移動荷重を受ける変断面の連続曲りばりの動的応答*

岩瀬 敏昭^{*1}, 平島 健一^{*2}Dynamic Responses of Multispan Curved Beams with Nonuniform Section
Subjected to Moving LoadsToshiaki IWASE^{*3} and Ken-ichi HIRASHIMA^{*3} Department of Civil Engineering, Nippon Bunri University,
1727-162 Ichigi, Oita-shi Oita, 870-0397 Japan

In the present paper, the analytical treatments of dynamic behavior of multispan curved beams of nonuniform section subjected to moving loads are shown by using transfer matrix method to determine the natural frequencies and mode shapes of the curved beams and application of mode superposition technique. In the case of simple curved beam under uniform section of hinge supported at both ends, the results of the present paper are compared with the exact solutions. It was found that good agreement was achieved. Dynamic responses of single-span and multispan curved beams of nonuniform section subjected to a moving load with constant velocity are calculated by transfer matrix method, and the several numerical results are illustrated.

Key Words: Dynamic Responses, Curved Beam, Nonuniform Section, Transfer Matrix

1. 緒 言

今までに、はり系構造物を対象とした動的応答問題で、はりの振動に対する微分方程式の一般解から任意の境界条件問題として連続ばりの固有振動数と固有モードを決定し、連続ばりの動的応答を解析した論文や有限要素法を用いる数値的手法を利用した多径間連続ばりの動的問題についての論文が多くの研究者によって発表されている^{(1)~(10)}。また、WuとDaiらは多径間を有する連続ばりの振動解析に伝達マトリックス法を用いて動的応答解析した論文を発表している⁽¹¹⁾。

著者らは、T形ラーメン構造に単一集中荷重が移動する場合を対象として、伝達マトリックス法による動的問題への適用性を検証し、動的応答の解析結果を発表している⁽¹²⁾。この方法は、固有振動数とモードの決定に伝達マトリックスを用いて、それらのモードの重ね合わせを行うことによって動的解析を目的とする最終的な結果が得られる解析法である。また、集中質量数を適切に選ぶことによって十分な精度が得られ、支

間数が増えてもtransferの階は増えないことで実用的な計算方法である。

本論文は、変断面の多径間連続曲りばりに対する動的応答解析の解析解を得ることは非常に困難であるが、上述した伝達マトリックス法の利点を考え、変断面の3径間連続曲りばりを対象として、固有振動数とモード形を伝達マトリックス法で求め、それらのモードの重ね合わせを行って動的応答解析を試みたものである。

記 号

- u : 軸方向(x 軸)の変位
- w : 曲率半径方向(y 軸)の変位
- ϕ : z 軸まわりのたわみ角
- M : z 軸まわりの曲げモーメント
- V : y 軸方向のせん断力
- N : 軸方向力
- I : z 軸に関する断面二次モーメント
- A : 断面積
- R : 曲率半径
- f : ライズ
- H_c : アーチクラウンでの曲りばりの断面高
- H_s : 支点での曲りばりの断面高

* 原稿受付 2003年2月3日。

^{*1} 正員, 日本文理大学工学部(☎870-0397 大分市大字一木1727-162)。^{*2} 正員, 山梨大学工学部(☎400-8511 甲府市武田4-3-11)。

E-mail: iwase@ce.nbu.ac.jp

Fig. 1 Actual and discrete systems of multispan curved beam

Φ : 曲りばりの中心角

θ : 格点間の中心角

ω : 固有円振動数

2. 理 論

図1(a)に示した分布質量をもつ曲りばりを図1(b)のようないくつかの有限点に質量を分散集中させ、それらの集中質量間の曲りばりは剛性のみを有するような置換モデルの曲りばりを考える。

(1) 格間マトリックス

図2(a)は曲りばりの微小部分における変位と断面力を、図2(b)に曲りばり断面の座標をそれぞれ示した。また、曲りばりの曲率の平面は各横断面に対して対称面であり、外力はこの平面内だけで曲りばりに働くことと仮定する。

いま、図2(a)より力の釣合いを考えれば、次式が得られる。

Fig. 2 Beam element with curved beam

$$\frac{dN}{d\theta} - V = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dV}{d\theta} + N = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{dM}{d\theta} + RV = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

