下負荷面摩擦モデルを用いた接触・摩擦問題の有限要素解析*

尾崎 伸吾^{*1}, 橋口 公一^{*2}
岡 安崇^{*3}, 堀田 直岐^{*1}Finite Element Analyses of Frictional Contact Problems
by the Subloading-Friction ModelShingo OZAKI, Koichi HASHIGUCHI^{**},
Takashi OKAYASU and Naoki HOTTA^{**} Graduate School of Bioresource and Bioenvironmental Science, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 812-8581 Japan

The subloading-friction model is the unconventional elastoplastic friction model which allows the slip displacement due to the contact stress below the sliding surface. It is capable of describing the nonlinear relationship between the normal and the tangential stress on the contact surface and a gradual progress of relative tangential displacement with the increase of the contact stress. In this paper, the compression problem of rectangular block, the indentation problem of circular rigid roller and the cyclic friction problem for the elastic body under the plane strain condition are analyzed by the finite element program incorporating the subloading-friction model. It is revealed that the distribution of contact stress is predicted appropriately and the accumulation of relative displacement due to the cyclic loading of contact tangential traction below the sliding condition can be described. Besides, the computation time is shortened by the present finite element program compared with programs with the conventional friction model.

Key Words: Constitutive Equation, Frictional Contact Problem, Plasticity, Finite Element Method

1. 緒言

工学上の諸問題において、解析対象物体は、通常、すべり接触境界を含んでおり、物体自身の力学的特性を記述する構成式に加えて、すべり接触境界条件の適切な力学的処理が求められる。物質の構成式は、弾性、粘弾性変形挙動、さらには弾塑性、弾粘塑性挙動を合理的に表現し得るに至っている。一方、接触物体間に生じる摩擦現象に関しては、四半世紀前に及んで、接触応力増分と相対変位（すべり）増分の関係を弾塑性構成式と同様の形式で記述する手法が見出された。すなわち、接触面間に仮想的な弾性バネを導入するとともに、摩擦応力増分と相対変位増分の関係を弾完全塑性現象とみなして、接触応力増分と相対変位増分の関係を弾塑性体の構成式とし

て数学的に表現する。これにより、境界値問題を摩擦を伴う表面応力増分とすべりを伴う表面変位増分の関係として解析し得るに至っている^{1)~8)}。しかし、これらの摩擦モデルは、応力空間においてすべり変位の発生する応力を表すすべり面の内部を純粋弾性域としており、弾塑性構成モデルに関するDrucker⁹⁾の定義における“古典弾塑性モデル”(conventional elastoplastic model)に相当し、接線応力の増大につれて相対変位が滑らかに進展する実際の摩擦現象を適切に表現し得ない。そこで、摩擦係数を接線方向の相対変位の関数として表現する方法が提案されている^{5), 10)~16)}。しかしながら、このような方法では、相対変位が単調に増大する場合を除いて滑らかな接触応力増分—相対変位増分関係は表現し得ない。

他方、橋口他¹⁷⁾は、すべり面の内部を純粋弾性域と仮定しない“非古典弾塑性モデル”(unconventional elastoplastic model)に属する“下負荷面モデル”(subloading surface model)^{18)~20)}の概念を導入して、滑らかな接触応力増分—相対変位増分関係を表現し得る“下負荷面摩擦モデル”(subloading-friction model)を提案している。本摩擦

* 原稿受付 2003年8月20日。

^{*1} 九州大学大学院生物資源環境科学府(〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)。^{*2} 正員、九州大学大学院農学研究院。^{*3} 九州大学大学院農学研究院。

