14)に代入すると

$$\Delta K_{\text{eff}} = 3.54 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

が得られるが、式(15)に示した実験式から得られる $\Delta K_{\text{eff th}}$ も $3.54 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ となり、完全に一致する。あるいはまた式(12)の W の第1項は E を含み、第2項以下より1桁以上大きいことから、 W を第1項で近似すると、式(14)から

$$\Delta K_{\text{eff}} = 1.62 \times 10^{-5} E$$

が得られ、実験式(15)と極めてよい一致を示す。

この例にならって、つぎの五つの場合を示したのが表3である。表3から da/dn に対して得られた ΔK_{eff} の値は図7に示すように実験式

$$\frac{da}{dn} = 1.3 \times 10^{-11} (\Delta K_{\text{eff}})^{3.0} \dots\dots\dots (16)$$

と極めてよい一致を示す。また da/dn に対する

$$g \cdot \langle X \rangle = 2w^2 U, \text{ および, } \frac{W}{d_0} \langle X \rangle \text{ を図6に示す。}$$

また、表3から $\langle N \rangle = 1$ の場合 $\langle X \rangle = 9.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ であるが、これがストライエーション間隔に相当する。これに対応するき裂伝ば速度は $9.24 \times 10^{-7} \text{ m/cycle}$ で、ストライエーション間隔にほぼ一致していること、およびストライエーションが観察される伝ば速度がこの速度の前後であることなどは、われわれの確率論的モデルが、実験観察結果をよく再現していることを示すものである。

5. 結 論

以前に提案した疲労き裂伝ばに対する確率論的損傷累積モデルに含まれる parameter に、き裂発生モデルに採用したと同じく、転位密度を基礎にした物理的意味を与え、この新しいモデルを用いて、mode I 疲労き裂の伝ば機構を提案した。得られた結果は以下の通りである。

- (1) エネルギー解放率 g によりき裂が $\langle X \rangle$ だけ進む場合、エネルギー $g \langle X \rangle$ がき裂先端の損傷の著しい領域 D 内に転位双極子の形で累積し、それらがき裂先端で交差するすべり帯上に並び、一方の列の転位はへき開き裂発生に寄与し、他方はすべり変形に関与して、

き裂の開口に寄与する。したがって、き裂はへき開き裂の発生と開口とがほぼ同時に起こることにより、伝ばするという伝ば機構が得られた。

- (2) da/dn に対する ΔK_{eff} を求めると、その関係が実験と一致することが確かめられた。
- (3) $g \langle X \rangle$ がへき開き裂発生エネルギーに等しい(き裂開口のエネルギーは0)という条件で、求められた ΔK_{eff} が $\Delta K_{\text{eff th}}$ であると考え、実験結果と一致することが確かめられた。
- (4) き裂先端の塑性域の大きさは塑性域内に含まれるすべり線上にならぶ転位の数との関係から算出された。

文 献

- (1) 伊原千秋・五十嵐顕人, 材料, **30**-333(1981), 574-578.
- (2) Oh, K. P., *J. Eng. Mat. Tech. Trans. ASME*, **100** (1978), 170-174.
- (3) Tsurui, A. and Igarashi, A., *J. Eng. Mat. Tech. Trans. ASME*, **102** (1980), 300-302.
- (4) 伊原千秋・五十嵐顕人, 材料, **29**-320(1981), 434-438.
- (5) Laird, C. and Smith, G. C. *Phil. Mag.* **7** (1962), 847-857.
- (6) Pelloux, R. M. N. *Trans. ASM*, **62** (1969), 281-285.
- (7) Ihara, C. and Tanaka, T., *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, **23** (2000), 375-380.
- (8) 菅田淳・植松美彦・谷本憲史・上南恵資・橋本亜希桐・城野政弘, 機論, **66**-646(2000), 83-90.
- (9) Antonopoulos, J. G., Brown, L. M. and Winter, A. T., *Phil. Mag.* **34** (1976), 549-563.
- (10) Brown, L. M., *Metal Science* **11** (1977), 315-320.
- (11) Budiansky, B. and Hutchinson, J. W., *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, **45** (1978), 267-276.
- (12) Cottrell, A. H., *Trans. Met. Soc. AIME* **212** (1958), 192-203.
- (13) Wasen, J. and Heier, E. *Int. J. Fatigue* **20** (1998), 737-742.
- (14) Tanaka, K., Hojo, M. and Nakai, Y., *Mat. Sci. Engng* **55** (1982), 85-96.