き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張*

(第1報, 配向したスリットき裂を含む材料の巨視的弾性係数)

荒木 栄敏^{*1}, 南 亜樹^{*2}, 岩本 正治^{*3}

Extension of Mori-Tanaka Theorem to Crack Problem (1st Report, Macroscopic Elastic Moduli of the Material Containing Aligned Slit-Like Cracks)

Shigetoshi ARAKI^{*4}, Aki MINAMI and Masaharu IWAMOTO

^{**}Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

The differential equation for the macroscopic total strain of a material with respect to the crack density of the crack is derived by adopting the concept of the differential scheme when a infinitesimally small amount of slit-like crack is introduced to the matrix of the material containing many aligned slit-like cracks. By solving this differential equation, the macroscopic total strain, the average interaction stress and hence the macroscopic elastic moduli are formulated as a function of the crack density of the crack. On the contrary to the results obtained by the ordinary Mori-Tanaka theorem, the resulting macroscopic elastic moduli asymptotically tend to zero as the crack density of the crack increases. The present results have the same degree of accuracy with the self-consistent method and are good agreement with the numerical results given by Huang et al⁽⁶⁾, especially at relatively low crack density. The volume fraction of the aligned slit-like cracks in physical meaning is obtained by comparing the resulting interaction stress with that derived from the Mori-Tanaka theorem.

Key Words: Micromechanics, Mori-Tanaka's Theorem, Differential Scheme, Macroscopic Total Strain, Macroscopic Elastic Moduli, Aligned Slit-like Crack

1. 緒 言

き裂を多数含む材料の巨視的弾性係数を求めるには、き裂間の相互作用を考慮する必要がある。き裂が規則配置する場合には、その周期から得られる境界条件を基に相互作用が求められているが、完全にランダムに分布する場合には、一般に、均質化手法が用いられている。これは、材料中のある一つのき裂に着目してその周りをばかして均質化することで、均質材料中に1個のき裂が存在する問題に置き換えるという方法である。このような均質化手法には、物体全体の未知の巨視的弾性係数を用いる方法と平均相互作用場を用いるものとがある。前者の代表は self-consistent 法であり、後者は Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾である。

Budiansky と O'Connell⁽²⁾ は、self-consistent 法を用いて、配向していない円き裂が材料中にランダムに分布する場合の巨視的弾性係数を解析し、その支配

方程式を得た。これを数値解析した結果、巨視的弾性係数に及ぼすき裂の含有量の影響は、き裂の代表寸法と個数を用いて求められ、体積の次元を有するき裂密度によって表されることが示された。しかしながら、この結果は、き裂の寸法や個数が増して、き裂密度がある値を超えると巨視的弾性係数が負になるという物理的に矛盾した結果を含むものであった。この問題は、材料中に段階的にき裂を埋め込んで均質化するという、いわば self-consistent 法の増分形表示である differential scheme により解決⁽³⁾されている。

もう一つの均質化手法である Mori-Tanaka の定理は、self-consistent 法に比べて適用できる範囲が低濃度に限定されるものの、任意形状の介在物を取扱うことができ、かつ常に陽な解が得られるという優れた特徴を有するものである。Mori-Tanaka の定理において用いられる平均相互作用応力は、介在物の体積含有率と介在物内の固有応力の積となる。

この Mori-Tanaka の定理をき裂問題に適用すると、き裂は数学的には厚さが無限小の空殻であり、その体積含有率は零となるため、平均相互作用場が求められないという問題が生じる⁽⁴⁾。このため、Taya⁽⁵⁾ や斎藤⁽⁶⁾ はき裂の含有率の代わりに上述のき裂密度を用いて相互作用を求め、低濃度のき裂材の巨視的

* 原稿受付 2002年9月2日。

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学工学部(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} 正員, 防衛庁技術研究本部(〒229-0006 相模原市淵野辺2-9-54)。

^{*3} 正員, 京都工芸繊維大学大学院工学科学研究科(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

E-mail: zairiki@mech.kit.ac.jp

弾性係数を解析している。

Taya の手法を高濃度系のき裂問題へ適用すると、得られた巨視的弾性係数は self-consistent 法と同じ物理的矛盾を含むものとなる。したがって、Mori-Tanaka の定理に基づいた手法で、高濃度系のき裂問題に適用できるものは存在しないのが現状である。

そこで、本研究では、高濃度系のき裂問題を解析する方法を検討するため、Mori-Tanaka の定理に differential scheme の考え方を導入する。本報では、一方向に配列したスリットき裂の問題を取り上げる。まず、通常の Mori-Tanaka の定理とは異なり、スリットき裂を多数含む物体内の相互作用応力を未知量として取扱い、巨視的全ひずみを求める。この物体に新たに少量のき裂を加えたときの相互作用応力の変化を Taya の方法によって定め、巨視的全ひずみの変化を求める。さらに、加えたき裂の量を零とする極限を考えることで、き裂密度に関する巨視的全ひずみの微分方程式を導出する。得られた微分方程式を解くことで巨視的全ひずみを求め、これを用いて相互作用応力を定式化する。さらに、巨視的全ひずみから巨視的弾性係数を求め、self-consistent 法の結果⁽⁷⁾や Huang らの数値解析結果⁽⁸⁾と比較する。

2. き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張

2.1 解析モデル 図1に示すように、均質等方な有限物体 D 内に一方向に配列したスリットき裂 Ω が多数存在する状態を考える。き裂の分布は完全にランダムであり、その個数を N とする。D 内に含まれるき裂の個数が多いことから、き裂と D の外境界およびき裂間には相互作用が存在する。き裂はすべて同じ形状とし、その長さを $2a$ とおく。また、この段階で

