垂直き裂を有する圧電セラミックス積層帯板の電気弾性衝撃応答*

上 田 整^{*1}, 吉 元 正 樹^{*2}The Transient Response of a Coated Piezoelectric Strip
with a Vertical Crack under Electromechanical Impact LoadSei UEDA^{*3} and Masaki YOSHIMOTO^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

In this paper, the dynamic electromechanical response of a coated piezoelectric strip with a crack under an anti-plane mechanical and an in-plane electric impact loads is investigated. The crack is oriented normally to the interfaces. Based on the integral transform techniques, the present problem is reduced to the solutions of singular integral equations. Numerical calculations are carried out, and the main results presented are the variations of the dynamic stress and electric displacement intensity factors, the dynamic energy density factors versus time as functions of the geometric parameters and electromechanical loads.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Coated Piezoelectric Strip, Impact Response, Dynamic Energy Density Factor, Integral Transform

1. 結 言

圧電効果に優れるPZT系圧電セラミックスをヘルスモニタリングシステム(HMS)やドラッグデリバリーシステム(DDS)などのアクチュエータとして用いる場合, 生体適合性向上のため, チタンなどで材料表面を被覆する必要がある⁽¹⁾. また, その他多くの圧電デバイスも積層構造を有しており, これらの圧電デバイスの健全性評価には, き裂を有する圧電積層複合材料の電気破壊力学的挙動の理解が重要である. このため, 静的負荷あるいは準静的負荷が作用する場合については, 数多くの解析結果が報告されている^{(2)~(6)}.

一方, 圧電デバイスには衝撃的な電気的機械的負荷が作用することも多く, 慣性効果を考慮した電気破壊動力学的挙動の解明も要望されている^{(7)~(9)}. しかしながら, き裂を有する圧電積層複合材料の衝撃応答問題に関する研究例は比較的少なく, 圧電積層帯板中の中央き裂⁽¹⁰⁾や表面層を有する半無限圧電材料中の垂直き裂⁽¹¹⁾を対象とした衝撃破壊問題などが報告されている程度であり, 今後の研究の発展が期待されている.

本報は, 表面層を有する圧電セラミックス積層帯板を

考え, 界面に垂直に存在するモードIII型き裂の衝撃応答問題を理論解析したものである. 解析には, Laplace-Fourier二重積分変換法を用い, 問題の解を特異積分方程式の解に導いて解く方法を採用した^{(12),(13)}. 得られた特異積分方程式をGauss-Jacobiの数値積分公式⁽¹⁴⁾を用いて数値解析し, Laplace像空間における解を得た. さらに, 数値Laplace逆変換法⁽¹⁵⁾を適用して動的応力拡大係数および動的エネルギー密度係数^{(8),(16)}に及ぼす材料特性, 幾何学的形状および電気的機械的負荷の影響を明らかにした.

2. 問題の設定と基礎式

Fig.1 Geometry of the crack problem in a piezoelectric laminate.

* 原稿受付 2003年6月23日.

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部 (☎ 535-8585 大阪市旭区大宮5-16-1).

^{*2} 学生員, 大阪工業大学大学院工学研究科.

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において、幅 h_1 の圧電セラミックス層 I および幅 h_2 の均質等方性弾性体表層 II, III から成る圧電セラミックス積層帯板を考え、 $y = 0$ 面上に長さ $2c = b - a$ ($0 < a < b < h_1$) のき裂が界面に対して垂直に存在するものとする。 $y \rightarrow \pm\infty$ の無限遠方で衝撃負荷が作用する場合の第一近似として、き裂面に面外の機械的負荷および面内の電氣的負荷が衝撃的に作用する場合を考える。この場合、分極方向は z 軸方向である。以後、下添字 $\delta = \text{I, II, III}$ で圧電セラミックス層 I および表面層 II, III を、下添字 x, y, z で座標軸方向を示すものとする。