また、変位と断面力の関係を考えれば、次式が得られる。

$$\phi = \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\theta} + u \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$M = \frac{EI}{R^2} \left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$N = \frac{EA}{R} \left(\frac{du}{d\theta} + w \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、式(1)～(6)にラプラス変換をし、さらに逆ラプラス変換して整理すれば、変位量(u, w, ϕ)および断面力(M, V, N)はそれぞれ次式のようなになる。

$$u(\theta) = u(0) \cos \theta + w(0) \sin \theta + \phi(0)R(1 - \cos \theta) + M(0) \frac{R^2}{EI} (\theta - \sin \theta) + V(0) \left\{ \frac{R^3}{2EI} (\theta \sin \theta + 2 \cos \theta - 2) + \frac{R}{2EA} \theta \sin \theta \right\} + N(0) \left\{ \frac{R^3}{2EI} (\theta \cos \theta + 3 \sin \theta + 2\theta) + \frac{R}{2EA} (\sin \theta + \theta \cos \theta) \right\} \dots\dots (7)$$

$$w(\theta) = -u(0) \sin \theta + w(0) \cos \theta + \phi(0)R \sin \theta + M(0) \frac{R^2}{EI} (1 - \cos \theta) - V(0) \left(\frac{R^3}{2EI} + \frac{R}{2EA} \right) (\sin \theta - \theta \cos \theta) - N(0) \left\{ \frac{R^3}{2EI} (\theta \sin \theta + 2 \sin \theta + 2) + \frac{R}{2EA} \theta \sin \theta \right\} \dots\dots (8)$$

$$\phi(\theta) = \phi(0) + M(0) \frac{R}{EI} \theta - V(0) \frac{R^2}{EI} (1 - \cos \theta) + N(0) \frac{R^2}{EI} (\theta - \sin \theta) \dots\dots\dots (9)$$

$$M(\theta) = M(0) - V(0)R \sin \theta + N(0)R(1 - \cos \theta) \dots\dots\dots (10)$$

$$V(\theta) = V(0) \cos \theta - N(0) \sin \theta \dots\dots\dots (11)$$

$$N(\theta) = V(0) \sin \theta + N(0) \cos \theta \dots\dots\dots (12)$$

図3(a)は、格点*i*-1と格点*i*間のはり要素であり、格点*i*-1の右側の断面諸量の肩文字に*R*を、格点*i*の左側のそれらに*L*をつけて、 $u_{i-1}^R = u(0)$, $w_{i-1}^R = w(0)$, $\phi_{i-1}^R = \phi(0)$, $M_{i-1}^R = M(0)$, $V_{i-1}^R = V(0)$ および $N_{i-1}^R = N(0)$, ま

た, $u_i^L = u(\theta)$, $w_i^L = w(\theta)$, $\phi_i^L = \phi(\theta)$, $M_i^L = M(\theta)$, $V_i^L = V(\theta)$ および $N_i^L = N(\theta)$ と考えて, 式(7)~(12)を行列表示すれば, 次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & R(1-\cos \theta) & \frac{R^2}{EI}(R-\sin \theta) & f_{15} & f_{16} \\ -\sin \theta & \cos \theta & R \sin \theta & \frac{R^2}{EI}(1-\cos \theta) & f_{25} & f_{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{R}{EI}\theta & f_{35} & f_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -R \sin \theta & R(1-\cos \theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix}_{i-1}^R \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$f_{15} = \frac{R^3}{2EI}(\theta \sin \theta + 2 \cos \theta - 2) + \frac{R}{2EI}\theta \sin \theta$$

$$f_{16} = \frac{R^3}{2EI}(\theta \cos \theta - 3 \sin \theta + 2\theta) + \frac{R}{2EA}(\sin \theta + \theta \cos \theta)$$

$$f_{25} = -\left(\frac{R^3}{2EI} + \frac{R}{2EA}\right)(\sin \theta - \theta \cos \theta), \quad f_{26} = -\frac{R^3}{2EI}(\theta \sin \theta + 2 \cos \theta - 2) + \frac{R}{2EA}\theta \sin \theta$$

$$f_{35} = -\frac{R^2}{EI}(1 - \cos \theta), \quad f_{36} = \frac{R^2}{EI}(\theta - \sin \theta)$$

式(13)を行列関係式で次のように表しておく.

$$\{Q\}_i^L = [T_F]\{Q\}_{i-1}^R \quad \dots\dots\dots (14)$$

(2) 格点マトリックス

図3(b)から定常振動状態を仮定して, 格点*i*での力の釣合いと変位量が集中質量点 m_i の左右で連続であることを考慮して行列表示すれば, 次のように表される.

