ひずみゲージを用いた実構造における切欠部付近の
応力状態に対する簡便推定法*

(第2報, 面外変形または面内および面外変形を受ける薄板)

原 田 豊 満^{*1}, 野 口 博 司^{*2}Simple Estimation Method for Stress Field near a Notch
in Real Structures with Strain Gages(2nd Report, A Thin Plate under Anti-Plane Deformation or
both In-Plane and Anti-Plane Deformation)Toyomitsu HARADA^{*3} and Hiroshi NOGUCHI^{*3} Kurume National College of Technology,
1-1-1 Komorino, Kurume-shi, Fukuoka, 830-8555 Japan

The authors proposed a practical method for estimating the stress fields near a notch in a real structure under in-plane loading in the previous paper. In this method, boundary conditions of a region near a notch are determined reasonably, using the stress field expression and stress components by strain gages on the boundary. Therefore, in this method, precise estimation of the stress fields can be performed in real structure whose boundary conditions are hard to grasp. In this paper, we have developed this method so that it can be used for notches under anti-plane loading or both in-plane and anti-plane loading. A straight boundary near a notch and non-symmetric boundary conditions are investigated as factors lowering the estimation precision. Consequently, there is the angular limitation of a notch in application of this method. However estimation results accurate enough for practically were obtained in the most cases.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Stress Concentration, Notch, Circular Hole, Strain Gage, Real Structure, Displacement Function, Anti-Plane Deformation, In-Plane Deformation

1. 緒 言

有限要素法や境界要素法は汎用性に優れているため、機械や構造物の応力解析に広く使用され、安全性と経済性の向上に大きく貢献している。しかし実際の構造物においては、境界条件が複雑でしかも変化するため、解析において正確な境界条件を与えることは、困難であることが多い。このため結果的に、信頼性を損なう解析結果となることもある。

そこで著者らは、前報⁽¹⁾⁽²⁾において、強度評価上重要な実構造物の切欠部を対象として、応力関数とひずみゲージの併用により、境界条件を正確に決定し、応力状態を精度良く推定する方法を提案した。しかしこの方法は、板の支持条件や荷重条件から、面外変形が生じていない、または面外変形が面内変形と比較して小さいと判断できる場合には有効であるが、そのような判断が困難な場合や大きな面外変形が生じている場合には、適用できない。

そこで本研究では、自由円孔板の一般的な変位関数と切欠部周辺のひずみゲージによる薄板表面の応力値から、面外変形を受ける実構造物の切欠部の境界条件を合理的に決定し、応力状態を精度良く推定する方法を提案する。また面内変形および面外変形を受ける任

意の自由円孔板の応力状態の式を用いて、面内変形と面外変形が同時に掛かる場合に、面内応力と面外曲げ応力を分離して、応力状態を推定する方法を提案し、その有効性について検討を行った。

2. 面外変形を受ける切欠部の応力状態

2・1 応力状態の推定方法 本研究では、切欠き底付近に荷重がなく、切欠縁が自由境界である薄板の問題を対象とする。そして切欠きを円孔の一部とみなし、任意の自由円孔板の応力状態式を用いて、切欠部の応力状態を推定する。また簡単のため、面外変形は古典板曲げ理論により取扱った。

まず面外変形を受ける任意の自由円孔板の応力状態式を導く。面圧が掛からない領域では、面外変位 w は、つぎのように表される⁽³⁾。

$$Dw = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)] \quad \text{-----} \quad (1)$$

ここで z は複素変数、 $\varphi(z)$ および $\psi(z)$ は正則関数である。 D は板の曲げ剛性であり、 E をヤング率、 h を板厚、 ν をポアソン比とすると、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である。また単位長さ当たりのモーメント M_x, M_y, M_{xy} 、単位長さ当たりのせん断力 Q_x, Q_y および変位こう配は、つぎのように表される⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} M_x - M_y - 2iM_{xy} &= -2(1-\nu) [\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] \\ M_x + M_y &= -4(1+\nu) \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \\ Q_x - iQ_y &= -4\varphi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* 原稿受付 2003年7月3日。

^{*1} 正員、久留米工業高等専門学校(☎830-8555 久留米市小森野1-1-1)。^{*2} 正員、九州大学大学院工学研究院(☎812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)。