E-mail: osin@bpes-kyushu-u.ac.jp

モデルは既往の摩擦モデルに比して、下記のように、多くの利点を有している。

- 1) Coulombの摩擦則においては、摩擦角と粘着力により、接触面上の法線応力と接線応力を線形に関係づけるが、本モデルにおいては、材料定数を特に増やすことなく（Coulombの摩擦則と同じ二個）、接触面上の法線応力の増大とともに接線応力の増大が鈍る非線形性を表現可能である。
- 2) 既往の剛完全塑性摩擦モデル^{1)~3)}においては、接触応力がすべり条件を満たすと、急に相対変位が生じると仮定されている。なお、近年、提案された弾塑性摩擦モデル^{4)~6)}においても、Coulombの摩擦則に至るまでは、弾性相対変位のみが生じると仮定されている。下負荷面摩擦モデルにおいては、接触応力の増大とともに相対変位が徐々に進展し、接触応力と相対変位の滑らかな関係すなわち滑らかな弾塑性遷移を表現し得る。
- 3) 接触応力は常にすべり下負荷面上に存在するので、すべり変位発生の有無に関する負荷判定において、接触応力がすべり条件を満たしているか否かの判定は不要であり、相対速度方向のみの判定でよく、負荷基準が単純化される。
- 4) すべり状態においては常に接触応力をすべり面に漸近させる自動制御機能を内包しているので、既往のモデルに比して粗いステップの数値計算が可能である。
- 5) すべり条件以下での接線応力の繰返し負荷に対するすべり変位の集積現象を表現可能である。

本研究では、下負荷面摩擦モデルを導入した有限要素解析プログラムを開発し、弾性体を対象に平面ひずみ条件下での直方体ブロックの圧縮問題、円形剛体の押込み問題および繰返し摩擦問題等の代表的な接触・摩擦問題の解析を行う。また、本モデルにおける材料パラメータを数水準に変化させて計算を行うとともに、古典摩擦モデルによる解析結果との比較、照査により、本解析プログラムの妥当性を検討する。

2. 下負荷面摩擦モデル

橋口他¹⁷⁾により提案された、下負荷面摩擦モデルの定式化および具体的な関数形について以下に略説する。

2・1 下負荷面摩擦モデルの定式化 接触物体間の相対速度 $\mathbf{r}$ は、法線成分 $\mathbf{r}_n$ と接線成分 $\mathbf{r}_t$ に加算分解されるとする。すなわち、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_t \quad (1)$$

さらに、 $\mathbf{r}_n$ および $\mathbf{r}_t$ は次のように、弾性成分 $\mathbf{r}^e$ と塑性成分 $\mathbf{r}^p$ (すべり速度) に加算分解されるとする。

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^e + \mathbf{r}_n^p, \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_t^e + \mathbf{r}_t^p \quad (2)$$

弾性成分は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{f}}_n = -\alpha_n \mathbf{r}_n^e, \quad \dot{\mathbf{f}}_t = -\alpha_t \mathbf{r}_t^e \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{f}_n$ および $\mathbf{f}_t$ は、接触応力ベクトル $\mathbf{f}$ の法線および接線成分である。さらに、 α_n および α_t は接触面の法線および接線方向の弾性（ペナルティ）係数である。また、 $(\cdot)$ は客観性を有する共回転速度を示す。例えば、

$$\dot{\mathbf{f}}_n = \dot{\mathbf{f}}_n - \Omega \mathbf{f}_n, \quad \dot{\mathbf{f}}_t = \dot{\mathbf{f}}_t - \Omega \mathbf{f}_t \quad (4)$$

ここに、 $(\cdot)$ は物質時間微分、二階の反対称テンソル Ω は接触面の剛体回転スピンを表している。また、式(3)は次式のようにまとめられる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t = -\mathbf{C}^e \mathbf{r}^e \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{C}^e (= \mathbf{C}_n^e + \mathbf{C}_t^e)$ は物体間の弾性係数テンソルであり、次式で与えられる。

$$\mathbf{C}_n^e = \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{C}_t^e = \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は接触面の単位法線ベクトル、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソル、 $\otimes$ はテンソル積を表す。

古典摩擦論におけるすべり条件を表す面は“正規すべり面” (normal-sliding surface) と称され、次式で与えられる。

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = F(H) \quad (7)$$

ここに、 H はすべりに伴う正規すべり面の等方硬・軟化を表すためのスカラー変数である。また、 $\|\cdot\|$ は大きさを表す。本モデルでは、この正規すべり面の内部は弾性域ではなく、その内部の接触応力の変化によってもすべり変位が生じると仮定する。そこで、常に負荷面の役割を果たし、正規すべり面に相似で、かつ、原点に関して、この面に相似の配置にある“すべり下負荷面” (sliding-subloading surface) を導入する。これは次式で表される。

