円形膜の解析とインフレータブルリフレクタへの応用*

石 田 良 平^{*1}Elastic Analysis of Circular Membrane and Its Application
to an Inflatable Parabolic ReflectorRyohei ISHIDA^{*2}^{*2} Department of Aerospace Engineering, Osaka Prefecture University,
1-1 Gakuen-cho, Sakai-shi, Osaka, 599-8531 Japan

In this paper, first of all, we investigate the linear elastic deformation of circular plate, membrane deformation of circular membrane and their intermediate deformation. It is shown that the deformation in the intermediate pressure range is close to the paraboloid. We describe the possibility of the generation of the paraboloid from circular flat membrane by inflation. When the parameter used for an actual parabola reflector is taken into consideration, it is also shown that corresponding deflection is in the pressure range of the solution of a membrane.

Key Words: Space Engineering, Inflatable Structure, Parabolic Reflector, Theory of Membrane, Nonlinear Problem, Finite Deformation Theory, Finite Element Method

1. はじめに

現在, Gossamer Spacecraft Programのもとでは焦点距離/開口径 $f/d=1.0$ 程度の宇宙太陽光発電用インフレータブルパワーアンテナが開発されつつある⁽¹⁾. インフレータブルパラボラリフレクタについて, Jenkins, C.K.らは円板の線形弾性解と円形膜の解から得られる形状を,それぞれ,パラボラ形状と比較し,その考察に基づき,円形膜の周囲に張力を加えることによって形状を制御することを提案している⁽²⁾. ここで,円形膜の解とは,1915年に求められたHencky解⁽³⁾のことであり, Theory of Plates and Shells⁽⁴⁾にも引用されている. この解に関して, Fitcher, W.B. はHencky解の項数を増やし計算を行なっている⁽⁵⁾. さらに,解を膜厚が変化する場合にも拡張し,膜の中央面がパラボラ面になる膜厚分布を求めている.

円板の線形弾性解においてたわみは内外圧力差に比例し,円形膜の解(Henckyの解)においてはたわみは圧力差の1/3乗に比例する. 線形弾性解は変

形中の板に発生する面内力の影響を無視しており,円形膜の解は面内力のみを考慮している. 薄い膜の場合,曲げモーメントはほとんど作用しないと考えてもさしつかえないので,膜の解は妥当なものであると考えられる. しかし,厚さのある柔軟な材料,たとえば,ゴムのような材料からなる円板に圧力を加えると,この円板は圧力が小さい場合は板としてふるまい,圧力が大きくなると膜のようにふるまう. しかし,板としてふるまう圧力範囲と膜としてふるまう圧力範囲との間には,両方の性質を同時に有する圧力領域(遷移領域)が存在する. このような領域での解をここでは遷移解と呼ぶ. 遷移解の領域では,圧力の増加に伴って曲げ剛性主体の線形解領域から面内力主体の膜の解へと変化する. このような遷移領域の解については,円板の大たわみ問題として定式化することができる⁽⁷⁾.

この研究では,円板の線形弾性解,膜のHencky解およびこれらの間にある遷移解の変形形状について調べ,遷移解の圧力領域での変形形状においてパラボラ形状に近い形状があることを示し,円板状の膜面に圧力を加えて変形させる方法によるパラボラ面の生成の可能性について述べる. また,実際

* 原稿受付 2003年2月12日.

^{*1} 正員, 大阪府立大学大学院 (〒599-8531 堺市学園町1-1).
E-mail: ishida@aero.osakafu-u.ac.jp

のパラボラリフレクタのパラメータを用いた場合、対応する変形形状は膜の解の領域にあることを示す。

2. 解析

図1に示すような直径 $2a$ の円形膜が圧力差 p_0 を受けて変形するものとする。円形膜は厚さのある柔軟な材料によってできているものとする。ここでは、微小変形理論によって記述される変形、Henckyの膜理論によって記述される変形および二つの中間の理論によって記述される変形についてまとめておく。

