き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張*

(第 2 報, 配向したペニー形き裂を含む材料の巨視的弾性係数)

南 亜樹^{*1}, 荒木 栄敏^{*2}, 岩本 正治^{*3}

Extension of Mori-Tanaka Theorem to Crack Problem (2nd Report, Macroscopic Elastic Moduli of the Material Containing Aligned Penny-Shaped Cracks)

Aki MINAMI, Shigetoshi ARAKI^{*4} and Masaharu IWAMOTO

^{*4} Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

For a material containing aligned penny-shaped cracks, the differential equation for the macroscopic total strain in the material is derived with respect to the crack density of the crack by using our differential scheme based on the incremental form of the Mori-Tanaka theorem. By solving this differential equation, the macroscopic total strain, the average interaction stress and hence the macroscopic elastic moduli are formulated as a function of the crack density of the crack. On the contrary to the results obtained by the ordinary Mori-Tanaka theorem, the resulting macroscopic elastic moduli asymptotically tend to zero as the crack density of the crack increases. The present results are in good agreement with the results obtained by the self-consistent method. The volume fraction of the aligned penny-shaped cracks in physical meaning is obtained by comparing the resulting interaction stress with that derived from the Mori-Tanaka theorem.

Key Words: Micromechanics, Mori-Tanaka Theorem, Differential Scheme, Macroscopic Total Strain, Elastic Moduli, Aligned Penny-shaped Crack

1. 結 言

Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾ をき裂を多数含む材料に適用する際に、き裂の含有量としてき裂密度を用いるという Taya の手法⁽²⁾ は、低濃度系には極めて有効であるが、高濃度の場合にはき裂密度がある値を超えると材料の巨視的弾性係数が負になるという物理的矛盾が生じる。したがって、現時点では、Mori-Tanaka の定理に基づいて、高濃度系のき裂問題に適用できる方法は存在しない。

これを解決するために、著者らは、前報⁽³⁾⁽⁴⁾において、増分形 Mori-Tanaka の定理を提案した。これは、新たに加えたき裂による相互作用の増分の評価に対してのみ Mori-Tanaka の定理を適用することで、巨視的全ひずみの増分を求め、differential scheme⁽⁵⁾ の考え方に基いて加えたき裂のき裂密度を零とする極限を考えることで、そのき裂密度に関する微分方程

式を導くという方法である。得られた微分方程式を解くことにより、相互作用応力や巨視的全ひずみを求めた。さらに、これらの結果から得られた巨視的弾性係数は、上述した矛盾もなく、き裂密度の増加につれて零に漸近するという傾向を示し、特に、き裂密度が比較的小さい場合には、Huang らの数値解析結果⁽⁶⁾ と良く一致した。また、得られた相互作用応力の解を通常の Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾ と比較することで、き裂の物理的な体積含有率を定義することができた⁽³⁾。

前報で取扱ったスリットき裂の問題は平面ひずみ問題である。これに対して、ペニー形き裂は三次元問題となる。そこで、本報では、前報で提案した増分形 Mori-Tanaka 定理の三次元き裂問題に対する有効性を検討するために、き裂面が一方に配列したペニー形き裂が多数存在する場合に対して相互作用応力を求める。さらに、巨視的弾性係数を解析し、self-consistent 法の結果と比較することを目的とする。

2. き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張

2.1 解析モデル

図 1 に示すように、均質等方な有限物体 D 内に一方に配列したペニー形き裂 Ω が多数存在する状態を考える。き裂の分布は完全にラ

* 原稿受付 2002 年 10 月 21 日。

^{*1} 正員、防衛庁技術研究本部 (☎ 229-0006 相模原市淵野辺 2-9-54)。

^{*2} 正員、京都工芸繊維大学工学芸学部 (☎ 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*3} 正員、京都工芸繊維大学大学院工学芸科学研究科。
E-mail: zairiki@mech.kit.ac.jp

ンダムであり、その個数を N とする。 D 内に含まれるき裂の個数が多いことから、き裂と D の外境界およびき裂間には相互作用が存在する。き裂はすべて同じ形状とし、その半径を a とおく。この段階では D の形状は問わない。また、図1に示すように、き裂面に垂直な方向に x_3 軸を取る。物体 D の弾性係数を C_{ijkl} とおく。このような物体に、一様な応力 σ_{ij}^0 が作用するときのき裂の等価固有ひずみを ε_{ij}^* とおく。