Fig. 1 Many aligned slit-like cracks in a finite body

は D の形状は問わない。図1に示すように、き裂面に平行な方向に x_1 軸、垂直な方向に x_2 軸を取る。また、D と Ω は x_3 方向に十分長いものとし、平面ひずみ状態を考える。物体 D の弾性係数を C_{ijkl} とおく。このような物体に、一様な応力 σ_{ij}^0 が作用するときのき裂の等価固有ひずみを ϵ_{ij}^* とおく。

2.2 スリットき裂のき裂密度 最初に、スリットき裂のき裂密度を巨視的全ひずみの観点から再定義する。スリットき裂 Ω は、長半径 a の扁平な円柱ポイドの短半径 c が無限小となったものとして考えることができる。このとき、 Ω の等価固有ひずみ ϵ_{ij}^* は、き裂開口変位 $2c\epsilon_{ij}^*$ が有限であることから、

$$\lim_{c \rightarrow 0} c\epsilon_{ij}^* = \text{finite} \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満足しなければならない⁽⁹⁾。式(1)より、き裂開口変位をき裂長さで除したものをき裂開口ひずみ ϵ_{ij}^0 と定義する。すなわち、

$$\epsilon_{ij}^0 \equiv \lim_{c \rightarrow 0} \frac{c}{a} \epsilon_{ij}^* \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。

D 内に生じる相互作用応力は位置によって異なるが、これを $\bar{\sigma}_{ij}$ と表す。このとき、母材領域 $D - \Omega$ およびき裂領域 Ω における応力-ひずみ関係は次式のようにになる。

Ω 内：

$$\sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^\infty = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \bar{\epsilon}_{kl} + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) = 0 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

$D - \Omega$ 内：

$$\sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^\infty = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \bar{\epsilon}_{kl} + \epsilon_{kl}) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot b)$$

ここで、 σ_{ij}^∞ は無限体中に Ω が1個存在する場合の固有応力である。今、D は有限物体であるため σ_{ij}^∞ は D の境界条件を満足しない。相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ はこれを満足させるために加えられたものであり、境界条件は、

$$(\sigma_{ij}^\infty + \bar{\sigma}_{ij})n_j = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで n_i は D の外向単位法線ベクトルである。また、 ϵ_{ij} は全ひずみであり、Eshelby の解より、 Ω 内で、

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\epsilon_{kl}^* \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。ここで S_{ijkl} は Ω の形状に依存する Eshelby テンソルである。さらに、 $\bar{\epsilon}_{ij}$ は $\bar{\sigma}_{ij}$ に対応する相互作用ひずみであり、

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl} \quad \dots\dots\dots (6)$$

なる関係がある。 ϵ_{ij}^0 は作用応力 σ_{ij}^0 による作用ひずみであり、

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}\epsilon_{kl}^0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

なる関係がある。式(3)から式(7)より、固有応力は

Ω 内で次式のようになる。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^* &= C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \\ &= C_{ijkl}(S_{klmn}\epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*) \dots\dots\dots (8)\end{aligned}$$

この固有応力 σ_{ij}^* と前述した相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ は、内部応力の和の条件

$$\int_D (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^*) dD = 0 \dots\dots\dots (9)$$

を満足しなければならない。

次に物体 D の全ひずみを求める。巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ は、

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V_D} \int_D (\epsilon_{ij}^0 + \bar{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{ij}) dD \dots\dots\dots (10)$$

で求められるため、式(10)に式(3)を代入すると、

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{ij} &= \epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{V_D} \left\{ \int_{D-a} (\bar{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{ij}) dD \right. \\ &\quad \left. + \int_a (\bar{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) dD + \int_a \epsilon_{ij}^* dD \right\} \\ &= \epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{V_D} (C_{klij})^{-1} \int_D (\bar{\sigma}_{kl} + \sigma_{kl}^*) dD \\ &\quad + \frac{1}{V_D} \int_a \epsilon_{ij}^* dD \dots\dots\dots (11)\end{aligned}$$

となる。ここで V_D は D の x_3 方向の単位厚さ当たりの体積である。式(11)の右辺第2項は内部応力の和の条件式(9)より零となるので、式(2)のき裂開口ひずみ ϵ_{ij}^0 を用いると、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ は、

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{ij} &= \epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{V_D} \int_a \epsilon_{ij}^* dD \\ &= \epsilon_{ij}^0 + \frac{N}{V_D} \pi a^2 \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \epsilon_{ij}^* \right] \\ &= \epsilon_{ij}^0 + \frac{N}{V_D} \pi a^2 \epsilon_{ij}^c \dots\dots\dots (12)\end{aligned}$$

となる。これより、 ϵ_{ij}^0 の係数 $(N/V_D)\pi a^2$ をき裂密度 ρ と定義する。すなわち、

$$\rho \equiv \frac{N}{V_D} \pi a^2 \dots\dots\dots (13)$$

である。式(13)を式(12)に代入すると、 $\bar{\epsilon}_{ij}$ は、

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \rho \epsilon_{ij}^c \dots\dots\dots (14)$$

となる。なお、Laws と Brockenbrough⁽¹⁰⁾ もスリットき裂のき裂密度を定義しているが、その結果は $\epsilon = (N/V_D)a^2$ である。式(13)の ρ はこの結果の π 倍となっている。