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 J_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix}_i^L \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに, m_i は *i* 番めの格点での集中質量を表す. 式(15)を行列関係式で次式のように書き表しておく.

$$\{Q\}_i^R = [T_s]\{Q\}_i^L \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u/R_c, \quad \bar{w} = w/R_c, \quad \bar{\phi} = \phi \\ \bar{M} &= R_c M/EI_c, \quad \bar{V} = R_c^2 V/EI_c, \quad \bar{N} = N/EA_c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

いま, 格点*i*での質量 m_i , 断面二次モーメント I_i , 断面積 A_i および曲率半径 R_i の基準値(アーチクラウン) m_c, I_c, A_c および R_c との比を m'_i, I'_i, A'_i および R'_i で表し, また, 式(17)を適用して変位量, 断面力を実次元化した式(13), (15)の行列関係式をそれぞれ次式のように書き表しておく.

$$\{\bar{Q}\}_i^L = [\bar{T}_F]_i \{\bar{Q}\}_{i-1}^R \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\{\bar{Q}\}_i^R = [\bar{T}_s]_i \{\bar{Q}\}_i^L \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに, $[\bar{T}_s]_i, [\bar{T}_F]_i$ は *i* 番めの無次元化した格点マトリックス, 格間マトリックスである.

(3) 円振動数方程式

図1(b)のようにモデル化した集中質量からなる曲りばり系に対し, 式(18), (19)を組み合わせることによって多径間の両端に対する伝達マトリックスは次式のようなになる.

Fig. 3 Free-body diagram of *i*th station and *i*th field

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{Q}\}_n^L &= [\bar{T}_F]_n \prod_{r=1}^{n-1} [\bar{T}_r] \{\bar{Q}\}_0^R = [\bar{T}_0] \{\bar{Q}\}_0^R \\ [\bar{T}_0] &= [\bar{T}_F]_n \prod_{r=1}^{n-1} [\bar{T}_r] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_{11} & 0 & \bar{T}_{12} & 0 & \bar{T}_{13} & 0 & \bar{T}_{14} & 0 & \bar{T}_{15} & 0 & \bar{T}_{16} \\ 0 & \bar{T}_{21} & 0 & \bar{T}_{22} & 0 & \bar{T}_{23} & 0 & \bar{T}_{24} & 0 & \bar{T}_{25} & 0 & \bar{T}_{26} \\ 0 & \bar{T}_{31} & 0 & \bar{T}_{32} & 0 & \bar{T}_{33} & 0 & \bar{T}_{34} & 0 & \bar{T}_{35} & 0 & \bar{T}_{36} \\ 0 & \bar{T}_{41} & 0 & \bar{T}_{42} & 0 & \bar{T}_{43} & 0 & \bar{T}_{44} & 0 & \bar{T}_{45} & 0 & \bar{T}_{46} \\ 0 & \bar{T}_{51} & 0 & \bar{T}_{52} & 0 & \bar{T}_{53} & 0 & \bar{T}_{54} & 0 & \bar{T}_{55} & 0 & \bar{T}_{56} \\ 0 & \bar{T}_{61} & 0 & \bar{T}_{62} & 0 & \bar{T}_{63} & 0 & \bar{T}_{64} & 0 & \bar{T}_{65} & 0 & \bar{T}_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \cdots (20)$$

次に、一般的な境界の場合について適用し得るよう
に中間支持に対する格点マトリックスを求める。いま、
すべての中間支点をヒンジ支持と考えると、中間支
点 S_k と隣接する次の支点 S_{k+1} の間の伝達マトリッ
クスを考えれば、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{Q}\}_{S_i}^L &= [\bar{T}_F]_{S_i} \prod_{r=S_k+1}^{S_i-1} [\bar{T}_r] \{\bar{Q}\}_{S_k}^R = [\bar{T}_R] \{\bar{Q}\}_{S_k}^R \\ [\bar{T}_R] &= [\bar{T}_F]_{S_i} \prod_{r=S_k+1}^{S_i-1} [\bar{T}_r] \\ &= \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} & \bar{T}_{13} & \bar{T}_{14} & \bar{T}_{15} & \bar{T}_{16} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} & \bar{T}_{23} & \bar{T}_{24} & \bar{T}_{25} & \bar{T}_{26} \\ \bar{T}_{31} & \bar{T}_{32} & \bar{T}_{33} & \bar{T}_{34} & \bar{T}_{35} & \bar{T}_{36} \\ \bar{T}_{41} & \bar{T}_{42} & \bar{T}_{43} & \bar{T}_{44} & \bar{T}_{45} & \bar{T}_{46} \\ \bar{T}_{51} & \bar{T}_{52} & \bar{T}_{53} & \bar{T}_{54} & \bar{T}_{55} & \bar{T}_{56} \\ \bar{T}_{61} & \bar{T}_{62} & \bar{T}_{63} & \bar{T}_{64} & \bar{T}_{65} & \bar{T}_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \cdots (21)$$