2.1 線形弾性解 膜面に作用する圧力が小さい場合、膜は弾性平板のようにふるまう。このとき、微小変形理論に基づく円板の線形弾性解 w_1 の微分方程式は、

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = \frac{p_0}{D}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 D は板の曲げ剛性であり、次式で定義される。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

ここで、 E はヤング率、 h は板厚、 ν はポアソン比である。

式(1)に対する境界条件は、周辺固定の場合と周辺単純支持の場合について、それぞれ、
周辺固定の場合 $r=a$ において

$$w_1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dw_1}{dr} = 0 \quad (4)$$

周辺単純支持の場合 $r=a$ において

$$w_1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_1}{dr} = 0 \quad (6)$$

となる。また、両方の支持条件について、円板中央($r=0$)で、

Fig.1 Circular plate subjected to internal pressure

1.たわみが有限

2.曲げモーメントが有限

という条件が必要である。

式(1)の解は、中央たわみを w_{10} で表せば、次のように表すことができる。

$$w_1 = w_{10} f_1 \left(\frac{r}{a}, \nu \right) \quad (7)$$

ここで、

$$f_1 \left(\frac{r}{a}, \nu \right) = \left[1 - k \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$w_{10} = \frac{p_0 a^4}{64 D k} \quad (9)$$

である。ただし、周辺単純支持の場合 $k=(1+\nu)/(5+\nu)$ であり、周辺固定の場合 $k=1$ である。

2.2 膜の解 作用する圧力が大きくなると、板に作用する面内力が板の幾何剛性を増加させる。圧力が増加するにしたがって、面内力の影響が曲げ剛性の影響より大きくなる。面内力が支配的になり、曲げ剛性がほとんど無視できるようになると、柔軟な板は膜としてふるまう。膜の変形に関する研究はHencky, H.⁽³⁾によってなされ、Campbell, J.D.⁽⁶⁾によって修正された。さらに、Fitcher, W.B.⁽⁹⁾によってより多くの級数項が取られた。

膜のたわみ w_2 の支配方程式は次の式系で与えられる。

$$r \frac{d}{dr} (N_r + N_\theta) + \frac{E}{2} \left(\frac{dw_2}{dr} \right)^2 = 0 \quad (10)$$

$$N_r \frac{dw_2}{dr} + \frac{r}{2} p_0 = 0 \quad (11)$$

ここで、 N_r および N_θ は、それぞれ、半径方向および円周方向の面内力成分である。

たわみ関数 w_2 に対する境界条件は、

$$r=0; \quad \frac{dw_2}{dr} = 0 \quad (12)$$

$$r=a; \quad w_2 = 0 \quad (13)$$

面内力 N_r に対する境界条件は、

$$r=0; \quad \frac{dN_r}{dr} = 0 \quad (14)$$

$$r=a; \quad \frac{dN_r}{dr} + (1-\nu) \frac{N_r}{r} = 0 \quad (15)$$

で規定される。また、面内力 N_r と N_θ は次のつりあい方程式を満足しなければならない。

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) = 0 \quad (16)$$

式(10)および(11)の解として, N_r , N_θ および w_2 を

$$N_r = \frac{h}{4} \left(\frac{E p_0^2 a^2}{h^2} \right)^{1/3} \sum_{i=0}^5 B_{2i} \left(\frac{r}{a} \right)^{2i} \quad (17)$$

$$N_\theta = \frac{h}{4} \left(\frac{E p_0^2 a^2}{h^2} \right)^{1/3} \sum_{i=0}^5 (2i+1) B_{2i} \left(\frac{r}{a} \right)^{2i} \quad (18)$$

$$w_2 = a \left(\frac{p_0 a}{Eh} \right)^{1/3} \sum_{i=0}^5 A_{2i} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{2i+2} \right] \quad (19)$$

とおくと, 式(17)と(18)は面内力のつりあい方程式(16)を満足し, 式(17)は式(14)を満足することがわかる. また, 式(19)は境界条件式(12)および(13)を満足することがわかる.