変位ベクトルの成分を $u_{z\delta}(x, y, t)$ ($\delta = \text{I, II, III}$)、電界の強さベクトルの成分を $E_x(x, y, t)$, $E_y(x, y, t)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{xz\delta}(x, y, t)$, $\sigma_{yz\delta}(x, y, t)$ ($\delta = \text{I, II, III}$) および電束密度ベクトルの成分 $D_x(x, y, t)$, $D_y(x, y, t)$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz\text{I}} &= c_{44} \frac{\partial u_{z\text{I}}}{\partial x} - e_{15} E_x \\ \sigma_{yz\text{I}} &= c_{44} \frac{\partial u_{z\text{I}}}{\partial y} - e_{15} E_y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= e_{15} \frac{\partial u_{z\text{I}}}{\partial x} + \varepsilon_{11} E_x \\ D_y &= e_{15} \frac{\partial u_{z\text{I}}}{\partial y} + \varepsilon_{11} E_y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\sigma_{xz\delta} = \mu \frac{\partial u_{z\delta}}{\partial x}, \quad \sigma_{yz\delta} = \mu \frac{\partial u_{z\delta}}{\partial y} \quad (\delta = \text{II, III}) \quad (3)$$

ここに、 t は時間、 c_{44} , μ は圧電セラミックス層 I および表面層 II, III のせん断弾性係数、 e_{15} は圧電定数、 ε_{11} は誘電定数である。静電ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ を導入すると、電界の強さベクトルの成分は次のように表される。

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4)$$

変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\begin{aligned} c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_{z\text{I}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{z\text{I}}}{\partial y^2} \right) + e_{15} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ = \rho_p \frac{\partial^2 u_{z\text{I}}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$e_{15} \left(\frac{\partial^2 u_{z\text{I}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{z\text{I}}}{\partial y^2} \right) - \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_{z\delta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{z\delta}}{\partial y^2} \right) = \rho_e \frac{\partial^2 u_{z\delta}}{\partial t^2} \quad (\delta = \text{II, III}) \quad (7)$$

上式中、 ρ_p , ρ_e は圧電セラミックス層 I および表面層 II, III の質量密度である。

問題の対称性を考慮して、 $-h_2 \leq x \leq h_1 + h_2$, $0 \leq y < \infty$ の領域で考えると、境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yz\text{I}}(x, 0, t) &= -\sigma_0 H(t) & (a < x < b) \\ u_{z\text{I}}(x, 0, t) &= 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} D_y(x, 0, t) &= -D_0 H(t) & (a < x < b) \\ \phi(x, 0, t) &= 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$u_{z\text{II}}(x, 0, t) = 0 \quad (-h_2 \leq x \leq 0) \quad (10)$$

$$u_{z\text{III}}(x, 0, t) = 0 \quad (h_1 \leq x \leq h_1 + h_2) \quad (11)$$

$$\sigma_{xz\text{II}}(-h_2, y, t) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (12)$$

$$\sigma_{xz\text{I}}(0, y, t) = \sigma_{xz\text{II}}(0, y, t) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (13)$$

$$u_{z\text{I}}(0, y, t) = u_{z\text{II}}(0, y, t) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (14)$$

$$D_x(0, y, t) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (15)$$

$$\sigma_{xz\text{I}}(h_1, y, t) = \sigma_{xz\text{III}}(h_1, y, t) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (16)$$

$$u_{z\text{I}}(h_1, y, t) = u_{z\text{III}}(h_1, y, t) \quad (0 \leq y < \infty) \quad (17)$$

$$D_x(h_1, y, t) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (18)$$

$$\sigma_{xz\text{III}}(h_1 + h_2, y, t) = 0 \quad (0 \leq y < \infty) \quad (19)$$