ここで、中間のヒンジ支点 S_i に対する変位の境界条
件 $\bar{u}_{S_i}^L = \bar{w}_{S_i}^L = 0$ を式(21)に適用して、不連続な断面力
 $\bar{N}_{S_k}^R$, $\bar{V}_{S_k}^R$ について求め、さらに隣接する支点 S_k の左
右の断面に対する $\bar{u}_{S_k}^R = \bar{u}_{S_k}^L$, $\bar{w}_{S_k}^R = \bar{w}_{S_k}^L$, $\bar{\phi}_{S_k}^R = \bar{\phi}_{S_k}^L$,
 $\bar{M}_{S_k}^R = \bar{M}_{S_k}^L$ の関係を加えて行列表示すれば、次のよう
になる。

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{Q}\}_{S_k}^R &= [[\bar{T}_s]]_{S_k} \{\bar{Q}\}_{S_k}^L \\ [[\bar{T}_s]]_{S_k} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ a_{51} &= -\frac{\bar{T}_{11}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{21}\bar{T}_{16}}{\bar{T}_{15}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{25}\bar{T}_{16}}, \quad a_{52} = -\frac{\bar{T}_{12}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{22}\bar{T}_{16}}{\bar{T}_{15}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{25}\bar{T}_{16}} \\ a_{53} &= -\frac{\bar{T}_{13}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{23}\bar{T}_{16}}{\bar{T}_{15}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{25}\bar{T}_{16}}, \quad a_{54} = -\frac{\bar{T}_{14}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{24}\bar{T}_{16}}{\bar{T}_{15}\bar{T}_{26} - \bar{T}_{25}\bar{T}_{16}} \\ a_{61} &= -\frac{\bar{T}_{11}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{21}\bar{T}_{15}}{\bar{T}_{16}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{26}\bar{T}_{15}}, \quad a_{62} = -\frac{\bar{T}_{12}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{22}\bar{T}_{15}}{\bar{T}_{16}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{26}\bar{T}_{15}} \\ a_{63} &= -\frac{\bar{T}_{13}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{23}\bar{T}_{15}}{\bar{T}_{16}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{26}\bar{T}_{15}}, \quad a_{64} = -\frac{\bar{T}_{14}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{24}\bar{T}_{15}}{\bar{T}_{16}\bar{T}_{25} - \bar{T}_{26}\bar{T}_{15}} \end{aligned} \right\} \cdots (22)$$

よって、上式の $[[\bar{T}_s]]_{S_k}$ が中間ヒンジ支点 S_k に対す
る格点マトリックスである。

ここで、最左端支点の右側断面と次の支点の左側断
面の伝達マトリックスは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{Q}\}_{S_1}^L &= [\bar{T}_F]_{S_1} \prod_{r=1}^{S_1-1} [\bar{T}_r] \{\bar{Q}\}_0^R = [\bar{T}_R^{S_1}] \{\bar{Q}\}_0^R \\ [\bar{T}_R^{S_1}] &= [\bar{T}_F]_{S_1} \prod_{r=1}^{S_1-1} [\bar{T}_r] \\ &= \begin{bmatrix} \bar{T}_{11}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{12}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{13}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{14}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{15}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{16}^{1 \sim S_1} \\ \bar{T}_{21}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{22}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{23}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{24}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{25}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{26}^{1 \sim S_1} \\ \bar{T}_{31}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{32}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{33}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{34}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{35}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{36}^{1 \sim S_1} \\ \bar{T}_{41}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{42}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{43}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{44}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{45}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{46}^{1 \sim S_1} \\ \bar{T}_{51}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{52}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{53}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{54}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{55}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{56}^{1 \sim S_1} \\ \bar{T}_{61}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{62}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{63}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{64}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{65}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{66}^{1 \sim S_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \cdots (23)$$

両端がヒンジ支持の場合は、境界条件 $\bar{u}_0^R = \bar{w}_0^R = \bar{M}_0^R =$
 $\bar{u}_n^L = \bar{w}_n^L = \bar{M}_n^L = 0$ を適用して整理すれば、最終的に次
式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{13}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{15}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{16}^{1 \sim S_1} \\ \bar{T}_{23}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{25}^{1 \sim S_1} & \bar{T}_{26}^{1 \sim S_1} \\ 0 & \bar{T}_{43} & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdots (24)$$