2・3 Mori-Tanaka の定理をき裂問題に適用したときに生じる問題 まず、Mori-Tanaka の定理を紹介する。図1に示したき裂 Ω を x_2 方向に有限の厚みをもつ介在物に置き換える。この介在物 Ω は D に比べて小さいため、 Ω と D は相似で同軸であるという仮定が成り立つものとする、Tanaka-Mori の定理⁽¹¹⁾ より、

$$\int_{D-a} \sigma_{ij}^* dD = 0 \dots\dots\dots (15)$$

となる。内部応力の和の条件式(9)に式(15)を用いると、平均相互作用応力は、

$$\begin{aligned}\int_{D-a} (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^*) dD &+ \int_a (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^*) dD \\ &= \int_D \bar{\sigma}_{ij} dD + \int_{D-a} \sigma_{ij}^* dD + \int_a \sigma_{ij}^* dD \\ &= V_D \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D + V_a \langle \sigma_{ij}^* \rangle_a = 0 \\ \therefore \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D &= -\frac{V_a}{V_D} \langle \sigma_{ij}^* \rangle_a \dots\dots\dots (16)\end{aligned}$$

となる。これが Mori-Tanaka の定理である。 V_a は介在物 Ω の単位厚さ当たりの体積であり、また、 $\langle \rangle_D$ や $\langle \rangle_a$ などは D あるいは Ω にわたる体積平均を表しており、例えば、

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = \frac{1}{V_D} \int_D \bar{\sigma}_{ij} dD \dots\dots\dots (17)$$

である。

次に、Mori-Tanaka の定理(16)をき裂問題に適用したときに生じる問題を明らかにする。 Ω がき裂である場合には、き裂の体積含有率 V_a/V_D は幾何学的に、

$$\frac{V_a}{V_D} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{N}{V_D} \pi a c = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となるため、式(16)より、き裂が多数存在するにもかかわらず相互作用応力は零となる⁽⁴⁾。

この問題を解決するために、Taya⁽⁵⁾ や斎藤ら⁽⁶⁾ は、Budiansky らが定義したき裂密度⁽²⁾ が体積の次元を有することを利用して、き裂の体積含有率の代わりにき裂密度 ρ を用いて平均相互作用応力を、

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = -\rho \langle \sigma_{ij}^* \rangle_a \dots\dots\dots (19)$$

と表した。しかしながら、これによって問題がすべて解決されたわけではない。例えば、今、図1において一様な引張応力 σ_{22}^0 のみが作用する場合を考える。このとき、き裂は x_2 方向にのみ開口することから、Mura に従って、等価固有ひずみの成分としては ϵ_{22}^c のみを用いる⁽⁹⁾。き裂面上の応力自由条件は、式(3・a)と式(16)より、平均的に、

$$\sigma_{22}^0 + \langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D + \langle \sigma_{22}^* \rangle_a = 0 \dots\dots\dots (20)$$

となる。式(8)に Ω の Eshelby テンソルを代入するとともに、式(2)のき裂開口ひずみを用いると、 σ_{22}^* は Ω 内で、

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^* &= \lim_{c \rightarrow 0} \left[-\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{c}{a} \epsilon_{22}^* \right] \\ &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \epsilon_{22}^c \dots\dots\dots (21)\end{aligned}$$

となる。ここで E と ν は、それぞれ母材のヤング率とポアソン比である。式(19)と式(21)を式(20)に代入すると、き裂開口ひずみ ϵ_{22}^c は、

$$\epsilon_{22}^0 = \frac{2(1-\nu^2)}{E(1-\rho)} \sigma_{22}^0 \dots\dots\dots (22)$$

となる。式(22)を式(14)に代入することにより、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{22}$ は、最終的に、

$$\bar{\epsilon}_{22} = \epsilon_{22}^0 + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\rho}{1-\rho} \sigma_{22}^0 \dots\dots\dots (23)$$

となる。式(23)より、 $\rho < 1$ の場合においては、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{22}$ はき裂密度 ρ の増加とともに単調増加することがわかる。式(13)より、 ρ はき裂長さ l と個数の関数であるため、結局、き裂長さ l が長くなるか、あるいはき裂の個数が増加するにつれて巨視的全ひずみが増加することになる。このことは定性的には極めて妥当な結果であり、き裂の体積含有率の代わりにき裂密度を用いた Taya の手法は有効であると思われる。

しかしながら、き裂密度 ρ は幾何学的な意味での体積含有率を表すものではないため、この値が1以下でなければならないといういかなる根拠もない。式(23)より、 $\rho=1$ のとき $\bar{\epsilon}_{22}$ は発散し、また、 $\rho>1$ のときには負となることがわかる。これは物理的には正しくないため、Taya の手法は高濃度系のき裂問題には適用できないことがわかる。

Mori-Tanaka の定理と双壁をなす self-consistent 法を用いた場合においても、き裂密度がある値を超えると巨視的弾性係数が負になるという物理的に矛盾した結果を含むものとなることが知られている⁽²⁾。これは、材料中に段階的にき裂を埋め込んで均質化するという、いわば self-consistent 法の増分形表示である differential scheme により解決されている⁽³⁾。

self-consistent 法や differential scheme は、未知の巨視的弾性係数を含む支配方程式や支配微分方程式を数値計算を用いて解く方法であるため、一般的に陽な解が得られない。これに対して Mori-Tanaka の定理は、応力、ひずみ場やエネルギーが陽に求められるという特徴を有する。そこで、この Mori-Tanaka の定理の特徴を生かして、これに differential scheme の考え方を導入することによって高濃度系のき裂問題を解析する方法を検討する。

2・4 Mori-Tanaka の定理の拡張 Mori-Tanaka の定理や Taya の手法においては、介在物やき裂の形状を特定することなく、平均相互作用応力は介在物の含有率やき裂密度と固有応力との積で表される。これに対して、differential scheme の考え方を導入せんとする本解析手法では、き裂を含む物体に少量のき裂を加えたときの相互作用場の変化を論じる。このためき裂の形状を特定する必要があり、本報では、前述したように一方向に配列するスリットき裂を取り上げ