ここに、 $H(t)$ は時間 t に関する Heaviside の単位階段関数である。

3. 解 析

Laplace 変換およびその逆変換を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(p) \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに、 Br は Bromwich の積分路である。圧電セラミックス層 I の場合、式 (5), (6) に Laplace-Fourier 変換を適用して、Laplace 像空間における変位場および静電ポテンシャルの一般解を求めると⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} u_{z\text{I}}^*(x, y, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[A_1(s, p) \exp(-\gamma_p y) \cos(sx) \right. \\ &\quad + \left\{ A_2(s, p) \exp(\gamma_p x) + A_3(s, p) \right. \\ &\quad \times \exp(-\gamma_p x) \left. \right\} \sin(sy) \left. \right] ds \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \phi^*(x, y, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_1(s, p) \exp(-\gamma_p y) \right. \\ &\quad + B_1(s, p) \exp(-sy) \left. \right\} \cos(sx) ds \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left\{ A_2(s, p) \exp(\gamma_p x) \right. \right. \\ &\quad + A_3(s, p) \exp(-\gamma_p x) \left. \right\} \\ &\quad + B_2(s, p) \exp(sx) \\ &\quad + B_3(s, p) \exp(-sx) \left. \right] \sin(sy) ds \end{aligned} \quad (22)$$

同様に、式 (7) より、表面層 II, III に対する変位場の一般解は

$$u_{z\delta}(x, y, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ C_{1\delta}(s, p) \exp(\gamma_e x) + C_{2\delta}(s, p) \exp(-\gamma_e x) \right\} \times \sin(sy) ds \quad (\delta = \text{II, III}) \quad (23)$$

ここに、 $A_j(s, p)$, $B_j(s, p)$ ($j = 1, 2, 3$) および $C_{j\delta}(s, p)$ ($j = 1, 2$, $\delta = \text{II, III}$) は境界条件より決定される未知関数であり、 $\gamma_p(s, p)$, $\gamma_e(s, p)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_p(s, p) &= \left\{ s^2 + \left(\frac{p}{c_p} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ \gamma_e(s, p) &= \left\{ s^2 + \left(\frac{p}{c_e} \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

上式中の c_p , c_e は

$$\left. \begin{aligned} c_p &= \left(\frac{c_{44p}}{\rho_p} \right)^{1/2} \\ c_e &= \left(\frac{\mu}{\rho_e} \right)^{1/2} \\ c_{44p} &= c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Laplace 像空間における電界の強さ $E_x^*(x, y, p)$, $E_y^*(x, y, p)$ は、式 (22) を式 (4) に代入して得られ、応力成分 $\sigma_{xz\delta}^*(x, y, p)$, $\sigma_{yz\delta}^*(x, y, p)$ ($\delta = \text{I, II, III}$) および電束密度成分 $D_x^*(x, y, p)$, $D_y^*(x, y, p)$ は、式 (21), (23) および得られた電界の強さを式 (1) ~ (3) に代入することにより求まる。また、式 (23) で表される変位成分は対称条件式 (10), (11) を自動的に満たしている。

新しい未知関数 $G_i(x, p)$ ($i = 1, 2$) を次のように導入する⁽¹³⁾。

$$G_1(x, p) = \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} u_{z1}^*(x, 0, p) & \quad (a < x < b) \\ 0 & \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$G_2(x, p) = \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \phi^*(x, 0, p) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} u_{z1}^*(x, 0, p) \right\} & \quad (a < x < b) \\ 0 & \quad (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h_1) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

境界条件式 (12) ~ (19) を考慮すると、Laplace 変換された境界条件式 (8), (9) の第 1 式より、未知関数 $G_i(v, p)$ ($i = 1, 2$) に関する次の特異積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b G_1(v, p) \left\{ \frac{1}{v-x} + \frac{1}{v+x} + M_1(v, x, p) + M_2(v, x, p) \right\} dv = \left(\sigma_0 + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} D_0 \right) \frac{1}{c_{44p} p} \quad (28)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b G_2(v, p) \left\{ \frac{1}{v-x} + \frac{1}{v+x} + M_3(v, x) \right\} dv = \frac{D_0}{\varepsilon_{11} p} \quad (29)$$

上式中の積分核 $M_i(v, x, p)$ ($i = 1, 2$) および $M_3(v, x)$ は付録に示す。また、Laplace 変換された境界条件式 (8), (9) の第 2 式より、次の補足の条件式が得られる。

$$\int_a^b G_i(v, p) dv = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (30)$$