したがって、式(24)から固有円振動数 ω が得られるこ
とになる。また、両端が固定支持の場合の境界条件は
 $\bar{u}_0^R = \bar{w}_0^R = \bar{\phi}_0^R = \bar{u}_n^L = \bar{w}_n^L = \bar{\phi}_n^L = 0$ を式(20), (23)に適用
すれば、同様に両端固定支持に対する固有円振動数 ω
が得られる。

次に、六つの初期状態変数を式(23)より求めれば、
次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{13}^{1 \sim S_1} \bar{\phi}_0^R + \bar{T}_{15}^{1 \sim S_1} \bar{V}_0^R + \bar{T}_{16}^{1 \sim S_1} \bar{N}_0^R &= 0 \\ \bar{T}_{23}^{1 \sim S_1} \bar{\phi}_0^R + \bar{T}_{25}^{1 \sim S_1} \bar{V}_0^R + \bar{T}_{26}^{1 \sim S_1} \bar{N}_0^R &= 0 \end{aligned} \right\} \cdots (25)$$

いま、式(25)に $\bar{\phi}_0^R = 1$ において $\bar{V}_0^R$, $\bar{M}_0^R$ を求めれば、
次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_0^R &= \frac{\bar{T}_{16}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{23}^{1 \sim S_1} - \bar{T}_{13}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{26}^{1 \sim S_1}}{\bar{T}_{15}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{26}^{1 \sim S_1} - \bar{T}_{16}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{25}^{1 \sim S_1}} \\ \bar{N}_0^R &= \frac{\bar{T}_{15}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{23}^{1 \sim S_1} - \bar{T}_{13}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{25}^{1 \sim S_1}}{\bar{T}_{16}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{25}^{1 \sim S_1} - \bar{T}_{15}^{1 \sim S_1} \bar{T}_{26}^{1 \sim S_1}} \end{aligned} \right\} \cdots (26)$$

したがって、六つの初期状態変数が次のように決定さ
れる。

$$\{\bar{Q}\}_0^R = [\bar{u} \quad \bar{w} \quad \bar{\phi} \quad \bar{M} \quad \bar{V} \quad \bar{N}]_0^R = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \bar{V} \quad \bar{N}]_0^R \cdots (27)$$

次に文献(12)で示した方法によって集中質量に対する
モードの規準直交化を行い、規準化された無次元のモ

ードマトリックスを $[\bar{Z}]$ で表す。

3. 動的応答解析

(1) 運動方程式とその解

振動系の一般的な運動方程式を行列表示で書くと次のようになる。

$$[m]\{\ddot{w}\} + [c]\{\dot{w}\} + [k]\{w\} = \{F\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $[m]$ 、 $[c]$ および $[k]$ は質量、減衰および剛性マトリックスであり、 $\{\dot{w}\}$ 、 $\{\ddot{w}\}$ および $\{w\}$ は加速度、速度および変位ベクトルで、 $\{F\}$ は外力ベクトルである。また、変位、速度および加速度ベクトルは標準化されたモードマトリックスと一般化座標 $q(t)$ を導入することによって、次のような関係式になる。

$$\left. \begin{aligned} \{w\} &= [\bar{Z}]\{q(t)\} \\ \{\dot{w}\} &= [\bar{Z}]\{\dot{q}(t)\} \\ \{\ddot{w}\} &= [\bar{Z}]\{\ddot{q}(t)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

また、式(28)に式(29)を代入し、さらに減衰マトリックスと荷重ベクトルの一般化を行えば、式(28)は次式のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) &= N_r(t) \\ \xi_r &= \frac{C_{rr}}{2\omega_{rr}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

上式のように定義した ξ_r は r 番めの固有円振動数 ω_{rr} に対応する減衰比である。また、 C_{rr} は一般化した減衰マトリックスの r 番めの要素である。

式(30)の解は一般に次式で与えられる。

$$q_r(t) = e^{-\xi_r\omega_r t} \left[\frac{\dot{q}_r(0) + q_r(0)\xi_r\omega_r}{\omega_{Dr}} \sin \omega_{Dr}t + q_r(0) \cos \omega_{Dr}t \right] + \frac{1}{\omega_{Dr}} \int_0^t N_r(\tau) e^{-\xi_r\omega_r(t-\tau)} \sin \omega_{Dr}(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \omega_{rr}, \quad \omega_{Dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \\ q_r(0) &= [\bar{Z}^T]^T [m] \{y(0)\}, \quad \dot{q}_r(0) = [\bar{Z}^T]^T [m] \{\dot{y}(0)\}, \quad \ddot{q}_r(0) = [\bar{Z}^T]^T [m] \{\ddot{y}(0)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで、後述する外力を次のように仮定する。