E-mail: harada@kurume-nct.ac.jp

$$D(\partial w / \partial x - i \partial w / \partial y) = \bar{z} \varphi'(z) + \psi'(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})$$

ところで式(1)の右辺は、平面問題においてはエアリーの応力関数を与え、 σ_r および σ_θ は、 $\text{Re}[\varphi'(z)]$ と $\text{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)]$ の一次結合で表わされ、 $\tau_{r\theta}$ は $\text{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)]$ を用いて表される⁽⁴⁾⁽⁵⁾。一方面外曲げ問題においても、式(2)から σ_x 、 σ_y および τ_{xy} は同様に表されることがわかる。この平面問題と面外曲げ問題の類似性により、2次元の複素応力関数の場合⁽⁶⁾と同様に、 $\varphi(z)$ および $\psi(z)$ を応力一価の条件下で、ローラン級数を用いて輪状領域において一般的に表すと、2次元の複素応力関数の一般表示⁽⁷⁾⁽⁸⁾とまったく同じ式の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Lz \log z + M \log z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n \\ \psi(z) &= Nz \log z + K \log z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

ここで L は実数であり、その他の係数は複素数である。

式(3)を式(2)に代入し座標変換を行って、 r - θ 座標系のモーメントおよびせん断力を求め、それらに半径 r_0 の円孔縁の自由境界条件を適用し、係数を適当に置き換えることにより、つぎに示す面外変形を受ける任意の自由円孔板の応力状態式を求めた。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^a &= A_0^a (1-\nu)(1-r_0^2 r^{-2}) \\ &\quad - (3+\nu)(r-r_0^4 r^{-3}) \{A_1^a \cos \theta - B_1^a \sin \theta\} \\ &\quad + (1-\nu)(r^{-1} - r_0^2 r^{-3}) \{P_1^a \cos \theta + Q_1^a \sin \theta\} \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \{ (n+2-\nu r^{-2} r^{-n}) - (n-1)(1-\nu) r_0^2 r^{-n-2} \\ &\quad - (3+\nu) r_0^{2n+2} r^{-n-2} \} \{C_n^a \cos n\theta - D_n^a \sin n\theta\} \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \{ (n-2-\nu r^{-2} r^{-n}) - (n+1)(1-\nu) r_0^2 r^{-n-2} \\ &\quad + (3+\nu) r_0^{2n+2} r^{-n-2} \} \{E_n^a \cos n\theta + F_n^a \sin n\theta\} \\ \sigma_\theta^a &= A_0^a (1-\nu)(1+r_0^2 r^{-2}) \\ &\quad - \{(1+3\nu)r + (3+\nu)r_0^4 r^{-3}\} \{A_1^a \cos \theta - B_1^a \sin \theta\} \\ &\quad - \{(3+\nu)r^{-1} - (1-\nu)r_0^2 r^{-3}\} \{P_1^a \cos \theta + Q_1^a \sin \theta\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \{ (n-2-\nu r^{-2} r^{-n}) - (n-1)(1-\nu) r_0^2 r^{-n-2} \\ &\quad - (3+\nu) r_0^{2n+2} r^{-n-2} \} \{C_n^a \cos n\theta - D_n^a \sin n\theta\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \{ (n+2-\nu r^{-2} r^{-n}) - (n+1)(1-\nu) r_0^2 r^{-n-2} \\ &\quad + (3+\nu) r_0^{2n+2} r^{-n-2} \} \{E_n^a \cos n\theta + F_n^a \sin n\theta\} \\ \tau_{r\theta}^a &= S_1^a (1-\nu) r^{-2} \\ &\quad + \{(1-\nu)r + (3+\nu)r_0^4 r^{-3}\} \{B_1^a \cos \theta + A_1^a \sin \theta\} \\ &\quad + \{(1-\nu)r^{-1} + (1-\nu)r_0^2 r^{-3}\} \{Q_1^a \cos \theta - P_1^a \sin \theta\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \{ (n-1)(1-\nu) r^{-n} - (n-1)(1-\nu) r_0^2 r^{-n-2} \\ &\quad + (3+\nu) r_0^{2n+2} r^{-n-2} \} \{D_n^a \cos n\theta + C_n^a \sin n\theta\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \{ (n-1)(1-\nu) r^{-n} - (n+1)(1-\nu) r_0^2 r^{-n-2} \\ &\quad - (3+\nu) r_0^{2n+2} r^{-n-2} \} \{F_n^a \cos n\theta - E_n^a \sin n\theta\} \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