特異積分方程式 (28), (29) および補足の条件式 (30) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁴⁾ を用いて数値解析するために、解の特異性を考慮し、 $G_i(v, p)$ ($i = 1, 2$) を次の滑らかな関数 $\Psi_1(u, p)$, $\Psi_2(u)$ で置き換える。

$$\left. \begin{aligned} G_1(v, p) &= \frac{1}{c_{44p} p} \Psi_1(u, p) (1-u^2)^{-1/2} \\ G_2(v, p) &= \frac{1}{\varepsilon_{11} p} \Psi_2(u) (1-u^2)^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ここに、 $u = \{2v - (b+a)\}/(b-a)$ である。従って、き裂先端 $x = a, b$ での動的応力拡大係数 $K_{IIIa}(t)$, $K_{IIIb}(t)$ および動的電束密度拡大係数 $K_{Da}(t)$, $K_{Db}(t)$ は次のように得られる。

$$K_{IIIa}(t) = -\sigma_0(\pi c)^{1/2} \times \left\{ \left(1 + \frac{e_{15} D_0}{\varepsilon_{11} \sigma_0} \right) F_a(t) - \frac{e_{15} D_0}{\varepsilon_{11} \sigma_0} H(t) \Psi_2(-1) \right\} \quad (32)$$

$$K_{IIIb}(t) = \sigma_0(\pi c)^{1/2} \times \left\{ \left(1 + \frac{e_{15} D_0}{\varepsilon_{11} \sigma_0} \right) F_b(t) - \frac{e_{15} D_0}{\varepsilon_{11} \sigma_0} H(t) \Psi_2(1) \right\} \quad (33)$$

$$K_{Da}(t) = D_0 H(t) (\pi c)^{1/2} \Psi_2(-1) \quad (34)$$

$$K_{Db}(t) = D_0 H(t) (\pi c)^{1/2} \Psi_2(1) \quad (35)$$

ここに、 $F_a(t)$, $F_b(t)$ は

$$\left. \begin{aligned} F_a(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Psi_1(-1, p)}{p} \exp(pt) dp \\ F_b(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Psi_1(1, p)}{p} \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

さらに、き裂先端 $x = a, b$ における動的エネルギー密度係数 $S_a(t)$, $S_b(t)$ は、 $K_{IIIa}(t)$, $K_{IIIb}(t)$ および $K_{Da}H(t)$, $K_{Db}H(t)$ を用いて次式で表される⁽⁸⁾。

$$S_\kappa(t) = \frac{1}{2c_{44p}\varepsilon_{11}\pi} \left[\varepsilon_{11} K_{III\kappa}(t)^2 + 2e_{15} K_{III\kappa}(t) \times K_{D\kappa}H(t) - c_{44} \{ K_{D\kappa}H(t) \}^2 \right] \quad (\kappa = a, b) \quad (37)$$

4. 数値結果および考察

特異積分方程式 (28), (29) および補足の条件式 (30) の数値解析に際し, 圧電セラミックス層 I は PZT-4 ($c_{44} = 25.6[\text{GPa}]$, $e_{15} = 12.7[\text{C/m}^2]$, $\varepsilon_{11} = 60.0 \times 10^{-10}[\text{C/Vm}]$, $\rho_p = 7.50 \times 10^3[\text{kg/m}^3]$) とし, 表面層 II, III の材料定数は $\mu = \mu^* c_{44}$ ($0 < \mu^* < \infty$) とした. さらに, 式 (36) に Papoulis の数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁵⁾ を適用して動的応力拡大係数および動的エネルギー密度係数の時間的挙動を明らかにする. Papoulis の数値 Laplace 逆変換法は, 逆変換に必要となる Laplace 像空間での解が比較的少なく, 実空間で安定した解が得られる特色を有する. また, 無限弾性体のモード III 型き裂衝撃応答問題を対象とした数値 Laplace 逆変換法による解と厳密解⁽¹⁷⁾ との相対誤差は最大数%程度である. なお, 式 (34), (35) で与えられる $K_{Da}(t)$, $K_{Db}(t)$ は $t > 0$ の時間および表面層には依存しない.