$$N_r = R + S\tau, \quad 0 \leq \tau \leq t \quad \dots\dots\dots (33)$$

このとき、式(31)は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} q_r(t) &= e^{-\xi_r\omega_r t} \left[\frac{\dot{q}_r(0) + q_r(0)\xi_r\omega_r}{\omega_{Dr}} \sin \omega_{Dr}t + q_r(0) \cos \omega_{Dr}t \right] \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{Dr}\omega_r^2} \{ e^{-\xi_r\omega_r t} [-S \sin(\omega_{Dr}t - 2\lambda_r) - R\omega_r \cos(\omega_{Dr}t - \lambda_r)] + (R + St)\omega_{Dr} - 2S\xi_r\sqrt{1 - \xi_r^2} \} \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_r(t) &= e^{-\xi_r\omega_r t} \left[\dot{q}_r(0) \cos \omega_{Dr}t - \frac{\omega_r q_r(0) + \xi_r \dot{q}_r(0)}{\sqrt{1 - \xi_r^2}} \sin \omega_{Dr}t \right] \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{Dr}\omega_r} \{ e^{-\xi_r\omega_r t} [-S \cos(\omega_{Dr}t - \lambda_r) + R\omega_r \sin \omega_{Dr}t] + S\sqrt{1 - \xi_r^2} \} \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r(t) &= e^{-\xi_r\omega_r t} \left[\frac{\xi_r\omega_r^2 q_r(0) + (2\xi_r^2 - 1)\omega_r \dot{q}_r(0)}{\sqrt{1 - \xi_r^2}} \sin \omega_{Dr}t - \{ \omega_r^2 q_r(0) + 2\xi_r\omega_r \dot{q}_r(0) \} \cos \omega_{Dr}t \right] \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{Dr}} e^{-\xi_r\omega_r t} [S \sin \omega_{Dr}t + R\omega_r \cos(\omega_{Dr}t + \lambda_r)] \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

ここに、 $\lambda_r = \tan^{-1} \xi_r / \sqrt{1 - \xi_r^2}$ である。

各モードごとの応答が式(31)および式(34)によって求められれば、先に示した式(29)において、モード重ね合わせ法による変位、速度および加速度を表すことになる。

(2) 外力の時間軌跡

図4に示す移動荷重 P が一定速度 v で移動するものとすれば、格点 $i-1$ から i に対し、時間 $t=0 \sim \Delta t$ の間隔の時間軌跡を表す式(33)は、次式のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} F_{i-1}(t) &= R_{i-1} + S_{i-1}t \\ F_i(t) &= R_i + S_i t \\ R_{i-1} &= P, \quad S_{i-1} = -\frac{P}{\Delta t} \\ R_i &= 0, \quad S_i = \frac{P}{\Delta t} \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

解析を簡単にするために、いま、格点間隔 $l_i = l$ 一定、 $\Delta t_i = l_i/v = \Delta t$ 一定とおけば、式(37)は次のような境界条件

が成立する.

$$F_{i-1}(0)=P, F_i(0)=0, F_{i-1}(\Delta t)=0, F_i(\Delta t)=P$$

$$\dots\dots\dots(38)$$

ここに, すべての格点上の P は $i-1$ と i および時間間隔 $t=0\sim\Delta t$ 間以外は零である.

4. 数 値 計 算 例

本論文の計算例として, 変断面な曲りばりの両端がヒンジ支持および固定支持の3径間連続曲りばりを対象とし, 単一集中荷重が曲率半径方向に作用して, 一定速度で移動する場合の曲率半径方向における動的応答解析を実施する. また, ライズ f と支間長 l との比 f/l が一般的な曲りばりにおいては $1/8$ 程度であり,

Fig. 4 Diagram of constant moving load P from station $i-1$ to i during $t=0\sim\Delta t$

Fig. 5 Convergence of the calculated results versus to number of the discretization for simple curved beams with $f/l=1/8.2, 1/30.5$ and $1/50.9$

本論文では, $1/8.2$, 偏平な曲りばりとして $1/30.5$, さらに偏平な曲りばりとして $1/50.9$ の3種類を採用した. 諸数値は支間長 60 m (各支間 20 m), 単一集中移動荷重 $P=9.8\times 10^3\text{ N}$, アーチクラウンでの曲げ剛性 $EI_c=37.044\times 10^9\text{ Nm}^2$, 断面積 $A_c=3\,400\text{ cm}^2$ とした. また, 曲りばりの変断面については, アーチクラウンでの断面積 $H_c=40\text{ cm}$, 支点での断面積 $H_s=70\text{ cm}$ として変断面形状を文献(13)で示されている3次放物線の式を採用した.

