薄板構造を含むポテンシャル場に対する特別な重み関数を利用した 境界要素解析*

阿部 馨 督^{*1}, 天谷 賢 治^{*2}, 青 木 繁^{*3}

Potential Field BEM Analysis for Thin Structure by Special Weighting Function

Keisuke ABE, Kenji AMAYA^{*4} and Shigeru AOKI

^{*4} Department of Mechanical and Environmental Informatics, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 O-Okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

A new boundary element method (BEM) for analyzing the potential field including thin plates is developed. It is known that the inaccurate solutions are encountered with the standard BEM for this potential problem. In case each source point on foreside and backside of the thin plate is close, the boundary integral equations for these sources nearly depend each other. This is because the fundamental solution distributions for each source are almost the same. In order to overcome this problem, the special weighting function whose form is not symmetric instead of the standard fundamental solution in the BEM is proposed. The weighting function for 2 D potential problem is derived. A few example problems are solved with this method to demonstrate its applicability and usefulness.

Key Words: Boundary Element Method, Fundamental Solution, Weighting Function, Thin Structure

結 言

薄板構造物を含むポテンシャル場に対する解析は、めっきにおける管楽器や放熱フィン等の電気めっき解析や、薄い遮蔽物が領域内に大きく突き出しているような羽根車の腐食解析など工業上の例が多い。

一般に、境界要素法 (BEM) は汎用・効率的な数値解析法として広く利用されている。しかし、領域内に著しく薄い板状構造物を含む解析に BEM を適用すると精度低下を生じることが知られている。⁽¹⁾

薄板構造物を含むポテンシャル場に対して通常の BEM 解析を行う場合、領域を一領域として扱う手法 (以後、単一領域法と呼ぶ) で解析すると、係数マトリクスが悪条件となるばかりではなく解が得られない場合がある。そのため、領域を幾つかの部分領域に分割する手法 (以後、領域分割法と呼ぶ) などで解析する方が有利とされている。⁽²⁾⁽³⁾ しかし、薄板構造物が多数存在する場合には、領域を多数に分割する必要がある。

たり、解の誤差が増大するといった問題があった。

本研究では、薄板構造物を含むポテンシャル場に対して特別な重み関数を基本解の代わりに境界要素解析に適用する事で、精度の良い解を得るための方法を提案する。具体的に、2 次元問題に対しての特別な重み関数を導出する。本手法を用いた 2 次元解析シミュレーションを行い、その有効性を示す。

1. 通常の境界要素法

1.1 支配方程式と境界条件 静電界、静磁界、定常熱伝導問題などの多くの物理現象はラプラス方程式やポアソン方程式を支配方程式とするポテンシャル問題として扱うことができる。本研究では次のような一般的なポテンシャル境界値問題を枠組とする。図 1 のように滑らかな境界 Γ をもつ領域 Ω 内で、ポテンシャル ϕ はラプラス方程式を満たすとする。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

式 (1) の支配方程式の境界条件は次の式 (2)~(4) のいずれかで与えられるとする。

$$\phi = \phi_0 \quad (2)$$

$$i \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = i_0 \quad (3)$$

* 原稿受付 2002 年 12 月 9 日。

^{*1} 東京工業大学大学院情報理工学研究所 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

^{*2} 正員、東京工業大学大学院情報理工学研究所。

^{*3} 正員、東洋大学工学部コンピュータ・ネットワーク情報工学科 (〒350-8585 川越市鯉井 2100)。

E-mail: kamaya@a.mei.titech.ac.jp

$$\phi = -f(i) \quad (4)$$

ただし, $\partial/\partial n$ は外向き法線方向の微分である.

1.2 通常の境界要素方程式の定式化 基本解 $\phi^*(x, y)$ を用いると, 式 (1) に対する境界要素法の基礎式は次式のように表せる.

$$c(y)\phi(y) = \int_{\Gamma} [\phi^*(x, y)i(x) - \phi(x)i^*(x, y)] d\Gamma \quad (5)$$

ここで, x, y は領域内の点, $c(y)$ はソース点 y が置かれている境界のなす角度によって決まる定数である.

ラプラス方程式に対する基本解 ϕ^* は次の微分方程式を満たす.

$$\nabla^2 \phi^*(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad (6)$$

ただし, $\delta(x - y)$ は Dirac のデルタ関数である. 2 次元ラプラス方程式に対して, 通常用いられている基本解は

$$\phi^*(r) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (7)$$

である. ここで r はソース点と積分点の距離を表す.

式 (5) を離散化すると次式が得られる.

$$[H]\{\phi\} - [G]\{i\} = \{0\} \quad (8)$$

式 (8) に境界条件を代入して, 未知成分に関する連立一次方程式に整理し直すと次式が得られる.

$$[A]\{q\} = \{b\} \quad (9)$$

ここで, $[A]$ は未知成分に関連する要素からなるマトリクス, $\{q\}$ は未知境界値, $\{b\}$ は既知境界から定まるベクトルである. このとき, 式 (4) が非線形関数の場合は, 式 (8) や式 (9) をニュートン法等で繰返し計算を行って解を収束させる.