Fig.2 The effect of the crack location on the electric displacement intensity factors.

Fig.3 The effect of the crack length on the electric displacement intensity factors.

まず, 無次元化された電気的負荷 $e_{15} D_0 / \varepsilon_{11} \sigma_0 \rightarrow 0.0$ の場合について, 電束密度拡大係数 K_{Da} , K_{Db} および動的応力拡大係数 $K_{IIIa}(t)$, $K_{IIIb}(t)$ に及ぼすき裂位置 $(a+b)/2h_1$, き裂長さ c/h_1 および弾性率比 μ^* の影響を検討する. 図 2 は, $c/h_1 = 0.1$ とした場合の $(K_{Da}, K_{Db})/D_0(\pi c)^{1/2}$ に及ぼす $(a+b)/2h_1$ の影響を示したグラフであり, 実線が K_{Da} , 破線が K_{Db} である. $0.1 < (a+b)/2h_1 \leq 0.5$ の範囲では $K_{Da} \geq K_{Db}$ である. $(a+b)/2h_1$ の増大に伴い, $(K_{Da}, K_{Db})/D_0(\pi c)^{1/2}$

は急激に減少し, $(a+b)/2h_1 = 0.5$ で両者は 1.02 に一致する. 図 3 は, $(a+b)/2h_1 = 0.25$ とした場合の $(K_{Da}, K_{Db})/D_0(\pi c)^{1/2}$ に及ぼす c/h_1 の影響を示したグラフである. $(K_{Da}, K_{Db})/D_0(\pi c)^{1/2}$ は, $c/h_1 \rightarrow 0.0$ で 1.0 に漸近し, c/h_1 の増大に伴って増大する. 特に, 界面近傍における $K_{Da}/D_0(\pi c)^{1/2}$ は大きな値となり, $c/h_1 \rightarrow 0.25$ で無限大となる.

図 4, 5 は, 無次元化された動的応力拡大係数 $(K_{IIIa}(t), K_{IIIb}(t))/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ の時間的挙動を μ^* をパラメータとして示したグラフであり, $\rho_e = \rho_p$, $c/h_1 = 0.1$, $h_2/h_1 = 1.0$, $(a+b)/2h_1 = 0.11$ とした. いずれの場合も時間の経過に伴い, $(K_{IIIa}(t), K_{IIIb}(t))/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ は急激に増大し, 最大値に達した後, 静的値に振動しながら漸近する. $(K_{IIIa}(t), K_{IIIb}(t))/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ は, μ^* の減少に伴い増大する傾向を示すが, μ^* の $K_{IIIb}(t)/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ への影響は $K_{IIIa}(t)/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ への影響に比べ小である. また, 無次元時間 $c_p t/c = 1.0$ は, き裂半長を $c[\text{m}]$ とした場合, $t = c/c_p = 5.41 \times 10^{-4}[\text{s}]$ に相当する.

Fig.4 The effect of the elastic property on the dynamic stress intensity factor $K_{IIIa}(t)$.

Fig.5 The effect of the elastic property on the dynamic stress intensity factor $K_{IIIb}(t)$.

PZT の生体適合性向上のため, チタン (Ti) でコーティングした圧電材料を医用アクチュエータへ応用することが検討されており⁽¹⁾, 以下では, $\mu^* = 1.66$, $\rho_e = 4.57 \times 10^3[\text{kg/m}^3]$ とした Ti/PZT-4/Ti 圧電積層複合材料の場合に注目する. 図 6 は, $c/h_1 = 0.1$, $h_2/h_1 = 0.01$ とした場合の $(K_{IIIa}(t), K_{IIIb}(t))/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ の時