まず, 集中質量数が変位に及ぼす影響を調べるために両端ヒンジ支持の場合で均一な断面積を有する支間長 20 m の単純曲りばりの $f/l=8.2, 30.5, 50.9$ の3種類に対して, 支間中央位置での曲率半径方向の静的変位に対する解析解と本解法の結果の比と分割数との関係を図5に示した. 図5から3種類とも分割数がほぼ28程度以上で収束していることが観察される. また, 本解法の曲りばりの静的・動的応答解析に対する有効性について検証する. 両端ヒンジ支持の均一な単純曲りばりに対し, 支間長を32等分割した $f/l=8.2, 30.5, 50.9$ の場合の支間中央位置での曲率半径

Table 1 Comparison between the calculated results and exact solutions for simple curved beam

Station No.	1/50.9		1/30.5		1/8.2	
	Exact (cm)	Transfer matrix (cm)	Exact (cm)	Transfer matrix (cm)	Exact (cm)	Transfer matrix (cm)
2	0.0070	0.0062	0.0056	0.0055	0.0009	0.0008
4	0.0137	0.0137	0.0110	0.0110	0.0019	0.0018
6	0.0201	0.0201	0.0162	0.0162	0.0031	0.0029
8	0.0258	0.0268	0.0208	0.0210	0.0043	0.0042
10	0.0306	0.0309	0.0249	0.0251	0.0055	0.0055
12	0.0344	0.0346	0.0280	0.0282	0.0066	0.0066
14	0.0368	0.0369	0.0300	0.0302	0.0074	0.0074
16	0.0377	0.0377	0.0308	0.0308	0.0077	0.0077

Table 2 Comparison between the calculated results and exact solutions for simple curved beam

Station No.	Exact solution (cm)	Transfer matrix (cm)
3	0.0015	0.0016
6	0.0118	0.0119
9	0.0281	0.0281
12	0.0377	0.0377
15	0.0347	0.0348
18	0.0255	0.0257
21	0.0215	0.0215
24	0.0232	0.0233

方向の静的変位の解析解と本解法による結果を表1に示した。さらに、 $f/l=30.5$ で両端ヒンジ支持の均一なはり断面の単純曲りばりに対し、一定速度 $v=100$ km/h で移動する単一集中荷重の場合に支間中央位置での曲率半径方向の動的変位について解析解と本解法による結果を表2に示した。両表から両者はよく一致していることが観察される。したがって、本解法は、曲りばりの静的・動的応答解析に対して高い精度の結果が得られることが確認された。また、両表中の No. は荷重の載荷点を表す。

以下の計算では、連続曲りばりの各支間の集中質量数として31を採択した。

図6は、変断面で支間長20mの単純曲りばりに単一集中荷重が格点に載荷した場合を対象とし、 $f/l=1/8.2$, $1/30.5$, $1/50.9$ の3種類に対して本解法によって求めた支間中央位置での静的変位の比較を示したものである。また、 $f/l=1/8.2$, $1/50.9$ の2種類に対して、一定移動速度 $v=100$ km/h の場合の本解法で

求めた動的変位も示している。両端ヒンジ支持の場合を図6(a)に、両端固定支持の場合を図6(b)にそれぞれ示した。 $f/l=1/50.9$ に対する $f/l=1/8.2$, $1/30.5$ の最大静的変位の割合は、ヒンジ支持の場合の図6(a)から22.0%, 83.5%であり、固定支持の場合の図6(b)から64.6.0%, 97.1%をそれぞれ示している。また、両図から両端の支持方法の違いによる変位への影響が観察される。したがって、 f/l の値を大きくとれば、曲りばりの曲率半径は小さくなり、変断面アーチに近づいて変位は小さくなる。逆に、 f/l の値を小さくとれば、曲りばりの曲率半径は大きくなって変断面ばりに近づいて変位は大きな値を示す。両図とも動的変位は静的変位を基準に上下に変動していることがわかる。

図7は変断面で中間支点の支持がヒンジの3径間(各支間長20m)連続曲りばりに単一集中荷重が格点に載荷した場合を対象とし、 $f/l=1/8.2$, $1/30.5$, $1/50.9$ の3種類に対して本解法によって求めた第一支間中央位置での静的変位の比較を示したものである。また、 $f/l=1/8.2$, $1/50.9$ の2種類に対して一定移動速度 $v=100$ km/h の場合の本解法で求めた動的変位も示している。両端ヒンジ支持の場合を図7(a)