2.2 ペニー形き裂のき裂密度 前報と同様に、ペニー形き裂のき裂密度を巨視的全ひずみの観点から再定義する。図1に示すように、ペニー形き裂 Ω は長半径 a のペニー形空殻の短半径 c が無限小となったものとして考えることができる。このとき、 Ω の等価固有ひずみ ε_{ij}^* は、き裂開口変位 $2c\varepsilon_{ij}^*$ が有限であることから、

$$\lim_{c \rightarrow 0} c\varepsilon_{ij}^* = \text{finite} \quad (1)$$

を満足しなければならない⁽⁷⁾。前報では、スリットき裂のき裂開口変位をき裂長で除したものをき裂開口ひずみと定義した。本報では、これにならい、ペニー形き裂の代表寸法であるき裂直径 $2a$ で除したものをき裂開口ひずみと定義する。すなわち、式(1)より、

$$\varepsilon_{ij}^* \equiv \lim_{c \rightarrow 0} \frac{c}{a} \varepsilon_{ij}^* \quad (2)$$

である。

D 内に生じる相互作用応力は位置によって異なるが、これを $\bar{\sigma}_{ij}$ と表す。このとき、母材領域 $D - \Omega$ およびき裂領域 Ω における応力-ひずみ関係は次式のようにになる。

Ω 内：

$$\sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^\infty = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) = 0 \quad (3 \cdot a)$$

$D - \Omega$ 内：

$$\sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^\infty = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{kl}) \quad (3 \cdot b)$$

ここで、 σ_{ij}^∞ は無限体中に Ω が1個存在する場合の固有応力である。今、 D は有限物体であるため σ_{ij}^∞ は D の境界条件を満足しない。相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ はこれを満足させるために加えられたものであり、境界条件は、

$$(\sigma_{ij}^\infty + \bar{\sigma}_{ij})n_j = 0 \quad (4)$$

となる。ここで n_i は D の外向単位法線ベクトルである。また、 ε_{ij} は全ひずみであり、Eshelby の解より、 Ω 内で、

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^* \quad (5)$$

で与えられる。ここで S_{ijkl} は Ω の形状に依存する Eshelby テンソルである。さらに、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は $\bar{\sigma}_{ij}$ に対応する相互作用ひずみ、 ε_{ij}^0 は作用応力 σ_{ij}^0 による作用ひずみであり、それぞれ、

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{kl} \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0 \quad (7)$$

なる関係がある。式(3)から式(7)より、固有応力は Ω 内で次式のようになる。

$$\sigma_{ij}^\infty = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) = C_{ijkl}(S_{klmn}\varepsilon_{mn}^* - \varepsilon_{kl}^*) \quad (8)$$

この固有応力 σ_{ij}^∞ と前述した相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ は、内部応力の和の条件、

$$\int_D (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^\infty) dD = 0 \quad (9)$$

を満足しなければならない。

物体 D の巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は、式(3)と内部応力の和の条件(9)から求められ、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{V_D} \int_D (\varepsilon_{ij}^0 + \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}) dD \\ &= \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{V_D} \int_D \varepsilon_{ij}^* dD \quad (10) \end{aligned}$$

となる⁽³⁾。ここで V_D は D の体積である。式(10)に式(2)のき裂開口ひずみ ε_{ij}^* を用いて求めたペニー形き裂の巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{V_D} \int_D \varepsilon_{ij}^* dD \\ &= \varepsilon_{ij}^0 + \frac{N}{V_D} \frac{4}{3} \pi a^3 \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{ij}^* \right] \\ &= \varepsilon_{ij}^0 + \frac{N}{V_D} \frac{4}{3} \pi a^3 \varepsilon_{ij}^* \quad (11) \end{aligned}$$

となる。前報と同様に、 ε_{ij}^* の係数 $(N/V_D)(4\pi/3)a^3$ をペニー形き裂のき裂密度 ρ と定義する。すなわち、

$$\rho \equiv \frac{N}{V_D} \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (12)$$

である。式(12)を式(11)に代入すると、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は、

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \rho \varepsilon_{ij}^* \quad (13)$$

Fig.1 Many aligned penny-shaped cracks in a finite body

となる。なお, Budiansky と O'Connell⁽⁸⁾ もペニー形き裂のき裂密度を定義しているが, その結果は $\varepsilon = (N/V_D)a^3$ である。式(12)の ρ はこの結果の $4\pi/3$ 倍となっている。