ここで r - θ 座標系の原点は、円孔の中心とする。また上付き添字 a は、面外変形に関するものであることを表す。

応力一価の場合の一般的な多価性を与える $\varphi(z)$ および $\psi(z)$ ⁽³⁾と式(3)を比較して得られる多価性の式に、円孔縁の自由境界条件を適用することにより、つぎに示す自由円孔板の面外変位 w およびその勾配の $\theta=\alpha$ における多価性を求めた。

$$\left. \begin{aligned} [w]_{\alpha}^{a+2\pi} &= \frac{2\pi}{D} S_1^a \\ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{\alpha}^{a+2\pi} &= -\frac{4\pi}{D(1-\nu)} Q_1^a \\ \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{\alpha}^{a+2\pi} &= \frac{4\pi}{D(1-\nu)} P_1^a \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

ところで切欠きは、これらの多価性をもつことがあるが、円孔はもたない。したがって切欠部の応力の推定には、多価性の項を含む式(4)を用い、円孔部には、多価性の項を含まない式(4) ($Q_1^a = P_1^a = S_1^a = 0$)を用いる。

本法における応力状態の推定領域は、図1に示すように、切欠縁(円孔の場合は円孔縁)とひずみゲージが連なる曲線で囲まれた領域とし、ひずみゲージを切欠き半径の1.5倍の円弧上に配置し、推定領域の幅を切欠き半径の50%とした。具体的な応力状態推定の手順は、まずひずみゲージから得られる応力3成分の値を式(4)に代入して、 A_0^a や C_0^a などの未知係数に関する連立方程式を得る。これらの未知係数の値を最小2乗法により決定して、式(4)に代入することにより、具体的な応力状態式を求める。すなわち本法は、式(4)と切欠部周辺に配置したひずみゲージによる応力値から、対象領域の境界条件を推定し、同時にその応力状態を推定する方法である。

2・2 応力状態の推定結果 本研究では、実際のひずみゲージの出力の代わりに、有限要素解析による積分点の応力3成分の値を用いた(ひずみの実測値を

Fig. 1 Concept of the present method

用いた場合との推定誤差の違いは、比較的小さいことを確認している⁽¹⁾⁽²⁾。解析に用いた要素は、8節点薄肉シェル要素である。

2・2・1 円孔部の推定結果 円孔部の応力状態の推定には、無限級数を $n=5$ までで打ち切った式(4)と半径 $1.5r$ の円周を均等に分ける12箇所の応力3成分の値を用いた。

本法では極座標系の応力状態式を用いるので、応力状態の推定領域の近くに、直線境界があると推定精度が低下することがある⁽¹⁾⁽²⁾。このことを検討するために、図2に示すリガメントが円孔の半径に等しい中央円孔板の問題を検討した。この問題においては、板の両端を z 軸方向に -0.4mm 変位させている。推定の結果、円孔縁の最大主応力の有限要素解析の結果に対する誤差は、 $+0.3\%$ であった。このことから応力状態の

Error of estimated maximum stress : $+0.3\%$

Fig.2 Stress estimation of a rectangular plate with a central circular hole

x - and z -displacement and the rotations around x -axis, y -axis and z -axis are clamped.

● : Rosette gage
Thickness: 5.0mm
 $P_z = -500\text{N}$
(z direction load)

Error of estimated maximum stress : $+0.7\%$

Fig.3 Stress estimation of a square plate with a central circular hole under non-symmetric boundary conditions

推定領域と直線境界がこの程度近い場合でも、円孔部の応力状態は、本法により、精度良く推定できることがわかる。

また境界条件が非対称な場合には、対称な場合にくらべて不規則な境界条件となるため、推定精度を確保するためには、無限級数をより高次の項までとらなければならないと考えられる。しかし実用上の観点から、本法では、問題によらず、無限級数を一定の項までとった応力状態式を用いる。そのため境界条件が非対称である場合には、推定精度の低下が懸念される。