以上の式系から未定係数 A_{2i} および B_{2i} を決定することができる. なお, A_{2i} および B_{2i} は無次元の係数であるが, ポアソン比に依存する.

式(19)は, 中央たわみを

$$w_{20} = a \left(\frac{p_0 a}{Eh} \right)^{1/3} \sum_{i=0}^5 A_{2i} \quad (20)$$

とおくと,

$$w_2 = w_{20} f_2 \left(\frac{r}{a}, v \right) \quad (21)$$

と書くことができる. なお, $0 \leq f_2(r/a, v) \leq 1$ である.

2.3 遷移領域での変形 曲げ剛性が支配的な平板の解に従う変形領域と面内力が支配的な膜の解に従う領域とをつなぐ変形状態が存在する. このような変形領域を遷移領域と呼ぶことにする. 遷移領域の変形(w_3)を支配する方程式は次のような連立非線形微分方程式となる.

$$D \left(\frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} + \frac{1}{r^2} \Theta \right) - N_r \Theta = \frac{r}{2} p_0 \quad (22)$$

$$r^2 \frac{d^2 N_r}{dr^2} + 3r \frac{dN_r}{dr} + \frac{Eh}{2} \Theta^2 = 0 \quad (23)$$

ここで, $\Theta = dw_3/dr$ である.

この連立微分方程式は有限変形理論⁽⁷⁾から導かれるが, 詳細は省略する.

式(22)の左辺第一項は平板の曲げ剛性による項であり, この項を零におくと円形膜の基礎微分方程式(11)に一致することがわかる. 弾性円板の領域ではたわみが微小であり, たわみ Θ は十分に小さい. このような場合, 式(23)の解として得られる N_r も非常に小さく, 式(23)を無視してもよい. このことから, 式(22)において $N_r \Theta = 0$ とにおいて少し変形すると, 平板の線形弾性理論に基づく円板の基礎微分方程式(1)が導かれる.

たわみ角 Θ に関する境界条件は, 周辺固定の場合

Fig.2 Parabola shape and its parameter

合は

$$r=0; \Theta=0 \quad (24)$$

$$r=a; \Theta=0 \quad (25)$$

であり, 周辺単純支持の場合は

$$r=0; \Theta=0 \quad (26)$$

$$r=a; \frac{d\Theta}{dr} + \frac{v}{r} \Theta = 0 \quad (27)$$

である. 式(25)は式(4)に相当し, 式(27)は式(6)に相当する.

面内力に対する境界条件は支持条件に関係なく,

$$r=0; \frac{dN_r}{dr} = 0 \quad (28)$$

$$r=a; \frac{dN_r}{dr} + (1-v) \frac{N_r}{r} = 0 \quad (29)$$

で与えられる. なお, 式(28)と(29)はHencky解に対する境界条件(14)と(15)と同じである.

2.4 パラボラアンテナ パラボラアンテナといえば, 一般に図2に示すような回転放物面反射鏡アンテナを指す⁽⁹⁾. ここで, $d(=2a)$ は開口径, $2\theta_a$ は開口角, F は焦点, f は焦点距離である.

パラボラ形状は w_{p0} を中央たわみ(深さ)とすると, $r=a$ で $w_p=0$ という条件のもとで,

$$w_p = w_{p0} f_p \left(\frac{r}{a} \right) \quad (30)$$

で与えられる. ここで, $f_p(r/a)$ は放物線

$$f_p \left(\frac{r}{a} \right) = 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \quad (31)$$

である. 式(30)で与えられるパラボラ形状の焦点距離 f は

$$f = \frac{a^2}{4w_{p0}} \quad (32)$$

で表される.

パラボラリフレクタの形状を表すパラメータとして, 焦点距離/開口径(f/d)が用いられる. f/d と θ_a との関係は次式で与えられる.