2・3 Mori-Tanaka の定理の拡張

2・3・1 一様な引張応力が作用する場合 図1に示す物体 D に一様な引張応力 σ_{33}^0 のみが作用する場合を考える。前述したように, ペニー形き裂 Ω は, 長半径 a のペニー形空殻の短半径 c が無限小となったものとして考えられる。式(8)にペニー形空殻の Eshelby テンソルを代入すると, σ_{ij}^∞ は空殻 Ω 内で,

$$\sigma_{11}^\infty = \frac{E}{1+\nu} \left\{ -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - \varepsilon_{11}^* + \frac{13}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{11}^* + \frac{16\nu-1}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{22}^* - \frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{33}^* \right\} \quad \cdots (14\cdot a)$$

$$\sigma_{22}^\infty = \frac{E}{1+\nu} \left\{ -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - \varepsilon_{22}^* + \frac{16\nu-1}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{11}^* + \frac{13}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{22}^* - \frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{33}^* \right\} \quad \cdots (14\cdot b)$$

$$\sigma_{33}^\infty = \frac{E}{1+\nu} \left\{ -\frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{11}^* - \frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{22}^* - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\pi c}{a} \varepsilon_{33}^* \right\} \quad \cdots (14\cdot c)$$

となる。ここで E と ν は, それぞれ母材のヤング率とポアソン比である。式(14)より, ε_{ij}^* は,

$$\varepsilon_{11}^* = \frac{1-\nu}{E} \left\{ \frac{a(1+2\nu)}{2a-\pi c(1+\nu)} \sigma_{33}^\infty - \frac{a[32a-\pi c\{15+8\nu(1+\nu)\}]}{\{16(1-\nu)a-\pi c(7-8\nu)\}\{2a-\pi c(1+\nu)\}} \sigma_{11}^\infty + \frac{a[32\nu a-\pi c\{1+8\nu(3+\nu)\}]}{\{16(1-\nu)a-\pi c(7-8\nu)\}\{2a-\pi c(1+\nu)\}} \sigma_{22}^\infty \right\} \quad \cdots (15\cdot a)$$

$$\varepsilon_{22}^* = \frac{1-\nu}{E} \left\{ \frac{a(1+2\nu)}{2a-\pi c(1+\nu)} \sigma_{33}^\infty + \frac{a[32\nu a-\pi c\{1+8\nu(3+\nu)\}]}{\{16(1-\nu)a-\pi c(7-8\nu)\}\{2a-\pi c(1+\nu)\}} \sigma_{11}^\infty - \frac{a[32a-\pi c\{15+8\nu(1+\nu)\}]}{\{16(1-\nu)a-\pi c(7-8\nu)\}\{2a-\pi c(1+\nu)\}} \sigma_{22}^\infty \right\} \quad \cdots (15\cdot b)$$

$$\varepsilon_{33}^* = \frac{1-\nu}{E} \left\{ -\frac{a}{c} \frac{8(1+\nu)a-\pi c(3+4\nu)}{\pi\{2a-\pi c(1+\nu)\}} \sigma_{33}^\infty + \frac{a(1+2\nu)}{2a-\pi c(1+\nu)} (\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty) \right\} \quad \cdots (15\cdot c)$$

となる。これらを式(11)に代入して式(12)の ρ を用いると, σ_{ij}^∞ は有限であるため, 巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は,

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \rho \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{11}^* \right] = \varepsilon_{11}^0 \quad \cdots (16\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22}^0 + \rho \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{22}^* \right] = \varepsilon_{22}^0 \quad \cdots (16\cdot b)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33}^0 + \rho \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{33}^* \right] = \varepsilon_{33}^0 - \rho \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \sigma_{33}^\infty \quad \cdots (16\cdot c)$$

となる。式(16)から, き裂の存在により影響を受ける巨視的全ひずみの成分は $\bar{\varepsilon}_{33}$ のみであることから, 以後の議論においては $\bar{\varepsilon}_{33}$ のみに着目する。

前報で提案した手法に従って, D 内に生じている相互作用応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ を未知量として取扱う。 $\bar{\sigma}_{ij}$ は, 式(9)の内部応力の和の条件と式(3・a)より得られるき裂面上の応力自由条件,

$$\sigma_{33}^0 + \langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D + \langle \sigma_{33}^\infty \rangle_D = 0 \quad \cdots (17)$$

を満足しなければならない。式(17)を式(16・c)に代入することによって, ペニー形き裂のき裂密度が ρ であるときの巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{33}(\rho)$ は,

$$\bar{\varepsilon}_{33}(\rho) = \varepsilon_{33}^0 + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \rho (\sigma_{33}^0 + \langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D) \quad \cdots (18)$$

となる。式(18)は, D 内の応力-ひずみ関係式, 内部

応力の和の条件およびき裂面上の応力自由条件のすべてを満足する。

次に, 前報の手順に従って, 物体 D の母材領域 $D - \Omega$ に n 個のペニー形き裂 Ω を加える。 n は D 内にすでに存在しているき裂の個数 N に比べて非常に小さいものとする。また, 新しく加えたいき裂の位置は, $D - \Omega$ 内で完全にランダムである。き裂密度の増加を $\delta\rho$ とすると, 式(12)より,

$$\delta\rho = \frac{n}{V_D} \frac{4}{3} \pi a^3 \quad \cdots (19)$$

となる。この追加により平均相互作用応力は $\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D$ に変化するものとし, その変化量を $\delta\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D$ とおく, すなわち,

$$\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D = \langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D + \delta\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D \quad \cdots (20)$$