Fig. 1 Governing equation and boundary conditions

1.3 通常の境界要素法の問題点 図 2 に示すように薄板構造部に基本解のソース点がある場合, 薄板上に置かれたソース点 A と下に置かれたソース点 B の間の距離が非常に近くなる. 通常の境界要素法の基本解はソース点を中心に軸対称な分布をもつため, 点 A および点 B をソース点とする基本解 ϕ^* のポテンシャル分布は同じような分布となる. 板厚を 0 に近づけていくと, 両者のポテンシャル分布は一致する. したがって, 通常的基本解を重み関数として用いると, 境界積分方程式 (5) の独立性が失われる. 代数方程式 (10) においては, マトリクス $[H]$, $[G]$ に同じような値をもつ行 ($h_{A,i} \simeq h_{B,i}$, $g_{A,i} \simeq g_{B,i}$; $i = 1 \dots n$) が現れる. マトリクスの条件数が悪くなるので解の精度が悪くなるばかりでなく解が得られない場合がある.

$$\begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{A,1} & \dots & h_{A,n} \\ h_{B,1} & \dots & h_{B,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} g_{1,1} & \dots & g_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{A,1} & \dots & g_{A,n} \\ g_{B,1} & \dots & g_{B,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ i_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (10)$$

2. 2 次元 Laplace 方程式の特別な重み関数の提案

2.1 特別な重み関数 基本解に対しての境界条件は対象とする問題とは無関係に定める事ができ, 同じ支配方程式を境界要素解析する場合に種々の基本解を利用する事ができる.⁽⁴⁾ マトリクス方程式 (10) の式の独立性を保つためには, 薄板上にソース点を置いたときに, 通常的基本解に代えて非軸対称な形状の重み関数 (グリーン関数) を与えればよい. 本研究では,

Fig. 2 Fundamental Solution Image

次式で表されるような特別な重み関数を利用する.

$$\phi^*(z) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{(z + \sqrt{z^2 - a^2} - ai)^2} \right\} \quad (11)$$

ただし, $z = |x| + yi$ とする. このとき a は任意のパラメータである. 式 (11) は, 有限長さ $2a$ の仮想絶縁板の片面上の一点で湧出しがあるときのポテンシャル分布を表す式である.

図 3 は, $a = 1$ のときの式 (11) の等ポテンシャル線を示している. 仮想絶縁板の上面では特異性があるため急激に変化しているが, 下面ではポテンシャルはなだらかに変化している.

2.2 特別な重み関数の利点 図 4 に示すような薄板構造部に基本解のソース点がある場合, 薄板上に置かれたソース点 A と下に置かれたソース点 B の間の距離が非常に近くなる. 提案する特別な重み関数式 (11) は図 3 に示すように上下非対称な分布をもつため, 点 A および点 B を中心とする重み関数 ϕ^* のポテンシャル分布は異なる. 板厚を 0 に近づけたとしても,

Fig. 3 Potential distribution of special weighting function

Fig. 4 Special Weighting Function Image

両者のポテンシャル分布は異なる. この関数を重み関数として用いると, 境界積分方程式が独立となる. 代数方程式 (10) においては, マトリクス $[H]$, $[G]$ に同じような値をもつ行が現れないので, 方程式の独立性が保たれて解を得ることができる.

本手法は, ソース点を薄板上に置いたときにだけ, 通常の基本解に代えて特別な重み関数式 (11) を適用すれば良いので, プログラムを大幅に変更する必要が無い.

2.3 係数マトリクス成分の計算法 境界要素法の係数マトリクス成分は, 基本解を境界要素上で積分することで計算する. 通常の基本解は解析的に積分できるが, 提案する重み関数は解析的な積分が困難である. 数値的に積分すると, 特異点周りの積分に誤差が生じる. そこで, 式 (11) を式 (12) のように変形し, この式を積分することを考える. すなわち, 式 (11) から通常の基本解を引いた特異性の無い下線部を数値的に積分し, これに通常の基本解を解析的に積分した値を加算する.

$$\phi^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{(z + \sqrt{z^2 - a^2} - ai)^2} \right\} - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (12)$$

図 5 は $a = 0.5$ のときの $y = +0$ 上における式 (12) の下線部の値を示している. $x = 0$ において, 特異性がないことがわかる.

3. 本手法の検証と解析例

3.1 通常の単一領域法との比較 薄板問題に対して, 本手法と通常の境界要素法で得られる解の精度を条件数で評価する. 条件数 $Cond$ は次式で与えられる.