(a) Hinge supported

(b) Fix supported

Fig. 6 Responses of deflection at the center of span simple curved beam

(a) Hinge supported

(b) Fix supported

Fig. 7 Responses of deflection at the center of first span for three-span continuous curved beam

に、両端固定支持の場合を図7(b)にそれぞれ示した。 $f/l=1/50.9$ に対する $f/l=1/8.2$, $1/30.5$ の最大静的変位の割合は、ヒンジ支持の場合の図7(a)から32.7%, 87.6%であり、固定支持の場合の図7(b)から47.1%, 94.1%をそれぞれ示している。また、両図から両端の支持方法の違いによる変位への影響が観察される。両図とも $f/l=1/8.2$ に対する第二、第三支間部での静的変位は他の $f/l=1/30.5$, $1/50.9$ の場合と異なる変位を示していることが観察される。これは、軸力による影響と考えられる。また、両図とも動的変位は静的変位を基準に上下に変動していることがわかる。

5. 結 言

本論文は、変断面の多径間連続曲りばりに対し、一定速度で移動する単一集中荷重による動的応答解析を目的として伝達マトリックス法を用いる解析法の実用性および有効性について考察したものである。

(1) 曲りばりの力の釣合いおよび変位と断面力の関係式からラプラス変換により変位量と断面力についての解を求め、伝達マトリックスに適用できる格間マトリックスおよび格点マトリックスを導いた。

(2) 両端ヒンジ支持の均一なはり断面に対し、 $f/l=1/8.2$, $1/30.5$, $1/50.9$ の3種類の単純曲りばりに単一集中荷重が一定速度で移動する場合に対し、解析解と本解法で求めた静的・動的応答を比較することにより本解法は高い精度の結果が得られることが確認された。

(3) 本解法は、連続曲りばりの中間支点の格点マトリックスおよび変断面の多径間連続曲りばりに対する静的・動的応答解析を容易に解析することができる。

したがって、変断面あるいは曲率半径の異なる多径間の連続曲りばりの動的応答解析において解析解を得ることは、非常に困難であるのに対し、本解法は、曲りばりの支間数が増えてもtransferの階は増えないことから計算機の所要時間および容量の節約ができ

る。また、集中質量数を適切に選ぶことによって十分な精度が得られて比較的容易に解析できることから本解法は実用的で有効性の高いものであると考えられる。

本論文の数値計算は、日本文理大学情報センターのSun Enterprise 3500のワークステーションを使用したことを付記する。

文 献

- (1) Fryba, L., *Vibration of Solid and Structures under Moving Loads*, The Netherlands, (1972), 484-492, Noordhoff International Publishing, Groningen.
- (2) Hirai, I., *Fundamental Equations of Beam Structures under the Moving Loads and Its Application*, *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers*, No. 90 (1963), 29-36.
- (3) Yoshida, D. M. and Weaver, W., *Finite Element Analysis of Beam and Plates with Moving Loads*, Publications, *International Association for Bridges and Structural Engineering*, 31-1 (1971), 179-195.
- (4) Blezwas, T. E., Feng, C. C. and Ayre, R. S., *Dynamic Interaction of Moving Vehicles and Structures*, *J. Sound Vib.*, 67-4 (1979), 513-521.
- (5) Timoshenko, S. P. and Young, D. H., *Vibration Problem in Engineering*, (1974), 362-369, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- (6) Warburton, G. B., *The Dynamical Behavior of Structures*, (1976), 2nd ed., Pergamon Press, Ltd., Oxford, England.
- (7) Hayashikawa, T. and Watanabe, N., *Dynamic Behavior of Continuous Beam with Moving Loads*, *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, 107 (1981), 229-245, EM 1.
- (8) Sridharan, N. and Mallik, A. K., *Numerical Analysis of Vibration of Beam Subjected to Moving Loads*, *J. Sound Vib.*, 65-1 (1979), 147-150.
- (9) Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, (1979), 191-206, McGraw-Hill, International Book Company, New York.
- (10) Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, (1967), 251-262, Macmillan Company, London.
- (11) Wu, J. S. and Dai, C. W., *Dynamic Responses of Multispan Nonuniform Beam Due to Moving Loads*, *J. Struct. Eng.*, ASCE, 113-3 (1987), 458-474.
- (12) 岩瀬敏昭・平島健一, *Transfer Matrix 法による移動荷重を受けた T 型ラーメンの動的応答解析*, 土木学会論文集, 495/I-28 (1994), 63-72.
- (13) 成瀬勝武, *弾性橋梁*, (1965), 313-316, コロナ社.