る。

2・4・1 一様な引張応力が作用する場合 図1に示す物体Dに一様な引張応力 σ_{22}^0 のみが作用する場合を考える。前述したように、スリットき裂 Ω は、長半径 a の扁平な円柱ボイドの短半径 c が無限小となったものとして考えられる。 ϵ_{33}^* は平面ひずみの条件より零とおいた。式(8)に円柱ボイドの Eshelby テンソルを代入すると、 σ_{ij}^* はボイド Ω 内で、

$$\sigma_{11}^* = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{a(2a+c)\epsilon_{11}^* + ac\epsilon_{22}^*}{(a+c)^2} \dots\dots\dots (24\cdot a)$$

$$\sigma_{22}^* = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{ac\epsilon_{11}^* + c(a+2c)\epsilon_{22}^*}{(a+c)^2} \dots\dots\dots (24\cdot b)$$

$$\sigma_{33}^* = -\frac{2E\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{a\epsilon_{11}^* + c\epsilon_{22}^*}{a+c} \dots\dots\dots (24\cdot c)$$

となる。式(24)より、 ϵ_{ij}^* は、

$$\epsilon_{11}^* = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{-(a+2c)\sigma_{11}^* + a\sigma_{22}^*}{a} \dots\dots\dots (25\cdot a)$$

$$\epsilon_{22}^* = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{-c\sigma_{11}^* + (2a+c)\sigma_{22}^*}{c} \dots\dots\dots (25\cdot b)$$

となる。これらを式(12)に代入して式(13)の ρ を用いると、 σ_{ij}^* は有限であるため、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ は、

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{11} &= \epsilon_{11}^0 - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \\ &\times \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c\{-(a+2c)\sigma_{11}^* + a\sigma_{22}^*\}}{a^2} \right] \\ &= \epsilon_{11}^0 \dots\dots\dots (26\cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{22} &= \epsilon_{22}^0 - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \\ &\times \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{-c\sigma_{11}^* + (2a+c)\sigma_{22}^*}{a} \right] \\ &= \epsilon_{22}^0 - \frac{2(1-\nu^2)}{E} \rho \sigma_{22}^0 \dots\dots\dots (26\cdot b) \end{aligned}$$

となる。式(26)より、き裂の存在により影響を受ける巨視的全ひずみの成分は $\bar{\epsilon}_{22}$ のみであることから、以後の議論においては $\bar{\epsilon}_{22}$ のみに着目する。

今、D内には相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ は存在するが、その値はこの段階では未知である。 $\bar{\sigma}_{ij}$ は、式(9)の内部応力の和の条件と式(20)のき裂面上の応力自由条件を満足しなければならない。式(20)を式(26・b)に代入することによって、き裂密度が ρ であるときの巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{22}(\rho)$ は、

$$\bar{\epsilon}_{22}(\rho) = \epsilon_{22}^0 + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \rho (\sigma_{22}^0 + \langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D) \dots\dots\dots (27)$$

となる。式(27)は、D内の応力-ひずみ関係式、内部応力の和の条件およびき裂面上の応力自由条件のすべてを満足する巨視的全ひずみの式である。

次に、differential schemeの考え方に従い、物体Dの母体領域D-Ωにn個のスリットき裂Ωを加える。nはD内にすでに存在しているき裂の個数Nに比べて非常に小さいものとする。また、新しく加えたき裂の位置は、D-Ω内で完全にランダムである。き裂密度の増加を $\delta\rho$ とすると、式(13)より、

$$\delta\rho = \frac{n}{V_D} \pi a^2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。この追加により平均相互作用応力は $\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ に変化するものとする。その変化量を $\delta\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ と置く、すなわち、

$$\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D = \langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_{D0} + \delta\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。この相互作用応力の変化により、D内にすでに存在していたき裂の固有応力も σ_{22}^0 に変化する。 $\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ と σ_{22}^0 は内部応力の和の条件を満足しなければならない。一方、加えたき裂の固有応力も σ_{22}^0 であるとみなすことができる。これに加えたき裂による相互作用の増分 $\delta\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ の間に内部応力の和の条件が成り立つと仮定すると、この場を上述の場に重ね合わせても、全体として内部応力の和の条件は満足されることになる。新しく加えたき裂は少量であることから、低濃度系のき裂問題に適用できるTayaの手法を適用すると、 $\delta\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ は、

$$\delta\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D = -\delta\rho\sigma_{22}^0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。き裂面上の応力自由条件は、式(20)と同様に、

$$\sigma_{22}^0 + \langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D + \sigma_{22}^0 = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。き裂を追加した後の巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{22}(\rho + \delta\rho)$ は、式(26・b)より、

$$\bar{\epsilon}_{22}(\rho + \delta\rho) = \epsilon_{22}^0 - \frac{2(1-\nu^2)}{E}(\rho + \delta\rho)\sigma_{22}^0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる。式(31)に式(29)と式(30)を代入して整理することで得られた σ_{22}^0 を式(32)に代入すると、

$$\bar{\epsilon}_{22}(\rho + \delta\rho) = \epsilon_{22}^0 + \frac{\rho + \delta\rho}{1 - \delta\rho} \frac{2(1-\nu^2)}{E} \times (\sigma_{22}^0 + \langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D) \quad \dots\dots\dots (33)$$