このことを検討するために、図3の問題の応力状態を推定した。この問題においては、左辺の縁で x 方向変位、 z 方向変位および x 軸、 y 軸および z 軸まわりの回転を拘束し、右下の角点に面外集中荷重をかけている。推定の結果、円孔縁の点 A に発生する最大主応力の有限要素解析に対する推定誤差は $+0.7\%$ であり、実用上十分な精度であると思われる。このことから境界条件が非対称である場合でも、本法により応力状態の推定は、問題なくできると考えられる。

2・2・2 切欠部の推定結果 切欠部の応力状態の推定には、無限級数を $n=3$ までで打ち切った式(4)と中心が切欠縁の内接円の中心で、半径が切欠半径の1.5倍である円弧を均等に分ける5箇所の応力3成分の値を用いた。

切欠部の場合も円孔部と同様に、推定領域の近くに、直線境界があると推定精度が低下することがある⁽¹⁾⁽²⁾ので、推定領域の近くに直線境界がある問題を検討した。

まずリガメントが切欠半径に等しい、片側半円切欠板の問題を検討した。この問題においては、板の両端を z 軸方向に -0.4mm 変位させている。図4に形状、境界条件および切欠底の最大主応力の有限要素解析の結果に対する推定誤差を示す。推定誤差は $+0.4\%$ であり、本法により、十分な精度で応力状態の推定ができていることがわかる。

つぎに図5に示す、片側にフィレットをもつ板の問題を検討した。この問題では、下縁で y , z 変位および x 軸、 y 軸および z 軸まわりの回転を拘束し、上辺の左端および右端に下向きと上向きの面外集中荷重をかけている。フィレット板の場合、切欠部の上下の直線境界が推定領域に近いことが、推定精度を低下させる原因になると考えられる。そこで推定領域と直線境界の距離を変化させるために、 θ を 30° , 45° および 60° と変化させて、応力状態の推定を行った。表1に切欠縁の最大主応力の有限要素解析の結果に対する推定誤差を示す。 θ が小さくなるにつれて、推定誤差が大きくなる。

なることがわかる。この挙動は、面内変形の場合と同様である⁽¹⁾⁽²⁾。これは θ が小さくなると、切欠部の上下の直線境界が、切欠底に近づくために推定精度が低

Error of estimated maximum stress : +0.4%

Fig. 4 Stress estimation of a rectangular plate with a half circular notch

y- and z-displacement and the rotations around x-axis, y-axis and z-axis are clamped.

Fig. 5 Stress estimation of plates with a fillet

Table 1 Errors of estimated maximum stress of the plates in Fig. 5

$\theta(^{\circ})$	Error (%)
30	+14.2
45	+3.2
60	+1.6

下しているものと考えられる。しかし実用部材では、多くの場合に θ は 45° より大きいので、精度低下の問題が発生することは少ないと考えられる。

以上の解析例から、本法は、適用できる切欠きの角度に制限はあるものの、広範囲の切欠材に対して実用上十分な精度で、適用できると考えられる。

3. 面内変形および面外変形を受ける切欠部の応力状態

3・1 応力状態の推定方法 面内変形と面外変形を同時に受ける切欠部の応力状態の推定には、面内変形の応力状態式と面外変形の応力状態式を重ね合わせた式を用いる。面外変形の応力状態式には、式(4)を用いる。一方面内変形の応力状態式は、以下のように導いた。

すなわち本研究では、面内変形においても、切欠き底付近に荷重がなく、切欠縁が自由境界である薄板の問題を対象とする。そして切欠きを円孔の一部とみなすことにより、任意の自由円孔板の応力状態式を用いて、切欠部の応力状態を推定する。また薄板を対象とするので、平面応力状態を仮定する。したがってここでは、極座標系の一般応力関数⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を用いて、応力成分を求め、半径 r_0 の円孔縁に自由境界条件を適用することにより、任意の自由円孔板の応力状態式として、つぎの式を求めた。