間的挙動を $(a+b)/2h_1$ をパラメータとして示したグラフで、実線は $K_{IIIa}(t)$ 、破線は $K_{IIIb}(t)$ である。 $(a+b)/2h_1$ の増大に伴い、 $(K_{IIIa}(t), K_{IIIb}(t))/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ は減少し、 $(a+b)/2h_1 = 0.5$ で両者は点線で示すように一致する。図7は、 $h_2/h_1 = 0.01$ 、 $(a+b)/2h_1 = 0.25$ とし、 c/h_1 をパラメータとして示した図6と同様のグラフである。 $(K_{IIIa}(t), K_{IIIb}(t))/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ は、 c/h_1 の減少に伴い減少する傾向を示すが、 $K_{IIIb}(t)/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ への影響は $K_{IIIa}(t)/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ に比べ小である。 $c/h_1 \rightarrow 0.0$ とした場合、 $K_{IIIa}(t)$ 、 $K_{IIIb}(t)$ は点線で示すような無限圧電材料の問題の解となる。図8は、 $c/h_1 = 0.1$ 、 $(a+b)/2h_1 = 0.11$ とし、 h_2/h_1 をパラメータとして示したグラフである。 h_2/h_1 の減少に伴って $(K_{IIIa}(t), K_{IIIb}(t))/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ は増大する傾向を示すが、き裂先端が自由表面に近い $K_{IIIa}(t)/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ の変化は顕著である。

Fig.6 The effect of the crack location on the dynamic stress intensity factors.

Fig.7 The effect of the crack length on the dynamic stress intensity factors.

Fig.8 The effect of the crack of the surface layers on the dynamic stress intensity factors.

図9は、無次元化された動的エネルギー密度係数 $(S_a(t), S_b(t))/\sigma_0^2 c(2c_{44p})^{-1}$ の時間的挙動を $e_{15}D_0/\varepsilon_{11}\sigma_0$ をパラメータとして示したグラフであり、実線は $S_a(t)$ 、破線は $S_b(t)$ である。なお、幾何学的形状は、 $c/h_1 = 0.1$ 、 $h_2/h_1 = 0.01$ 、 $(a+b)/2h_1 = 0.11$ とした。 $(S_a(t), S_b(t))/\sigma_0^2 c(2c_{44p})^{-1}$ は、 $e_{15}D_0/\varepsilon_{11}\sigma_0$ の増大に伴い著しく増大しており、破壊挙動に及ぼす電気的負荷の影響が顕著であることを示している。

Fig.9 The effect of the electromechanical loads on the dynamic energy density factors.

5. 結 言

本報は、界面に垂直に存在するき裂を有する圧電セラミックス積層帯板を対象に、き裂面に一樣な面外せん断負荷および面内の電気的負荷が衝撃的に作用する場合の破壊挙動を理論解析したものである。数値計算を行い、電束密度拡大係数に及ぼす幾何学的形状の影響を明らかにした。また、動的応力拡大係数および動的エネルギー密度係数の時間的挙動に及ぼす材料特性、幾何学的形状および電気的機械的負荷の影響を説明した。

付 録

積分核 $M_i(v, x, p)$ ($i = 1, 2$) および $M_3(v, x)$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_1(v, x, p) &= \int_0^\infty m_1(v, x, s, p) ds \\ M_2(v, x, p) &= \int_0^\infty \left\{ m_2(v, x, s, p) - m_2^\infty(v, x, s) \right\} ds + M_2^\infty(v, x) \\ M_3(v, x) &= - \left[\frac{1}{v-x} + \frac{1}{v+x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2h_1} \left[\cot \left\{ \frac{(v-x)\pi}{2h_1} \right\} + \cot \left\{ \frac{(v+x)\pi}{2h_1} \right\} \right] \right] \end{aligned} \right\} (38)$$