を得る。式(27)と式(33)より $\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ を消去すると、

$$\frac{\bar{\epsilon}_{22}(\rho + \delta\rho) - \bar{\epsilon}_{22}(\rho)}{\delta\rho} = \frac{1 + \rho}{\rho(1 - \delta\rho)} \{ \bar{\epsilon}_{22}(\rho) - \epsilon_{22}^0 \} \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。differential schemeの考え方に従い、式(34)においてき裂密度の変化が無限に小さい、すなわち $\delta\rho \rightarrow 0$ の極限を取ると、き裂密度 ρ に関する巨視的全

ひずみ $\bar{\epsilon}_{22}(\rho)$ の微分方程式、

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{\bar{\epsilon}_{22}(\rho + \delta\rho) - \bar{\epsilon}_{22}(\rho)}{\delta\rho} &= \frac{d\bar{\epsilon}_{22}(\rho)}{d\rho} \\ &= \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{1 + \rho}{\rho(1 - \delta\rho)} \{ \bar{\epsilon}_{22}(\rho) - \epsilon_{22}^0 \} \\ &= \frac{1 + \rho}{\rho} \{ \bar{\epsilon}_{22}(\rho) - \epsilon_{22}^0 \} \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

が得られる。式(35)を解くと、

$$\bar{\epsilon}_{22}(\rho) = \epsilon_{22}^0 + C\rho e^\rho \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。Cは積分定数である。巨視的全ひずみの初期条件は、 $\rho=0$ のとき $\bar{\epsilon}_{22}(0) = \epsilon_{22}^0$ であり、式(36)はこれを自動的に満足しているが、さらに相互作用応力の初期条件も満足しなければならない。式(27)より、平均相互作用応力 $\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ は、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{22}(\rho)$ を用いて、

$$\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D = \frac{E}{2(1-\nu^2)\rho} \{ \bar{\epsilon}_{22}(\rho) - \epsilon_{22}^0 \} \quad \dots\dots\dots (37)$$

となるため、式(36)を式(37)に代入すると、

$$\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D = \frac{EC}{2(1-\nu^2)} e^\rho - \sigma_{22}^0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

を得る。 $\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ の初期条件は、 $\rho=0$ のとき $\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D = 0$ であるため、積分定数Cは、

$$C = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sigma_{22}^0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる。式(39)を式(36)に代入すると、

$$\bar{\epsilon}_{22}(\rho) = \epsilon_{22}^0 + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sigma_{22}^0 \rho e^\rho \quad \dots\dots\dots (40)$$

を得る。さらに、式(7)を用いて ϵ_{22}^0 を求め、これを代入すると、最終的に、

$$\bar{\epsilon}_{22}(\rho) = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{22}^0 (1 + 2\rho e^\rho) \quad \dots\dots\dots (41)$$

となる。この式より明らかなように、 $\bar{\epsilon}_{22}(\rho)$ は ρ の増加とともに単調増加することがわかる。したがって、2・3節で述べた ρ が1を超えると全ひずみが負の値を取るという問題は生じない。なお、式(40)と式(14)の直接比較から、き裂開口ひずみは、

$$\epsilon_{22}^c = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{a}{c} \epsilon_{22}^* = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sigma_{22}^0 e^\rho \quad \dots\dots\dots (42)$$

となる。

次に、平均相互作用応力について検討を行う。式(39)を式(38)に代入すると、 $\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D$ は、

$$\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D = (e^\rho - 1) \sigma_{22}^0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

となる。式(20)と式(43)から σ_{22}^0 を消去して整理すると、

$$\langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D = -(1 - e^{-\rho}) \sigma_{22}^0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。式(44)を ρ についてMaclaurin展開すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D = - \left(\rho - \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} - \dots \right) \sigma_{22}^0 \dots \dots \dots (45)$$

となる。式(45)において2次以上の項を無視すると、き裂密度 ρ の値が小さい場合の相互作用応力は、Taya⁽⁵⁾ や斎藤⁽⁶⁾ が用いたものと一致することがわかる。本結果の妥当性については、後に self-consistent 法の結果⁽⁷⁾ や Huang らの数値解析結果⁽⁸⁾ との比較を行う。

2・4・2 一樣なせん断応力が作用する場合 次に、図1に示す物体Dに一樣なせん断応力 $\sigma_{21}^0 = \sigma_{12}^0$ のみが作用する場合を考える。この場合、き裂の等価固有ひずみは $\epsilon_{21}^0 = \epsilon_{12}^0$ のみであり、垂直成分に関する式(24)や式(25)のような議論は必要ない。き裂面上の応力自由条件は、式(3・a)と式(16)より、平均的に、

$$\sigma_{21}^0 + \langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D + \sigma_{21}^{\infty} = 0 \dots \dots \dots (46)$$

となる。式(8)に Ω の Eshelby テンソルを代入するとともに、式(2)のき裂開口ひずみを用いると、 σ_{21}^{∞} は Ω 内で、

$$\sigma_{21}^{\infty} = \lim_{c \rightarrow 0} \left[- \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{c}{a} \epsilon_{21}^0 \right] = - \frac{2\mu}{1-\nu} \epsilon_{21}^0 \dots \dots \dots (47)$$

となる。ここで μ は母材の剛性率である。式(46)に式(47)を代入することにより、き裂開口ひずみ ϵ_{21}^0 は、

$$\epsilon_{21}^0 = \frac{1-\nu}{2\mu} (\sigma_{21}^0 + \langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D) \dots \dots \dots (48)$$

となる。式(48)を式(14)に代入することによって、き裂密度が ρ のときの巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{21}(\rho)$ は、

$$\bar{\epsilon}_{21}(\rho) = \epsilon_{21}^0 + \frac{1-\nu}{2\mu} \rho (\sigma_{21}^0 + \langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D) \dots \dots \dots (49)$$