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^i &= A_0^i(1-r_0^2r^{-2}) \\
 &+ B_0^i\{1-(2\log r_0+1)r_0^2r^{-2}+2\log r\} \\
 &+ (r^{-1}-r_0^{-2}r)(E_1^i\cos\theta+J_1^i\sin\theta) \\
 &+ (r-r_0^4r^{-3})(A_1^i\cos\theta+B_1^i\sin\theta) \\
 &- \sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n-1)r^{-n-2}-\frac{1}{n}(n-1)(n-2)r_0^{-2}r^n\right. \\
 &- \frac{1}{n}(n-1)(n+2)r_0^{2n-2}r^{-n}\left\{C_n^i\cos n\theta+D_n^i\sin n\theta\right\} \\
 &- \sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n+1)r^{-n-2}+\frac{1}{n}(n+1)(n-2)r_0^{-2n-2}r^n\right. \\
 &- \frac{1}{n}(n^2-1)(n+2)r_0^{-2}r^{-n}\left\{E_n^i\cos n\theta+F_n^i\sin n\theta\right\} \\
 \sigma_{\theta}^i &= A_0^i(1+r_0^2r^{-2}) \\
 &+ B_0^i\{3+(2\log r_0+1)r_0^2r^{-2}+2\log r\} \\
 &+ (r^{-1}-3r_0^{-2}r)(E_1^i\cos\theta+J_1^i\sin\theta) \\
 &+ (3r+r_0^4r^{-3})(A_1^i\cos\theta+B_1^i\sin\theta) \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n-1)r^{-n-2}-\frac{1}{n}(n-1)(n+2)r_0^{-2}r^n\right. \\
 &- \frac{1}{n}(n-1)(n-2)r_0^{2n-2}r^{-n}\left\{C_n^i\cos n\theta+D_n^i\sin n\theta\right\} \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n+1)r^{-n-2}+\frac{1}{n}(n+1)(n+2)r_0^{-2n-2}r^n\right. \\
 &- \frac{1}{n}(n^2-1)(n-2)r_0^{-2}r^{-n}\left\{E_n^i\cos n\theta+F_n^i\sin n\theta\right\}
 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} = & (r-r_0)^4 r^{-3} (A'_i \sin \theta - B'_i \cos \theta) \\ & + (r^{-1} r_0^{-2} r) (E'_i \sin \theta - J'_i \cos \theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n-1) r^{n-2} - (n-1) r_0^{-2} r^n \\ & + (n-1) r_0^{2n-2} r^{-n}\} (C'_n \sin n\theta - D'_n \cos n\theta) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n+1) r^{-n-2} - (n+1) r_0^{-2n-2} r^n \\ & - (n-1) r_0^{-2} r^{-n}\} (E_n \sin n\theta - F_n \cos n\theta) \end{aligned} \right\}$$

上付き添字 i は、面内変形に関するものであることを表す。

また回転 ω および x 方向, y 方向の並進変位 u , v の $\theta = \alpha$ における多価性⁽¹⁾は、式(6)の係数によって、つぎのように表される。

$$\left. \begin{aligned} [\omega]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} &= \frac{\pi(\kappa+1)}{G} B'_0 \\ [u]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} &= -\frac{\pi(\kappa+1)}{2G} J'_i \\ [v]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} &= \frac{\pi(\kappa+1)}{2G} E'_i \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

ただし $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ である。また G は横弾性係数, ν はポアソン比である。

なお前報⁽¹⁾⁽²⁾においては、面内変形に対して、変位の多価性を含まない式を用いたが、本報では、面内変形を受ける切欠きに対して、変位の多価性を含む式(6)を用いる。それは以下の理由による。すなわち切欠きの角度 θ (図5参照)が 180° より大きな角度(たとえば 300°)の特殊な形状の切欠きの両端面(0° と 300° の面)では、変位の多価性が応力状態に与える影響が無視できなくなる。このような切欠きにおいて、両端面を含む切欠き部全体を応力状態の推定領域とした場合に、変位の多価性を含まない式を用いると、推定精度の低下が起こる。このような特殊な場合においても、推定精度の低下を小さくするために、本報では、変位の多価性を含む式を用いることとした。

しかし面外変形と同様に、面内変形においても円孔部には多価性が存在しないので、円孔部に対しては、多価性を含まない式(4)および式(6)を用いた。そして切欠部に対しては、上記の理由から、多価性を含む式(4)および式(6)を用いる。

式(4)と式(6)を重ね合わせた式に、ひずみゲージの応力3成分の値を代入すると、未知係数に関する連立方程式が得られる。そしてこれらの未知係数を最小2乗法により決定して、応力状態の推定を行う。この手順は、面外変形の応力状態の推定の場合と同じである。