である。この相互作用応力の変化により, D 内にすでに存在していたき裂の固有応力も σ_{33}^∞ に変化する。 $\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D$ と σ_{33}^∞ は内部応力の和の条件を満足しなければならない。一方, 加えたいき裂の固有応力も σ_{33}^∞ であるとなすことができる。これに加えたいき裂による相互作用応力の増分 $\delta\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D$ の間に内部応力の和の条件が成り立てば, この場を上述の場に重ね合わせても, 全体として内部応力の和の条件は満足されることになる。新しく加えたいき裂は少量であることから, 低濃度系のき裂問題に適用できる Taya の手法を用いると, $\delta\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_D$ は,

$$\delta\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D = -\delta\rho\sigma_{33}^\infty \dots\dots\dots (21)$$

となる。き裂面上の応力自由条件は、式(17)と同様に、

$$\sigma_{33}^0 + \langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D + \sigma_{33}^\infty = 0 \dots\dots\dots (22)$$

となる。き裂を追加した後の巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{33}(\rho + \delta\rho)$ は、式(16・c)より、

$$\bar{\epsilon}_{33}(\rho + \delta\rho) = \epsilon_{33}^0 - (\rho + \delta\rho) \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \sigma_{33}^\infty \dots\dots\dots (23)$$

となる。式(22)に式(20)と式(21)を代入して整理することで得られた σ_{33}^∞ を式(23)に代入すると、

$$\bar{\epsilon}_{33}(\rho + \delta\rho) = \epsilon_{33}^0 + \frac{\rho + \delta\rho}{1 - \delta\rho} \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} (\sigma_{33}^0 + \langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D) \dots\dots\dots (24)$$

を得る。式(18)と式(24)より $\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D$ を消去すると、

$$\frac{\bar{\epsilon}_{33}(\rho + \delta\rho) - \bar{\epsilon}_{33}(\rho)}{\delta\rho} = \frac{1 + \rho}{\rho(1 - \delta\rho)} \{\bar{\epsilon}_{33}(\rho) - \epsilon_{33}^0\} \dots\dots\dots (25)$$

となる。前報と同様に、式(25)においてき裂密度の変化が無限に小さい。すなわち $\delta\rho \rightarrow 0$ の極限を取ると、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{33}(\rho)$ のき裂密度 ρ に関する微分方程式、

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{\bar{\epsilon}_{33}(\rho + \delta\rho) - \bar{\epsilon}_{33}(\rho)}{\delta\rho} &= \frac{d\bar{\epsilon}_{33}(\rho)}{d\rho} \\ &= \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{1 + \rho}{\rho(1 - \delta\rho)} \{\bar{\epsilon}_{33}(\rho) - \epsilon_{33}^0\} \\ &= \frac{1 + \rho}{\rho} \{\bar{\epsilon}_{33}(\rho) - \epsilon_{33}^0\} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

が得られる。式(26)を解くと、

$$\bar{\epsilon}_{33}(\rho) = \epsilon_{33}^0 + C\rho e^\rho \dots\dots\dots (27)$$

となる。 C は積分定数である。巨視的全ひずみの初期条件は、 $\rho=0$ のとき $\bar{\epsilon}_{33}(0) = \epsilon_{33}^0$ であり、式(27)はこれを自動的に満足しているが、さらに相互作用応力の初期条件も満足しなければならない。式(18)より、ペニー形き裂に対する平均相互作用応力 $\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D$ は、巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{33}(\rho)$ を用いて、

$$\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D = \frac{\pi E}{4(1-\nu^2)\rho} \{\bar{\epsilon}_{33}(\rho) - \epsilon_{33}^0\} - \sigma_{33}^0 \dots\dots\dots (28)$$

となる。式(27)を式(28)に代入すると、

$$\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D = \frac{\pi EC}{4(1-\nu^2)} e^\rho - \sigma_{33}^0 \dots\dots\dots (29)$$

を得る。 $\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D$ の初期条件は、 $\rho=0$ のとき $\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D=0$ であるため、積分定数 C は、

$$C = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \sigma_{33}^0 \dots\dots\dots (30)$$

となる。式(30)を式(27)に代入すると、

$$\bar{\epsilon}_{33}(\rho) = \epsilon_{33}^0 + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \sigma_{33}^0 \rho e^\rho \dots\dots\dots (31)$$