となる。

2・4・1項と同様に、物体Dの母材領域D- Ω に n 個のスリットき裂 Ω を加える。 n はD内にすでに存在しているき裂の個数 N に比べて非常に小さいものとする。また、新しく加えたき裂の位置は、D- Ω 内で完全にランダムである。き裂密度の増加 $\delta\rho$ は、2・4・1項と同様に式(28)となる。この追加により、平均相互作用応力は $\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D$ に変化するものとする。その変化量を $\delta\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D$ とおく、すなわち、

$$\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = \langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D + \delta\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D \dots \dots \dots (50)$$

である。 $\delta\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D$ は、2・4・1項と同様に、Tayaの手法を適用すると、

$$\delta\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = - \delta\rho \sigma_{21}^{\infty} \dots \dots \dots (51)$$

となる。ここで、 σ_{21}^{∞} は相互作用応力の変化によって変化したき裂の固有応力である。き裂開口ひずみも ϵ_{21}^0 に変化したとすると、これらの関係は式(47)と同様に、

$$\sigma_{21}^{\infty} = - \frac{2\mu}{1-\nu} \epsilon_{21}^0 \dots \dots \dots (52)$$

となる。また、き裂面上の応力自由条件は、式(46)と同様に、

$$\sigma_{21}^0 + \langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D + \sigma_{21}^{\infty} = 0 \dots \dots \dots (53)$$

となる。式(53)に式(50)と式(51)を代入して整理することで得られた σ_{21}^{∞} を式(52)に代入すると、 ϵ_{21}^0 は、

$$\epsilon_{21}^0 = \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{1}{1-\delta\rho} (\sigma_{21}^0 + \langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D) \dots \dots \dots (54)$$

となる。き裂を追加した後の巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{21}(\rho + \delta\rho)$ は、式(14)より、

$$\bar{\epsilon}_{21}(\rho + \delta\rho) = \epsilon_{21}^0 + (\rho + \delta\rho) \epsilon_{21}^0 \dots \dots \dots (55)$$

となる。式(54)を式(55)に代入すると、

$$\bar{\epsilon}_{21}(\rho + \delta\rho) = \epsilon_{21}^0 + \frac{\rho + \delta\rho}{1-\delta\rho} \frac{1-\nu}{2\mu} (\sigma_{21}^0 + \langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D) \dots \dots \dots (56)$$

となる。式(49)と式(56)より $\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D$ を消去すると、

$$\frac{\bar{\epsilon}_{21}(\rho + \delta\rho) - \bar{\epsilon}_{21}(\rho)}{\delta\rho} = \frac{1+\rho}{\rho(1-\delta\rho)} \{ \bar{\epsilon}_{21}(\rho) - \epsilon_{21}^0 \} \dots \dots \dots (57)$$

となる。式(57)において $\delta\rho \rightarrow 0$ の極限を取ると、き裂密度 ρ に関する巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{21}(\rho)$ の微分方程式、

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{\bar{\epsilon}_{21}(\rho + \delta\rho) - \bar{\epsilon}_{21}(\rho)}{\delta\rho} &= \frac{d\bar{\epsilon}_{21}(\rho)}{d\rho} \\ &= \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{1+\rho}{\rho(1-\delta\rho)} \{ \bar{\epsilon}_{21}(\rho) - \epsilon_{21}^0 \} \\ &= \frac{1+\rho}{\rho} \{ \bar{\epsilon}_{21}(\rho) - \epsilon_{21}^0 \} \dots \dots \dots (58) \end{aligned}$$

が得られるため、これを解いて、

$$\bar{\epsilon}_{21}(\rho) = \epsilon_{21}^0 + C\rho e^{\rho} \dots \dots \dots (59)$$

となる。 C は積分定数である。巨視的全ひずみの初期条件は、 $\rho=0$ のとき $\bar{\epsilon}_{21}(0) = \epsilon_{21}^0$ であり、式(59)はこれを自動的に満足しているが、さらに相互作用応力の初期条件も満足しなければならない。式(49)より、平均相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D$ は、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{21}(\rho)$ を用いて、

$$\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = \frac{2\mu}{(1-\nu)\rho} \{ \bar{\epsilon}_{21}(\rho) - \epsilon_{21}^0 \} - \sigma_{21}^0 \dots \dots \dots (60)$$

となるため、式(59)を式(60)に代入すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = \frac{2\mu C}{1-\nu} e^{\rho} - \sigma_{21}^0 \dots \dots \dots (61)$$

となる。 $\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D$ の初期条件は、 $\rho=0$ のとき $\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = 0$ であるため、積分定数 C は、

$$C = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{21}^0 \dots \dots \dots (62)$$

となる。式(62)を式(59)に代入すると、

$$\bar{\epsilon}_{21}(\rho) = \epsilon_{21}^0 + \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{21}^0 \rho e^\rho \quad (63)$$

を得る。さらに、式(7)を用いて求めた ϵ_{21}^0 を代入すると、最終的に、

$$\bar{\epsilon}_{21}(\rho) = \frac{\sigma_{21}^0}{2\mu} \{1 + (1-\nu)\rho e^\rho\} \quad (64)$$

となる。この式より明らかなように、 $\bar{\epsilon}_{21}(\rho)$ も ρ の増加とともに単調増加することがわかる。

次に、平均相互作用応力について検討を行う。式(62)を式(61)に代入すると、 $\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D$ は、

$$\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = (e^\rho - 1) \sigma_{21}^0 \quad (65)$$

となる。式(46)と式(65)から σ_{21}^0 を消去して整理すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = -(1 - e^{-\rho}) \sigma_{21}^{\infty} \quad (66)$$