ところで面外変形による応力は、板の両面で符号が

異なるため、式(4)と式(6)を重ね合わせる場合に、ある面の応力を式(4)+式(6))で表すと、その裏面の応力は、式(4)-式(6))で表わされる。重ね合わせた式として、式(4)+式(6))を用いた場合、 σ_r と σ_θ の式の第1項は、どちらも $A'_0 + (1-\nu)A''_0$ を係数とする項となる。また $\tau_{r\theta}$ の式には、 A'_0 と A''_0 は含まれていない。したがって式(4)+式(6))による未知係数の連立方程式からは、 $A'_0 + (1-\nu)A''_0$ の値は決定できても、 A'_0 と A''_0 の個別の値は決定できない。また式(4)-式(6))を用いた場合も、 $A'_0 - (1-\nu)A''_0$ が共通の係数となり、同様に A'_0 と A''_0 の値は決定できない。このことは A'_0 と A''_0 に固有のことであり、他の未知係数は、式(4)+式(6))か式(4)-式(6))のいずれかの式のみから求めることができる。

以上のことから、未知係数を決定するためには、式(4)+式(6))か式(4)-式(6))のいずれかの式を用い、さらに A'_0 と A''_0 を個別に求めるために、最低1点の応力3成分については、上記の式とは異なる方の式を用いる必要があることがわかる。すなわち実際の推定においては、ひずみゲージを最低1枚は、板の反対側に貼らなければならないことになる。

3・2 応力状態の推定結果 ここでは、まず板の反対側に貼らなければならないひずみゲージの枚数について、中央円孔板を例として検討を行った。

つぎに、推定精度の低下が懸念される場合について検討を行った。面内変形と面外変形が同時に掛かる場合でも、面外変形の場合と同様に、極座標系の応力状態式を用いるので、やはり推定領域の近くの直線境界が、推定精度低下の原因になると考えられる。また面外変形の場合と同様の理由で、非対称な境界条件も推定精度に影響を及ぼすと考えられる。すなわち推定精度を低下させる原因は、面外変形の場合と同じであると考えられる。したがって本章では、第2章の問題に面内変形を加えた問題を用いて、推定精度の低下について検討を行った。

本章においても面外変形の場合と同様に、実験結果の代わりに8節点薄肉シェル要素による有限要素解析の結果を用いた。ここで面内変形とともに与えた面外変形は、微小変形であることを確認している(面外変形のみを与えて、有限要素法による微小変形解析と大変形解析を行い、両解析結果の差や大変形解析における中立面の応力が小さいことを確認した。)。しかし面外変形が微小変形であっても、面内変形が同時に掛かる場合には、面内変形による面内力と面外変形による面外変位が、曲げモーメントの効果を生む。このような問題に対して、微小変形解析を行うと、面内変形

のみの解析結果と面外変形のみ解析結果が単純に重ね合わせられた結果が得られ、上述の曲げモーメントの効果が解析結果に反映されない。そこで本章の有限要素解析では、この効果を考慮できるアップデート・ラグランジェ法⁽¹²⁾による大変形解析を行った。

3・2・1 円孔部の推定結果 円孔部の応力状態の推定には、無限級数を $n=5$ まで打ち切った式(4)と式(6)を重ね合わせた式を用いた。

まず板の反対側に貼らなければならないひずみゲージの枚数を検討するために、図6に示す中央円孔板の応力状態の推定を行った。この問題では、板の両端を z 軸方向に -6.0mm 変位させている。応力3成分の値は、板の表面では、半径 $1.5r_0$ の円周を均等に分ける16箇所において、裏面(反対側)では同円周を均等に分ける3箇所において採取した。最小断面の円孔縁に生じる最大主応力の有限要素解析の結果に対する推定誤差は、面内応力(面内変形によって生じる応力)で -0.4% 、面外応力(面外変形によって生じる応力)で $+3.8\%$ である。これに対して、応力値の採取位置を板の反対側のみ、半径 $1.5r_0$ の y 軸上の2箇所とした場合、推定誤差はきわめて大きくなり、面内応力、面外応力とも推定値は有限要素解析の結果とくらべて、数倍の違いとなった。

以上のことから、推定精度の低下が懸念されない通常の場合でも、板の反対側に最低3枚程度のひずみゲージが必要であることがわかる。

つぎに推定精度の低下について、検討を行った。この検討においては、板の両面における半径 $1.5r_0$ の円周を均等に分ける10箇所(両面で合計20箇所)の応力3成分の値を用いた。