を得る。さらに、式(7)を用いて ϵ_{33}^0 を求め、これを代入すると、最終的に、ペニー形き裂の巨視的全ひずみは、

$$\bar{\epsilon}_{33}(\rho) = \frac{\sigma_{33}^0}{E} \left\{ 1 + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \rho e^\rho \right\} \dots\dots\dots (32)$$

となる。また、式(31)と式(13)の直接比較から、き裂開口ひずみは、

$$\epsilon_{33}^c = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{a}{c} \epsilon_{33}^* = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \sigma_{33}^0 e^\rho \dots\dots\dots (33)$$

となる。さらに、式(30)を式(29)に代入すると、平均相互作用応力 $\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D$ は、

$$\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D = (e^\rho - 1) \sigma_{33}^0 \dots\dots\dots (34)$$

となる。式(17)と式(34)から σ_{33}^0 を消去して整理すると、

$$\langle\bar{\sigma}_{33}\rangle_D = -(1 - e^{-\rho}) \sigma_{33}^\infty \dots\dots\dots (35)$$

となる。

2・3・2 一様なせん断応力が作用する場合 次に、

図1に示す物体 D に一様なせん断応力 $\sigma_{31}^0 = \sigma_{13}^0$ のみが作用する場合を考える。この場合、き裂の等価固有ひずみは $\epsilon_{31}^0 = \epsilon_{13}^0$ のみであり、垂直成分に関する式(14)や式(15)のような議論は必要ない。き裂面上の応力自由条件は、式(3・a)より、平均的に、

$$\sigma_{31}^0 + \langle\bar{\sigma}_{31}\rangle_D + \sigma_{31}^\infty = 0 \dots\dots\dots (36)$$

となる。式(8)に Ω の Eshelby テンソルを代入するとともに、式(2)のき裂開口ひずみを用いると、 σ_{31}^∞ は Ω 内で、

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^\infty &= \lim_{c \rightarrow 0} \left[-\frac{\mu\pi(2-\nu)}{2(1-\nu)} \frac{c}{a} \epsilon_{31}^* \right] \\ &= -\frac{\mu\pi(2-\nu)}{2(1-\nu)} \epsilon_{31}^c \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

となる。ここで μ は母材の剛性率である。式(36)に式(37)を代入することにより、き裂開口ひずみ ϵ_{31}^c は、

$$\epsilon_{31}^c = \frac{2(1-\nu)}{\mu\pi(2-\nu)} (\sigma_{31}^0 + \langle\bar{\sigma}_{31}\rangle_D) \dots\dots\dots (38)$$

となる。式(38)を式(13)に代入することによって、き裂密度が ρ のときの巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{31}(\rho)$ は、

$$\bar{\epsilon}_{31}(\rho) = \epsilon_{31}^0 + \frac{2(1-\nu)}{\mu\pi(2-\nu)} \rho (\sigma_{31}^0 + \langle\bar{\sigma}_{31}\rangle_D) \dots\dots\dots (39)$$

となる。

2・3・1 項と同じ手順を繰返す。まず、物体 D の母材領域 $D-\Omega$ に n 個のペニー形き裂 Ω を加える。 n は D 内にすでに存在しているき裂の個数 N に比べて非常に小さいものとする。また、新しく加えたき裂の位置は、 $D-\Omega$ 内で完全にランダムである。き裂密度の増加 $\delta\rho$ は、2・3・1 項と同様に式(19)となる。この追

加により平均相互作用応力は $\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D$ に変化するものとする。その変化量を $\delta \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D$ とおく。すなわち、

$$\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D = \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D + \delta \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D \quad (40)$$

である。相互作用応力の変化によって変化した固有応力を σ_{31}^0 と表すと、 $\delta \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D$ は、

$$\delta \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D = -\delta \rho \sigma_{31}^0 \quad (41)$$

で与えられる。き裂開口ひずみも ε_{31}^0 に変化したとすると、これらの関係は式(37)と同様に、

$$\sigma_{31}^0 = -\frac{\mu\pi(2-\nu)}{2(1-\nu)} \varepsilon_{31}^0 \quad (42)$$

となる。また、き裂面上の応力自由条件は、

$$\sigma_{31}^0 + \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D + \sigma_{31}^0 = 0 \quad (43)$$

であるため、これに式(40)と式(41)を代入して整理することで得られた σ_{31}^0 を、さらに式(42)に代入すると、 ε_{31}^0 は、

$$\varepsilon_{31}^0 = \frac{1}{1-\delta\rho} \frac{2(1-\nu)}{\mu\pi(2-\nu)} (\sigma_{31}^0 + \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D) \quad (44)$$