となる。式(66)を ρ について Maclaurin 展開すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{21} \rangle_D = -\left(\rho - \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} - \dots\right) \sigma_{21}^{\infty} \quad (67)$$

となる。式(67)より、き裂密度 ρ の値が小さい場合には、本方法により得られた平均相互作用応力は Taya のものと一致することがわかる。

3. 解析結果および考察

本解析で得られた式(41)および式(64)の巨視的全ひずみを用いて、さらに巨視的弾性定数を求める。物体 D は、 x_1 - x_2 面内において異方性となるが、ここでは、他の手法による結果と比較するために、巨視的弾性係数 $\bar{E}$ と巨視的剛性率 $\bar{\mu}$ を、等方性材料と同様に、き裂の開口方向に作用する応力とその方向の全ひずみの関係より、

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{\sigma_{22}^0}{\bar{E}} \quad (68\cdot a)$$

$$\bar{\epsilon}_{21} = \frac{\sigma_{21}^0}{2\bar{\mu}} \quad (68\cdot b)$$

Fig. 2 Macroscopic elastic modulus versus crack density

と定義する。式(41)を式(68・a)に代入することにより、 $\bar{E}$ は、

$$\frac{\bar{E}}{E/(1-\nu^2)} = \frac{1}{1+2\rho e^\rho} \quad (69)$$

となる。また、式(64)を式(68・b)に代入することにより、 $\bar{\mu}$ は次式のようにになる。

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{1+(1-\nu)\rho e^\rho} \quad (70)$$

次に、Mori-Tanaka の定理をき裂問題へ適用したときの結果を求める。まず、2・3 節で述べたように、Mori-Tanaka の定理において幾何学的に求めたき裂の体積含有率を用いた場合、相互作用応力は零となり、解はき裂間の相互作用を考慮しない希薄分布の解と一致する⁽⁴⁾。この場合、 $\bar{E}$ は、

$$\frac{\bar{E}}{E/(1-\nu^2)} = \frac{1}{1+2\rho} \quad (71)$$

で与えられる⁽¹²⁾。また、Taya の手法による巨視的全ひずみは式(23)で与えられる。これを式(68・a)に代入することにより、 $\bar{E}$ は次式のようにになる。

$$\frac{\bar{E}}{E/(1-\nu^2)} = \frac{1}{1+\frac{2\rho}{1-\rho}} \quad (72)$$

一方、self-consistent 法を用いた場合、解は陽な形では求められず、 $\bar{E}$ と $\bar{\mu}$ に対する支配方程式が Hoenig により求められている⁽⁷⁾。これを式(13)で定めたき裂密度 ρ を用いて表すと、

$$\frac{\bar{E}}{E(1-\nu^2)} + C \sqrt{\frac{\bar{E}}{E(1-\nu^2)}} \rho = 1 \quad (73\cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} \left(1 + \frac{1-\nu}{2} \rho\right) = 1 \quad (73\cdot b)$$

となる。ここで、

$$C = \left[2 \sqrt{\frac{E(1-\nu^2)}{\bar{E}}} + 2 + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (74)$$

である。式(73)と式(74)の解は陽な形では求められないため、数値計算を用いてこれらを解くことで $\bar{E}$ と $\bar{\mu}$ が求められる。また、一般に、self-consistent 法を用いた場合には、き裂密度が大きくなると巨視的弾性係数が負になるという問題が生じるが、一方向に配列するスリットき裂の場合には負となることはないため、differential scheme による結果については省略する。

$\bar{E}$ とき裂密度 ρ との関係は、ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合について図2に示す。図中、実線は本解析解を、点線は希薄分布の解(71)を、一点鎖線は Taya の手法による解(72)をそれぞれ示している。また、破線は self-consistent 法による結果を示す。●印は、25個のき裂がランダムに分布する代表体積要素が周期的に

配列している状態を想定し、境界要素法を用いて巨視的弾性係数を解析した Huang らの数値解析結果⁸⁾である。まず、本解析解と Mori-Tanaka の定理に基づく従来の結果を比較する。図 2 より、本解析解は希薄分布の解と比べて小さいことがわかる。これは、き裂間の相互作用の影響によりき裂の開口が促進されるためであると考えられる。また、Taya の解と比べると、き裂密度 ρ が 0.5 程度まではおおむね一致しているが、 $0.5 < \rho < 1$ の範囲では大きくなることわかる。さらに、 $\rho \geq 1$ になると Taya の解は負となるのに対して、本解析解は ρ の増加とともに零に漸近していることがわかる。次に、その精度について吟味するため、本解析解と数値解析に基づく結果および self-consistent 法による結果を比較する。図 2 より、本解析解は self-consistent 法による結果と同様に ρ の増加とともに零に漸近しているが、 ρ の値のいかにかわらず self-consistent 法による結果と比べて大きいことがわかる。また、 ρ の値のいかにかわらず self-consistent 法より Huang らの数値解析結果に近い結果となることがわかる。特に、 ρ が 0.5 以下の場合には、ほぼ下限値を示している。したがって、本解析解は self-consistent 法に比べて良好な結果を示すことがわかった。

次に、巨視的剛性率 $\bar{\mu}$ とき裂密度 ρ との関係を、ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合について図 3 に示す。図中、実線は本解析解を、破線は self-consistent 法による結果を、●印は Huang らの数値解析結果を示している。図 3 より、本解析解は ρ の増加とともに零に漸近する傾向は $\bar{E}$ と同様であるが、 $\bar{\mu}$ においては $\bar{E}$ とは逆に、self-consistent 法による結果より小さくなることわかる。また、Huang らの結果と比べると、 ρ が 0.5 を超えると精度は悪くなるものの、これ以下の範囲ではよく一致することがわかる。