Fig.3 Variations of W_3 , η , S_r and W_1 as functions of r/a (Clamped edge, $P=10.0$, $\nu=0.25$)

Fig.4 Variations of W_3 , η , S_r and W_1 as functions of r/a (Simply supported edge, $P=1.0$, $\nu=0.25$)

$$\frac{f}{d} = \frac{1}{4} \cot \frac{\theta_a}{2} \quad (33)$$

3. 数値計算

3.1 各解が表す変形形状の比較 比較に際して、各解のたわみ関数を厚さ h で除した無次元量

$$W_i = w_i/h, \quad W_{i0} = w_{i0}/h \quad (i=1,2,3) \quad (34)$$

を導入する。ここで、 W_i はたわみ関数の無次元量を表し、 W_{i0} は中央たわみの無次元量を表す。これ以外に導入した無次元量は

$$P = \frac{p_0 a^4}{Eh^4}, \quad S_r = \frac{N_{ra}^2}{Eh^3}, \quad \eta = \frac{a}{h} \Theta \quad (35)$$

である。 S_r は面内力 N_r の無次元量であり、 P は圧力の無次元量である。以後、 P を圧力パラメータと呼ぶことにする。

図3および4に $\nu=0.25$ の場合の遷移解のたわみ W_3 、たわみ角 η 、無次元面内力 S_r および線形弾性解のたわみ W_1 の半径方向分布を示す。図3は周辺固定の場合 ($P=10.0$) であり、図4は周辺単純支持の場合

Fig.5 Variations of W_1 , W_2 and W_3 as functions of P (Clamped edge, $\nu=0.25$)

Fig.6 Variations of W_1 , W_2 and W_3 as functions of P (Simply supported edge, $\nu=0.25$)

($P=1.0$) である。遷移解のたわみは線形弾性解のそれに比べて小さいことがわかる。これは、面内力の作用によって幾何剛性が増大したことによる。

図5および6に、線形解の中央たわみ、膜の解の中央たわみおよび遷移解の中央たわみの圧力パラメータ P に対する変化を示す。 W_{30} (Clamped) および W_{30} (Simply S) は、それぞれ、周辺固定および周辺単純支持の境界条件に対する遷移解であり、 W_{10} (Clamped) および W_{10} (Simply S) はそれぞれの境界条件に対する線形弾性解である。また、 W_{20} (Hencky) は膜の解である。

この図から、遷移解は P が小さいときはそれぞれの境界条件に対して線形弾性解に一致し、 P が大きいときは膜の解 W_{20} (Hencky) に漸近していることがわかる。このことから、遷移解は両方の解を滑らかに接続していることがわかる。このような傾向は Way, S. の実験からも確認されている⁽⁸⁾。ただし、膜の解では境界条件のうちたわみが零であるという条件だけなので、遷移解は膜の解と厳密には一致しない。また、 P が膜の解の領域では面内力は P の $2/3$ 乗に比例するこ

Fig. 7 Comparison of parabola shape and deflections W_1 and W_2

とが確認でき、式(17)および(18)が確認できる。

線形弾性解による変形形状と膜の解によるそれをパラボラ形状と比較したものを図7に示す。比較においては、最大変位が1になるように標準化した。すなわち、パラボラ形状は式(31)で表される $f_p(r/a)$ 、線形弾性解の形状は式(8)で表される $f_1(r/a, v)$ 、膜の解の形状は式(21)で表される $f_2(r/a, v)$ である。なお、線形弾性解においては周辺単純支持の場合の結果である。また両方の解においては、ポアソン比 $v=0.25$ とした。図7から、パラボラ形状は線形弾性解(周辺単純支持)による形状と膜の解による形状との間にあることがわかる。また、膜の解による形状の方がパラボラ形状に近いことがわかる。

図8に、遷移解が表す形状とパラボラ形状との比較を種々の P に対して示す。ポアソン比は、図7同様、 $v=0.25$ とした。 $f_3(r/a, v=0.25, P)$ は遷移領域でのたわみ関数を中央たわみで標準化したものである。この図から、遷移解が表す形状は圧力パラメータ P に依存するが、パラボラ形状に近い形状を与える圧力パラメータ P があることがわかる。