上式中、 $m_j(v, x, s, p)$ ($j = 1, 2$)、 $m_2^\infty(v, x, s)$ および $M_2^\infty(v, x)$ は

$$\left. \begin{aligned} m_1(v, x, s, p) &= 2 \left(\frac{\gamma_p}{s} - 1 \right) \sin(sx) \cos(sv) \\ m_2(v, x, s, p) &= \frac{1}{\delta_0(s, p)} \left(\frac{s}{\gamma_p} \right)^2 \\ &\quad \times \sum_{i=1}^5 \delta_i(s, p) \exp\{-\gamma_p \theta_i(v, x)\} \\ m_2^\infty(v, x, s) &= \frac{1}{\delta_0^\infty} \sum_{i=1}^5 \delta_i^\infty \exp\{-s \theta_i(v, x)\} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} M_2^\infty(v, x) &= \int_0^\infty m_2^\infty(v, x, s) ds \\ &= \frac{1}{\delta_0^\infty} \sum_{i=1}^5 \frac{\delta_i^\infty}{\theta_i(v, x)} \end{aligned} \quad (40)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(v, x) &= 2h_1 - x - v \\ \theta_2(v, x) &= 2h_1 - x + v \\ \theta_3(v, x) &= 2h_1 + x - v \\ \theta_4(v, x) &= 2h_1 + x + v \\ \theta_5(v, x) &= x + v \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\delta_i^\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\delta_i(s, p)}{s^2} \quad (i = 0, 1, \dots, 5) \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_0(s, p) &= \alpha_2(s, p)^2 - \alpha_1(s, p)^2 \exp(-2\gamma_p h_1) \\ \delta_1(s, p) &= \alpha_1(s, p) \alpha_2(s, p) \\ \delta_2(s, p) &= -\alpha_1(s, p) \alpha_2(s, p) - 2\alpha_1(s, p) \alpha_3(s, p) \\ \delta_3(s, p) &= -\alpha_1(s, p)^2 \\ \delta_4(s, p) &= \alpha_1(s, p)^2 \\ \delta_5(s, p) &= 2\alpha_2(s, p) \alpha_3(s, p) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(s, p) &= \mu\gamma_e - c_{44p}\gamma_p \\ &\quad - (\mu\gamma_e + c_{44p}\gamma_p) \exp(-2\gamma_e h_1) \\ \alpha_2(s, p) &= \mu\gamma_e + c_{44p}\gamma_p \\ &\quad - (\mu\gamma_e - c_{44p}\gamma_p) \exp(-2\gamma_e h_2) \\ \alpha_3(s, p) &= -\mu\gamma_e \{1 - \exp(-2\gamma_e h_2)\} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

文 献

- (1) 上辻・中村・上田, 機講論, No.01-27 (2001), 159-160.
- (2) Narita, F. and Shindo, Y., *Acta. Mech.*, **143** (1999), 27-43.
- (3) Narita, F., Shindo, Y. and Watanabe, K., *JSME. Int. J., Ser. A*, **42** (1999), 66-72.
- (4) Noda, N. and Wang, B.L., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **35** (2001), 93-109.
- (5) Ueda, S., *Int. J. Frac.*, **114** (2002), 63-86.
- (6) 上田・金田, 機論, **69**-680, A(2003), 778-785.
- (7) Shindo, Y., Narita, F. and Ozawa, E., *Acta. Mech.*, **137** (1999), 99-107.
- (8) Chen, Z.T., Worswick, M.j., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **33** (2000), 173-184.
- (9) Chen, Z.T. and Meguid, S.A., *Int. J. Solids Struct.*, **37** (2000), 6051-6062.
- (10) Ueda, S., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **38** (2002), 221-242.
- (11) Ueda, S., *Smart Mater. Struct.*, **12** (2003), 249-259.
- (12) Sneddon, I.N. and Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (13) Gupta, G.D., *Int. J. Solids Struct.*, **9** (1973), 1141-1154.
- (14) Erdgan, F., Gupta, G.D. and Cook, T.S., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by G.C.Sih), (1972), Noordhoff, Leyden.
- (15) Papoulis, A., *J. Appl. Mathe.*, **14** (1957), 405-414.
- (16) Zuo, J.Z. and Sih, G.C., *Theore. Appl. Frac. Mech.*, **34** (2000), 17-33.
- (17) Thau, S.A. and Lu, T.-H., *Int. J. Eng. Sci.*, **8** (1970), 857-874.