Fig. 3 Macroscopic shear modulus versus crack density

したがって、本解析解は、き裂間の相互作用の影響を表すことができ、また、き裂密度が増加した場合に、巨視的弾性係数が零に漸近するという物理的に矛盾のない結果となることから、高濃度系のき裂問題に適用できると考えられる。また、その精度は、self-consistent 法と比べて、 $\bar{\mu}$ においては若干劣るものの、 $\bar{E}$ では逆に優れており、全体的には同程度のものであると結論づけることができる。

このことを踏まえた上で、解析手法の優位性という観点から検討してみる。例えば、スリットき裂に加えて繊維も存在する場合を考えてみる。self-consistent 法は、物体中の一つの介在物に着目しその周りをばかして、未知の巨視的弾性係数が均質化するという方法であるため、き裂と繊維が共存するときには、別々に行うか段階的に行うかは別として、少なくとも 2 回の均質化を行う必要がある。したがって、得られる支配方程式はき裂のみが存在する場合に比べて複雑なものとなる。当然、陽な解が得られるとは思えない。

これに対して、本解析手法は未知の相互作用場で均質化するという手法である。最終的に得られた相互作用場は、作用応力に応じて式(44)と式(66)となる。両者は固有応力を除けば完全に一致しているため、これを統一的に表すと相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D$ は、

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = -(1 - e^{-\rho}) \sigma_{ij}^0 \dots \dots \dots (75)$$

となる。式(75)と Mori-Tanaka の定理(16)を比較すると、物理的なスリットき裂の体積含有率は $(1 - e^{-\rho})$ であると定義できる。したがって、き裂と繊維が共存する場合には、式(75)のき裂による相互作用場の解に、式(16)より求められる繊維の相互作用を単に足し合わせればよいことになる。すなわち、Mori-Tanaka の定理を用いてスリットき裂を含む複合材料を解析するには、き裂の体積含有率を $(1 - e^{-\rho})$ と置くだけでよいことになる。当然、解は陽な形となる。

式(75)に示したように、スリットき裂の物理的な体積含有率は $(1 - e^{-\rho})$ であることがわかったが、この含有率には形状に関する係数などがいっさい含まれていないため、少なくともき裂が一方向に配列している場合には、これを含有率として用いることができると思われる。しかしながら、この確認は今後の検討課題である。

4. 結 言

本研究では、高濃度系のき裂問題を解析する方法を検討するために、Mori-Tanaka の定理に differential scheme の考え方を導入した。本報では、一方向に配列したスリットき裂の問題を取り上げた。まず、スリ

ットき裂を多数含む物体中に生じる相互作用応力を未知量として取扱い、巨視的全ひずみを求めた。この物体に新たに少量のき裂を加えたときの相互作用応力の変化を Taya の手法に従って定め、巨視的全ひずみの変化を求めた。さらに、加えたき裂の量を零とする極限を考えることで、き裂密度に関する巨視的全ひずみの微分方程式を導出した。得られた微分方程式を解くことで、巨視的全ひずみを求め、これを用いて相互作用応力を定式化した。さらに巨視的全ひずみから巨視的弾性定数を求めた結果、き裂密度が増加してもこれが負にならず零に漸近するという物理的に矛盾のない解が陽な形で得られた。また、これは self-consistent 法と同程度の精度を有しており、き裂密度が比較的小さい場合には Huang らの結果とよく一致することがわかった。さらに、得られた相互作用応力を Mori-Tanaka の定理によるものと比較することで、一方向に配列するスリットき裂の物理的な体積含有率を定義することができた。

次報では、一方向に配列したペニー形き裂がランダムに分布する場合の解析を行う。

文 献

- (1) Mori, T. and Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Met.*, **21** (1973), 571-574.
- (2) Budiansky, B. and O'Connell, R. J., Elastic moduli of a cracked solid, *Int. J. Solids Struct.*, **12** (1976), 81-97.
- (3) Hashin, Z., The differential scheme and its application to cracked materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988), 719-734.
- (4) Benveniste, Y., A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mech. Mater.*, **6** (1987), 147-157.
- (5) Taya, M., Stiffness and strength of an aligned shortfiber reinforced composite, *J. Compos. Mater.*, **15** (1981), 199-210.
- (6) 斎藤憲司・岩本正治・荒木栄敏・矢野直義, 界面現象を考慮した繊維強化複合材料のマイクロメカニクスによる解析 (第 1 報, 配向したスリットき裂を含む材料の巨視的弾性係数), 機論, **58**-548, A (1992), 614-620.
- (7) Hoenig, A., Elastic moduli of a non-randomly cracked body, *Int. J. Solids Struct.*, **15** (1979), 137-154.
- (8) Huang, Y., Chandra, A., Jiang, Z. Q., Wei, X. and Hu, K. X., The numerical calculation of two-dimensional effective moduli for microcracked solids, *Int. J. Solids Struct.*, **33** (1996), 1575-1586.
- (9) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd Revised Ed., (1987), 240-248, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.
- (10) Laws, N. and Brockenbrough, J. R., The effect of micro-crack systems on the loss of stiffness of brittle solids, *Int. J. Solids Struct.*, **23** (1987), 1247-1268.
- (11) Tanaka, K. and Mori, T., Note on volume integrals of the elastic field around an ellipsoidal inclusion, *J. Elasticity*, **2** (1972), 199-200.
- (12) Kachanov, M., Tsukrov, I. and Shafiro, B., Effective moduli of solids with cavities of various shapes, *Appl. Mech. Rev.*, **47** (1994), 151-174.