このことを定量的に調べるために、次式で定義される標準偏差 Σ を導入する。

$$\Sigma = \sqrt{\frac{1}{S} \iint_S [w(x, y) - w_p(x, y)]^2 dx dy} \quad (36)$$

ここで、 S は面積である。定義からわかるように、パラボラ形状に近いほど Σ の値は小さい。

今考えている問題は軸対称問題であるので、式(36)は次のように書き直すことができる。 $i=1, 2, 3$ として、

$$\Sigma_i = \sqrt{\frac{2}{a^2} \int_0^a [w_i(r/a) - w_p(r/a)]^2 r dr} \quad (37)$$

ここで、 $i=1, 2, 3$ は線形弾性変形形状、膜の変形形状、遷移領域での変形形状に対応する。

Fig. 8 Comparison of parabola shape and deflection W_3 for various P

Fig. 9 Variation of the standard deviation for shape as function of P ($v=0.25$)

形状の比較が容易になるように、 $w_{i0}=w_{p0}$ ($i=1, 2, 3$) となるように形状を選ぶと、式(37)は

$$\Sigma_i = w_{p0} \sigma_i \quad (38)$$

$$\sigma_i = \sqrt{2 \int_0^1 [f_i(\xi) - f_p(\xi)]^2 \xi d\xi} \quad (39)$$

ここで、 $\xi=r/a$ である。パラボラ形状以外は v や P の関数となるが、ここでは簡単に表現した。

$v=0.25$ の場合の P の変化に対する σ_i の変化を図9に示す。遷移領域での σ_3 の範囲を明確にするために、線形弾性解の形状に対する値($\sigma_1=0.04347$)と膜の解による形状に対するもの($\sigma_2=0.02459$)を同じ図に示している。これら二つは P に依存しない。

図9から、 σ_3 は P が小さいときは σ_1 に一致するが、 P の増加に伴って減少し最小値をとることがわかる。さらに P が大きくなると σ_3 は増加し始め、 σ_2 に漸近する。遷移領域での形状には、 σ_3 を最小にする P が存在することがわかる。 $v=0.25$ の場合、最小値は $P \approx 34.0$ のときで、 $\sigma_{3\min}=0.00431$ である。

$v=0.25, 0.35$ および 0.45 における標準偏差などを表

Table 1 Standard deviations and deflections
for $\nu=0.25, 0.35$ and 0.45 (P_{opt} : P for σ_{3min})

	$\nu=0.25$	$\nu=0.35$	$\nu=0.45$
σ_1	0.04347	0.04607	0.04858
σ_2	0.02459	0.02209	0.01941
σ_{3min}	0.00431	0.00435	0.00429
P_{opt}	34.0	46.0	70.0
W_{30max}	2.1624	2.3011	2.5276

1にまとめておく。この表で、 W_{30max} は、 P_{opt} における最大無次元たわみである。この表から、線形解の領域ではポアソン比が大きくなるに従って標準偏差は大きくなり、膜の解の領域では小さくなる。遷移解で記述される領域においては、若干の変動があるがほぼ一定の値になっている。また、 σ_{3min} に対する P の値は大きくなる。最大変位はポアソン比が大きくなるに従って大きくなることからわかる。

3.2 パラボラリフレクターへの適用 いま、開口径 $d=1000[\text{mm}]$ のパラボラリフレクターを、円形膜の状態から加圧して生成する場合を考える。厚さ $h=1[\text{mm}]$ 、ヤング率 $E=5[\text{MPa}]$ 、ポアソン比 $\nu=0.25$ の材料を用いるものとする。