となる。き裂を追加した後の巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{31}(\rho + \delta\rho)$ は、式(13)より、

$$\bar{\varepsilon}_{31}(\rho + \delta\rho) = \varepsilon_{31}^0 + (\rho + \delta\rho) \varepsilon_{31}^0 \quad (45)$$

となるため、式(44)を代入すると、

$$\bar{\varepsilon}_{31}(\rho + \delta\rho) = \varepsilon_{31}^0 + \frac{\rho + \delta\rho}{1-\delta\rho} \frac{2(1-\nu)}{\mu\pi(2-\nu)} (\sigma_{31}^0 + \langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D) \quad (46)$$

を得る。式(39)と式(46)より $\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D$ を消去すると、

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{31}(\rho + \delta\rho) - \bar{\varepsilon}_{31}(\rho)}{\delta\rho} = \frac{1+\rho}{\rho(1-\delta\rho)} \{ \bar{\varepsilon}_{31}(\rho) - \varepsilon_{31}^0 \} \quad (47)$$

となる。式(47)において $\delta\rho \rightarrow 0$ の極限を取ると、き裂密度 ρ に関する巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{31}(\rho)$ の微分方程式、

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{\bar{\varepsilon}_{31}(\rho + \delta\rho) - \bar{\varepsilon}_{31}(\rho)}{\delta\rho} &= \frac{d\bar{\varepsilon}_{31}(\rho)}{d\rho} \\ &= \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} \frac{1+\rho}{\rho(1-\delta\rho)} \{ \bar{\varepsilon}_{31}(\rho) - \varepsilon_{31}^0 \} \\ &= \frac{1+\rho}{\rho} \{ \bar{\varepsilon}_{31}(\rho) - \varepsilon_{31}^0 \} \end{aligned} \quad (48)$$

が得られるため、これを解いて、

$$\bar{\varepsilon}_{31}(\rho) = \varepsilon_{31}^0 + C\rho e^\rho \quad (49)$$

となる。 $\rho = 0$ のとき $\bar{\varepsilon}_{31}(0) = \varepsilon_{31}^0$ であるという初期条件は自動的に満足しているため、相互作用応力の初期条件から積分定数 C を決定する。式(39)より、平均相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D$ は、巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{31}(\rho)$ を用いて、

$$\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D = \frac{\mu\pi(2-\nu)}{2(1-\nu)\rho} \{ \bar{\varepsilon}_{31}(\rho) - \varepsilon_{31}^0 \} - \sigma_{31}^0 \quad (50)$$

となるため、式(49)を代入すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D = \frac{\mu\pi(2-\nu)C}{2(1-\nu)} e^\rho - \sigma_{31}^0 \quad (51)$$

を得る。 $\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D$ の初期条件は、 $\rho = 0$ のとき $\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D = 0$ であるため、積分定数 C は、

$$C = \frac{2(1-\nu)}{\mu\pi(2-\nu)} \sigma_{31}^0 \quad (52)$$

となる。式(49)に式(52)と式(7)より求めた ε_{31}^0 を代入すると、ペニー形き裂の巨視的全ひずみは、

$$\bar{\varepsilon}_{31}(\rho) = \frac{\sigma_{31}^0}{2\mu} \left\{ 1 + \frac{2(1-\nu)}{\mu\pi(2-\nu)} \rho e^\rho \right\} \quad (53)$$

となる。また、式(52)を式(51)に代入すると、 $\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D$ は、

$$\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D = (e^\rho - 1) \sigma_{31}^0 \quad (54)$$

となる。式(36)と式(54)から σ_{31}^0 を消去して整理すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{31} \rangle_D = -(1 - e^{-\rho}) \sigma_{31}^0 \quad (55)$$

となる。

3. 解析結果および考察

本解析で得られた式(32)および式(53)の巨視的全ひずみを用いて、巨視的弾性定数を求める。巨視的弾性係数 $\bar{E}$ と巨視的剛性率 $\bar{\mu}$ は、き裂の開口方向に作用する応力とその方向の全ひずみの関係より、

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \frac{\sigma_{33}^0}{\bar{E}} \quad (56\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{31} = \frac{\sigma_{31}^0}{2\bar{\mu}} \quad (56\cdot b)$$

で与えられる。式(32)を式(56・a)に代入することにより、 $\bar{E}$ は、

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \rho e^\rho} \quad (57)$$

となる。また、式(53)を式(56・b)に代入することにより、 $\bar{\mu}$ は次式のようになる。

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{1 + \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} \rho e^\rho} \quad (58)$$