Fig.6 Stress estimation of a rectangular plate with a central circular hole under tension and anti-plane bending

まず直線境界の影響を検討するため、図7に示す中央円孔板の応力状態の推定を行った。前述のように、板の上下縁で一樣な引張荷重を与えていること以外は、第2章の図2の問題と同じである。ひずみゲージのパターンは、表と裏で同じ位置のパターンと表と裏で 18° ずらした互い違いのパターンの二通りとした。最小断面の円孔縁に生じる最大主応力の有限要素解析の結果に対する推定誤差を表2に示す。表から面内応力、面外応力とも 3% 未満の誤差である。このことから面内変形と面外変形が同時に掛かる場合も、直線境界と推定領域の距離が、この程度であれば、本法により、実用上問題のない精度で応力状態が推定できることがわかる。また推定結果は、ひずみゲージのパターンには、ほとんど影響されていない。

つぎに非対称な境界条件の問題として、図8の問題を検討した。この問題も右縁の下半分に、一樣な引張荷重が負荷されていること以外は、第2章の図3の問題と同じである。この問題においても、ひずみゲージのパターンは、表と裏で同じ位置のパターンと表と裏で 18° ずらした互い違いのパターンの二通りとした。表3に図8の点A、Bに生じる、面内及び面外の最大主応力の有限要素解析の結果に対する推定誤差を示す。面内応力、面外応力とも推定誤差は、最大でも 2% 程度であり、実用上十分な推定精度である。そしてこの場合も推定誤差は、ひずみゲージのパターンには、ほとんど影響されていない。また図9および図10に面

Fig.7 Stress estimation of a narrow rectangular plate with a central circular hole under tension and anti-plane bending

Table 2 Errors of estimated maximum stress of the plate in Fig.7

Strain gage's pattern	Error (%)	
	In-plane	Anti-plane
Pattern 1	-2.4	+1.9
Pattern 2	-2.5	+1.4

内および面外の有限要素法と本法による主応力等高線図を示す。本法による主応力等高線図は、表と裏で18

Fig.8 Stress estimation of a square plate with a central circular hole under non-symmetric tension and anti-plane bending

° ずらしたパターンの推定結果を示している。図から主応力等高線図も、有限要素法と本法では、きわめて近いことがわかる。以上のことから本法は、非対称な問題に対しても、適用可能であると考えられる。

以上の結果から、面内変形と面外変形を同時に受ける円孔部の応力状態は、本法により実用上問題のない精度で推定できると考えられる。さらに推定結果が、ひずみゲージのパターンには、ほとんど影響されないことと図6の推定結果から、ひずみゲージの位置を板の両面において一致させる必要はないと考えられる。

Table 3 Errors of estimated maximum stress of the plate in Fig.8

Strain gage's pattern	Error (%)	
	In-plane	Anti-plane
Pattern 1	+0.5	+1.6
Pattern 2	+0.5	+2.1

(a) Finite element analysis

(b) Present estimation

Fig. 9 Contour map of principal stress of in-plane in Fig. 8 (Gage pattern 2)

(a) Finite element analysis

(b) Present estimation

Fig. 10 Contour map of principal stress of anti-plane in Fig. 8 (Gage pattern 2)

3・2・2 切欠部の推定結果 切欠部の応力状態の推定は、無限級数を $n=3$ まで打ち切った式(4)と式(6)を重ね合わせた式と中心が切欠縁の内接円の中心で、半径が切欠半径の1.5倍の半径の円弧上の5箇所(両面で合計10箇所)の応力3成分の値を用いた。

まず図11に示す、片側半円切欠板の問題を検討した。

この問題においても、上下縁の一樣な引張荷重を除けば、第2章の図4の問題と同じである。ひずみゲージのパターンは、表裏で同一のパターンと表と裏で位置をずらしたパターンの二通りとした。表4に切欠底に生じる最大主応力の有限要素解析の結果に対する推定誤差を示す。二通りのひずみゲージのパターンに対し

て、面内応力、面外応力ともすべて2%以下の誤差であり、実用上十分な精度である。またこのことから、切欠きにおいても、板の両側でひずみゲージの位置を一致させる必要がないことがわかる。