σ_3 の値が最小の $P=34.0$ のときの形状を用いることにすると、表1から中央たわみは $W_{30}=w_{30}/h=2.162$ である。 $w_{p0}=w_{30}$ と考えれば、式(32)から焦点距離は $f=28.90 \times 10^3 [\text{mm}]$ となり、 $fd=28.90$ となる。展開に必要な圧力 p_0 は式(35)から

$$p_0 = PE \left(\frac{h}{a} \right)^4 \quad (40)$$

で与えられ、 $p_0=2.72 \times 10^{-3} [\text{Pa}]$ が得られる。

仮に、膜の厚さを $h=10[\text{mm}]$ とすると、 $P=34.0$ の形状に対して、焦点距離は $f=2.890 \times 10^3 [\text{mm}]$ となり、 $fd=2.890$ となる。展開に必要な圧力は $p_0=27.2 [\text{Pa}]$ となる。

実際に用いられるパラボラリフレクターでは一般に、焦点距離/開口径、すなわち、 $fd=f/(2a)$ は0.433 ($2\theta_a=120^\circ$)から0.250 ($2\theta_a=180^\circ$)が用いられる⁽⁹⁾。 $2\theta_a=120^\circ$ の場合として、 $fd=0.433$ から焦点距離は $f=433[\text{mm}]$ 、式(32)から必要な深さは $w_{p0}=144.3 [\text{mm}]$ となる。 $h=1[\text{mm}]$ なので、 $W_{p0}=144.3$ となる。このとき、 $P=1.018 \times 10^7$ となり、図6から明らかなように、膜の解(Henckyの解)の領域にある。展開に必要な圧

力は $p_0=815.6 [\text{Pa}]$ となる。また、このとき膜に生ずる最大面内力は $N_{rmax}=400.0 [\text{N/m}]$ となる。

以上のことから、遷移領域での変形状態にはパラボラ形状に近いものが存在するが、その形状を用いた場合、 fd は通常用いられる値に比べて大きくなることからわかる。通常用いられる範囲の fd を用いた場合、変形状態は膜の解の領域にあり、標準偏差は遷移領域の形状に比べて大きくなることからわかる。

4. まとめ

本研究では、円板の線形弾性解が支配する変形領域と膜の解が支配する変形領域との間の遷移領域に着目し、その領域における変形状態がパラボラ形状に近い形状が得られることを示した。また、この領域においては、パラボラ形状との偏差 σ が最も小さくなる圧力パラメータがあることがわかった。

3.2節でパラボラリフレクターに適用した。その結果、遷移領域での変形状態で最もパラボラ形状に近い形状に対して、開口径 $d=1000[\text{mm}]$ 程度のものでも fd は大きな値になることがわかった。これらの値は実際に用いられる fd の値と比較して非常に大きい。 σ の値が最小になる形状で厚い膜を用いることによって、焦点距離は短くなるが、宇宙空間で展開することを考えると現実的ではない。また、実際に用いられる範囲の fd を用いた場合、変形状態は膜の解で記述されることもわかった。

今後の課題としては、膜の解で変形が記述される領域において形状の σ を小さくするための方法を開発することであると考えられる。このような方法としては、円形膜の周囲に張力を加える⁽²⁾、膜厚分布を変える⁽⁵⁾等の方法のほかに

PZT膜を用いた形状の制御

最適な補強

ヤング率などの物性値の最適化

などが考えられる。

参考文献

- (1) Lichodziejewski, D. and Cassapakis, C., AIAA Paper 99-1074, 1999
- (2) Jenkins, C.H. and Marker, D.K., Trans. ASME, J. Solar Energy Engng., Vol. 120, No. 4, 1998, 298
- (3) Hencky, H., Z. Math. Phys., Vol. 63, 1915, 311
- (4) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, 2nd ed., Macgraw-Hill, Inc. (1959)
- (5) Fitcher, W.B., NASA Technical Paper 3659, 1997
- (6) Campbell, J.D., Q.J. Mech. Appl. Math., Vol. 9, No. 1, 1956, 84
- (7) Fun, Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc., 1965
- (8) Way, S., Trans. ASME, Vol. 56 (1934), 627
- (9) 電子通信学会編, アンテナ工学ハンドブック, オーム社, 1980