次に Mori-Tanaka の定理をき裂問題へ適用したときの結果を求める。まず、前報⁽³⁾ で述べたように、Mori-Tanaka の定理において幾何学的に求めたき裂の体積含有率を用いた場合、相互作用応力は零となり、解はき裂間の相互作用を考慮しない希薄分布の解と一致する⁽⁹⁾。この場合、 $\bar{E}$ と $\bar{\mu}$ は、

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \rho} \quad (59\cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{1 + \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} \rho} \quad (59\cdot b)$$

で与えられる⁽¹⁰⁾。また、Taya の方法による巨視的弾

性係数は次のようにして求められる。図1において一様な引張応力 σ_{33}^0 のみが作用する場合を考える。このとき、き裂は x_3 方向にのみ開口することから、Mura に従って、等価固有ひずみとしては ε_{33}^* のみを用いる⁽⁷⁾。式(8)に Ω の Eshelby テンソルを代入するとともに、式(2)のき裂開口ひずみを用いると、 σ_{33}^* は Ω 内で、

$$\sigma_{33}^* = \lim_{c \rightarrow 0} \left[-\frac{\pi E}{4(1-\nu^2)} \frac{c}{a} \varepsilon_{33}^* \right] = -\frac{\pi E}{4(1-\nu^2)} \varepsilon_{33}^* \quad \dots\dots\dots (60)$$

となる。Taya の手法において平均相互作用応力は、

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = -\rho \sigma_{ij}^* \quad \dots\dots\dots (61)$$

で与えられるため、これと式(60)をき裂面上の応力自由条件式(17)に代入すると、き裂開口ひずみ ε_{33}^* は、

$$\varepsilon_{33}^* = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E(1-\rho)} \sigma_{33}^0 \quad \dots\dots\dots (62)$$

となる。式(62)を式(13)に代入することにより、巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{33}$ は、

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33}^0 + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{\rho}{1-\rho} \sigma_{33}^0 \quad \dots\dots\dots (63)$$

となる。式(63)を式(56・a)に代入することにより、 $\bar{E}$ は次のようになる。

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\rho}{1-\rho}} \quad \dots\dots\dots (64)$$

一方、self-consistent 法を用いた場合、解は陽な形で求められず、 $\bar{E}$ と $\bar{\mu}$ に対する支配方程式が Hoenig により求められている⁽¹¹⁾。これを式(12)で定めたき裂密度 ρ を用いて表すと、

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 + \frac{2}{\pi} C \sqrt{2 \left(\frac{E}{\bar{E}} - \nu^2 \right) \rho} \quad \dots\dots\dots (65 \cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1+\nu}} C \left\{ 1 + C \sqrt{\frac{1-\nu}{2(1+\nu)}} \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right\}^{-1} \rho \quad \dots\dots\dots (65 \cdot b)$$

となる。ここで、

$$C = \left[(1+\nu) \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}} - \nu \right) + \sqrt{(1-\nu^2) \left(\frac{E}{\bar{E}} - \nu^2 \right)} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (66)$$

である。式(65)と式(66)を用いて $\bar{E}$ と $\bar{\mu}$ が求められる。

$\bar{E}$ とき裂密度 ρ との関係を、ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合について図2に示す。図中、実線は本解析解を、点線は希薄分布の結果(59・a)を、一点鎖線は Taya の手法による結果(64)をそれぞれ示している。また、破線は self-consistent 法による結果を示す。図2より、スリットき裂の場合⁽³⁾と同様に、本解析解は ρ の値のいかににかかわらず希薄分布の結果に比べて小さくなるのがわかる。また、Taya の解と比べると、き裂密度 ρ が 0.5 程度まではおおむね一致しているが、 $0.5 < \rho < 1$ の範囲では大きくなるのがわかる。さらに、 $\rho \geq 1$ になると Taya の結果は負となるのに対して、本解析解は ρ の増加とともに零に漸近していることがわかる。さらに、図2より、本解析解は ρ の範囲のいかににかかわらず self-consistent 法の結果とほぼ一致していることがわかる。

次に、巨視的剛性率 $\bar{\mu}$ とき裂密度 ρ との関係を、ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合について図3に示す。図中、実線は本解析解であり、破線は self-consistent 法による結果である。図3より、本解析解は self-consistent 法による結果と同様に、 ρ の増加とともに零に漸近する傾向を示すことがわかる。またその値は、self-consistent 法による結果に比べて、 ρ の値のいかににかかわらず小さくなっている。

本解析により得られた巨視的弾性係数は、き裂密度の増加とともに零に漸近するという物理的に矛盾のない結果となり、また、その値は、self-consistent 法の結果と比べて、 $\bar{\mu}$ では小さくなるものの $\bar{E}$ ではほぼ