Fig. 5 Potential distribution on x-axis

$$Cond = \lambda_{max}/\lambda_{min} \quad (13)$$

ここで、 $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ はそれぞれ式 (9) における係数マトリクス $[A]$ の最大固有値及び最小固有値である。条件数は式 (9) のベクトル $\{b\}$ の相対誤差の最大拡大率を表す。条件数が小さい程、解の誤差は小さい。⁽⁴⁾

図 6 に示すような解析モデルを、通常の境界要素法と本手法で解析した場合の条件数を求める。上辺から電流密度分布 $1[\text{mA}/\text{cm}^2]$ で電流を流し、下辺を接地した。領域中には高さ $h[\text{cm}]$ の絶縁板を接地した。1要素の長さは $1[\text{cm}]$ 、式 (11) のパラメータ a は 0.5 とした。板厚 h に対する、係数マトリクス $[A]$ の条件数を図 7 に示した。通常用いられている境界要素法は、板厚が薄くなるにつれて、条件数が悪くなる。一方、本手法は、板厚が薄くなった場合でも、条件数は上昇しない。したがって、本手法は薄板問題に対して精度の良い解析を行なえることが分かる。

Fig. 6 Two-dimensional problem, h :Height

Fig. 7 Comparison of condition number

3.2 領域分割法との比較 本手法の有効性を検証するため、簡単な例題を用いて領域分割法との比較を行う。図 8 に示すように、領域内に 1 枚の接地された薄板があり、領域の両端から電流を加える閉領域問題を考える。薄板の厚みを 0 とするため、通常の単一領域法では解析ができない。1要素の長さは $1[\text{cm}]$ 、式 (11) のパラメータ a は 0.5 とした。

本手法と領域分割法で求めた薄板面上の電流密度分布を図 9 に示す。本手法を用いて、精度良く解析できる事がわかる。

4. 特別な重み関数を利用した境界要素解析の例

図 10 に示すように、絶縁された複数の薄板を含む領域に電流を加える例題を本手法を用いて解析する。なお、本例題を通常の領域分割法で解析する場合、解析領域を複数の領域に適切な形で分割しなければならず、労力を要する。

一辺 $100[\text{cm}]$ の正方領域内に、4 枚の絶縁板があり、上辺からは $1[\text{mA}/\text{cm}^2]$ の電流を流入させ、下辺は接

Fig. 8 Analyzed model

Fig. 9 Current density distributions on the ground plate

地する。1要素の長さは1[cm]、式(11)のパラメータ a は0.5とした。

解析した絶縁板(a)上の電位分布を図11に示す。板の上側の電位が下側に比べて高いことが分かる。また、絶縁板の両端の電位は、板の中央部に比べて近いことが分かる。合理的な解析結果が得られている。

結 言

本論文では、薄板構造を含むポテンシャル場を対象として、特別な重み関数を利用した境界要素解析手法を開発した。仮想的に有限長の絶縁壁の片面中央部一点に湧出しがある場合のポテンシャルを表す特別な重み関数を導出した。本手法は、薄板部にソース点を置いたときにだけ、通常の基本解の代わりに導出した特別な重み関数を用いるため、通常の境界要素法プログラムを大幅に変更する必要が無い。

本手法を用いて薄板構造が複数含まれる問題に対して数値シミュレーションを行った。薄板構造が含まれる問題に対して領域を複数に分割することなく、精度の良い解析が行なえる事を確認した。

本研究では2次元問題を対象としたが、今後は3次

Fig. 10 Analyzed model

Fig. 11 Potential distributions on the thin plate

元問題への拡張を行う。本手法は、薄板構造が多数含まれる構造物に対するめっき解析や腐食解析等の様々な問題に応用できると思われる。

付 録

特別な重み関数の導出 本解析では、有限の長さの仮想絶縁板の片面に湧出しがある場合のポテンシャルを提案する重み関数として用いる。この関数は、次のように導かれる。

式(14)で表される z 平面上の円は、式(15)の写像によって ζ 面の実軸上の長さ $2a$ の平板に写像される。

$$z = ae^{i\theta} \quad (14)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (15)$$

一方、図12に示すように、 z 平面上の原点中心、半径 a の円周 K を境界とし、かつ、 K 上の点 σ に m の強さの湧き出しのある流れは次のように与えられる。⁽⁵⁾

$$f(z) = \frac{m}{2} \log \frac{(z - \sigma)^2}{z} \quad (16)$$

式(16)で表される円柱周りの流れは、式(15)によって平板周りの流れに等角写像され、以下の式で表される。

$$f(\zeta) = \frac{m}{2} \log \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - a^2} - ia)^2}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - a^2}} \quad (17)$$

式(17)の実部が本手法の重み関数 ϕ^* となる。

文 献

- (1) 結城 良治, 曹 国強, 細長い物体の BEM 解析の高精度化, “境界要素法論文集”, 7, (1990), pp.53-58
- (2) 宮坂 松甫, 橋本 和宏他 2, 境界要素法によるガルバニック腐食問題の解析, “材料”, 38-432, (1989), pp.1079-1084
- (3) C. A. Brebbia and S. Walker, 境界要素法の基礎と応用, 神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭訳, 培風館, (1981)
- (4) 河村 庄造, 伊吹 竜大他 1, 境界要素法を用いた境界値逆問題解析における適切な基本解の選択に関する研究, “日本機械学会論文集”, 64-628, A(1998), pp.2920-2924
- (5) 今井 功, 流体力学 (前編), 裳華房, (2001), pp.205-210

Fig. 12 Potential distribution on x-axis