つぎに図12に示す、片側フィレット板の問題を検討した。45°と60°の二つの形状について、検討を行った。この問題の境界条件も、上縁の引張荷重以外は、図5の境界条件と同じである。この問題では、ひずみゲージを貼る範囲が狭いこともあり、板の両側でひずみゲージの位置を一致させた。表5に、切欠き縁の最大主応力の有限要素解析の結果に対する推定誤差を示す。45°では面外応力の誤差が+14.1%と大きい、60°では、面内応力、面外応力とも2%以下の誤差であり、60°以上のフィレット板の応力状態は、本法により実用上十分な精度で推定できると考えられる。

以上のことから、面内変形と面外変形を同時に受ける切欠部の応力状態は、適用可能な切欠きの角度に制限はあるものの、比較的広い範囲の切欠部において、本法により実用上問題のない精度で推定できると考えられる。

4. 結 言

境界条件の正確な設定が困難であることが多い、実構造物の切欠部の応力状態を、精度良く推定することを目的に、前報⁽¹⁾⁽²⁾で提案したひずみゲージと無限円孔板の応力状態式を併用して、切欠部付近の境界条件

Fig.11 Stress estimation of a rectangular plate with a half circular notch under tension and anti-plane bending

Table 4 Errors of estimated maximum stress of the plate in Fig. 11

Strain gage's pattern	Error (%)	
	In-plane	Anti-plane
Pattern 1	-1.3	+1.4
Pattern 2	-2.0	+1.5

を合理的に決定する方法を、面外変形を受ける切欠部および面内変形と面外変形を同時に受ける切欠部に適用し、その有効性を検討した。その結果、適用できる切欠きの角度に制限はあるものの、本法により、比較的広い範囲の形状および境界条件の切欠部に対して、実用上十分な精度で応力状態の推定ができることが明らかになった。

具体的な結論は、以下のとおりである。

(1) 面外変形を受ける切欠部の応力状態は、無限級数を $n=3$ までとった応力状態式(4)と、切欠半径の1.5倍の半径の円弧上の5枚のロゼット型ひずみゲージによる応力3成分の値から、精度良く推定できる。

(2) 面外変形と面内変形を同時に受ける切欠部の応力状態は、無限級数を $n=3$ までとった応力状態式(4)と(6)を重ね合わせた式と切欠半径の1.5倍の半径の円弧上のロゼット型ひずみゲージによる応力3成分の値から、精度良く推定できる。ただしこの場合、板の反対側にも、ひずみゲージを貼らなければならない。直線境界や非対称な境界条件の影響が小さい通常の円孔部の場合、表側に16枚のひずみゲージを貼ったとすると、反対側には最低3枚程度のひずみゲージが必要である。

Fig.12 Stress estimation of plates with a fillet under tension and anti-plane bending

Table 5 Errors of estimated maximum stress of the plates in Fig. 12

$\theta(^{\circ})$	Error (%)	
	In-plane	Anti-plane
45	-3.5	+14.1
60	-1.7	+2.0

(3) 面外変形と面内変形を同時に受ける切欠部の応力状態は、直線境界の影響や非対称な境界条件など推定精度の低下が懸念される場合であっても、無限級数を $n=3$ までとった応力状態式(4)と(6)を重ね合わせた式と、切欠半径の1.5倍の半径の円弧上の板の両面に貼った10枚(片面5枚)のロゼット型ひずみゲージによる応力3成分の値から、比較的広範囲の問題において、精度よく推定することができる。またこの場合、板の両面において、ひずみゲージの位置を一致させる必要はない。

文 献

- (1) 原田豊満, 野口博司, 貝田博英, 機論, 63-605, A(1997), 73-80.
- (2) Harada, T. and Noguchi, H., *J. of Testing and Evaluation*, vol. 27, no. 2(1999), 122-130.
- (3) 鷲津久一郎, 機論, 18-68, 1952, 41-47.
- (4) 森口繁一, 2次元弾性論(1957), 10-12, 岩波書店.
- (5) 石田誠, き裂の弾性解析と応力拡大係数(1976), 11-12, 培風館.
- (6) 文献(5)の12-13ページ.
- (7) 文献(4)の42ページ.
- (8) 文献(5)の13ページ.
- (9) Michell J. H., *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31(1899), 111.
- (10) 文献(5)の15ページ.
- (11) 文献(5)の14-15ページ.
- (12) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, 有限要素法ハンドブックⅡ 応用編(1983), 270-285, 培風館.