Fig. 2 Macroscopic elastic modulus versus crack density

Fig. 3 Macroscopic shear modulus versus crack density

一致することから、本解析解は高濃度系のき裂問題に適用できると考えられる。

式(35)と式(55)より、作用応力のいかにかわらず、本解析手法により得られた相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D$ は、固有応力 σ_{ij}^0 を用いて、

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = -(1 - e^{-\rho}) \sigma_{ij}^0 \dots \dots \dots (67)$$

となる。これを通常の Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾ $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = -f \sigma_{ij}^0$ と比較することにより、ペニー形き裂の物理的な体積含有率は $(1 - e^{-\rho})$ と定義できる。また、き裂に加えて繊維や粒子などの強化基材が存在する場合に対しては、式(67)の相互作用応力に強化基材のそれを単に足し合わせれば良いことになる。すなわち、ペニー形き裂の体積含有率を $(1 - e^{-\rho})$ と置くことで、き裂を含む複合材料の問題は、通常の Mori-Tanaka の定理を用いて解析でき、陽な解が得られることとなる。一方、このような複合材料に対して、self-consistent 法を用いた場合には、支配方程式は複雑になるため、陽な解が得られるとは思えない。

前報⁽³⁾では、スリットき裂が一方方向に配列する場合を取扱い、平面ひずみ状態におけるスリットき裂の物理的な体積含有率は $(1 - e^{-\rho})$ であることを明らかにした。本報で扱った問題は、ペニー形き裂が一方方向に配列している三次元き裂問題であり、その体積含有率は上述したように $(1 - e^{-\rho})$ となった。さらに、この後の解析⁽⁴⁾により、だ円き裂が一方方向に配列している場合にも同じ結果となった。したがって、き裂が一方方向に配列している場合には、形状にかかわらず、その物理的な体積含有率は $(1 - e^{-\rho})$ となることがわかった。このように、き裂の体積含有率を統一的な形で表すことができたのは、き裂密度の定義によるものである。したがって、著者らの提案した巨視的全ひずみによる定義方法は、Budiansky らのものより優れていると思われる。

4. 結 言

本報では、前報で提案した増分形 Mori-Tanaka 定理を三次元き裂問題へ適用し、その有効性を検討するために、き裂面が一方方向に配列したペニー形き裂が多

数存在する場合の相互作用応力と巨視的弾性定数を求めた。その結果、スリットき裂の場合と同様に、き裂密度が増加しても巨視的弾性定数は負にならず零に漸近するという物理的に矛盾のない解が陽な形で得られた。また、その値は、self-consistent 法の結果と比べて巨視的弾性係数においては良く一致することがわかった。さらに、得られた相互作用応力を通常の Mori-Tanaka の定理と比較することで、ペニー形き裂の物理的な体積含有率が定義できた。また、これはスリットき裂のものと一致した。

次報では、一方方向ではなく、ランダムに配列したき裂に対する検討を行う。

文 献

- (1) Mori, T. and Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Met.*, **21** (1973), 571-574.
- (2) Taya, M., Stiffness and strength of an aligned short-fiber reinforced composite, *J. Compos. Mater.*, **15** (1981), 199-210.
- (3) 荒木栄敏・南亜樹・岩本正治, き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張(第1報, 配向したスリットき裂を含む材料の巨視的弾性係数), 機論, **70**-694, A (2004), 731-739.
- (4) Minami, A., Araki, S. and Iwamoto, M., Application of differential scheme to the Mori-Tanaka theorem for macroscopic stiffness analysis of aligned elliptic cracked solids, *Theoretical Appl. Mech.*, **52** (2003), 3-18.
- (5) Hashin, Z., The differential scheme and its application to cracked materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988), 719-734.
- (6) Huang, Y., Chandra, A., Jiang, Z. Q., Wei, X. and Hu, K. X., The numerical calculation of two-dimensional effective moduli for microcracked solids, *Int. J. Solids Struct.*, **33** (1996), 1575-1586.
- (7) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Second Revised Ed., (1987), 240-248, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.
- (8) Budiansky, B. and O'Connell, R. J., Elastic moduli of a cracked solid, *Int. J. Solids Struct.*, **12** (1976), 81-97.
- (9) Benveniste, Y., A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mech. Mater.*, **6** (1987), 147-157.
- (10) Kachanov, M., Tsukrov, I. and Shafiro, B., Effective moduli of solids with cavities of various shapes, *Appl. Mech. Rev.*, **47** (1994), 151-174.
- (11) Hoenig, A., Elastic moduli of a non-randomly cracked body, *Int. J. Solids Struct.*, **15** (1979), 137-154.