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = RF(H) \quad (8)$$

ここに、 R ($0 \leq R \leq 1$) は“正規すべり比” (normal-sliding ratio) と称され、正規すべり面の大きさに対するすべり下負荷面の大きさの比を表し、接触応力の正規すべり面への接近の測度とみなし得る。

いま、すべり変位の進行に伴い、接触応力は正規すべり面に近づくと考えられる。つまり、 $R < 1$ の状態ですべり変位が生じている場合には、正規すべり比は常に増大するものと仮定する。また、 $R = 1$ の状

態においては、接触応力は正規すべり面上に存在し、この状態を“正規すべり状態”(normal-sliding state)と称する。以上より、正規すべり比の発展則を次式で与える。

$$\dot{\mathbf{r}}^P = U(R) \|\mathbf{r}^P\| \quad \text{for } \mathbf{r}^P \neq \mathbf{0} \quad (9)$$

ここに、 U は、次の条件を満たす R の単調減少関数である。

$$\left. \begin{aligned} U &= +\infty & \text{for } R &= 0 \\ U &= 0 & \text{for } R &= 1 \\ (U < 0 & \text{for } R > 1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

本条件は、すべり状態において、接触応力を自動的に正規すべり面上に漸近させる制御機能を与える。また、関数 U として次式を採用する。

$$U = -u \ln R \quad (11)$$

ここに、 u はすべり下負荷面の膨張速度を規定する材料定数である。

次のすべり流動則を仮定する。

$$\mathbf{r}^P = -\lambda \mathbf{t} \quad (\lambda > 0, \|\mathbf{t}\| = 1) \quad (12)$$

ここに、 λ は正值の比例係数、 $\mathbf{t}$ は接線応力方向の単位ベクトルである。法線および接線応力方向の単位ベクトルは、次式で与えられる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|}, \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (13)$$

以後、非硬化の正規すべり面の場合について示す。正值の比例係数 λ を相対速度で表したものを Λ と記せば、これは次式で与えられる。

$$\Lambda = \frac{-\left(\alpha_n \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_n\|} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|} \mathbf{t}\right) \cdot \mathbf{r}}{UF + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|}} \quad (14)$$

ここに、 $(\bullet)$ はスカラー積を表している。式(1)–(3)、(12)および(14)より、接触応力の変化速度は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{f}} = - \left\{ \alpha_t \mathbf{I} + (\alpha_n - \alpha_t)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left(\alpha_n \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_n\|} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|} \mathbf{t} \right)}{UF + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|}} \right\} \mathbf{r} \quad (15)$$

すべり速度に関する負荷基準は、 Λ の正值性により次式で与えられる^{21), 22)}。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^P \neq \mathbf{0}: \Lambda &> 0 \\ \mathbf{r}^P = \mathbf{0}: \Lambda &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Fig. 1. Normal-sliding and sliding-subloading surface for the tear shape equation (17).

2・2 すべり条件式の具体的な関数形 一般に、摩擦性材料である土の降伏応力は圧力に依存し閉じた降伏面を呈する^{23), 24)}。他方、金属の降伏応力は圧力に依存せず開いた降伏面を呈する。しかしながら、金属においても、摩擦係数は法線応力とともに減少することが知られている²⁵⁾。また、単軸圧縮やパンチ貫入現象等において観察されるように、法線応力の負荷によっても塑性変形は生じる。したがって、正規すべり面は、一般に Coulomb の摩擦則のような錘面や放物面のような開曲面^{1), 4), 6)}ではなく、閉曲面を呈すると考えられる。そこで、橋口他¹⁷⁾は、すべり条件式の具体的な関数形として、図 1 に示される接触応力平面において涙形および二次曲線形の関数を提案している。本研究では正規すべり面式として、次の涙形の曲線を採用する。

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = \|\mathbf{f}_n\| \exp\left(\frac{\chi^2}{2}\right) \quad (17)$$

ここに、

$$\chi = \eta / M, \quad \eta = \|\mathbf{f}_t\| / \|\mathbf{f}_n\| \quad (18)$$

M は摩擦特性に基づく材料定数である。

3. 接触境界値問題に関する有限要素離散化

本章では、master-slave concept^{1), 6)~8)}に基づいて、接触境界値問題における基礎関係式および有限要素離散化について述べる。

3・1 境界条件 いま、図 2 に示すような二物体、つまり、主導(物)体(master body)と従属(物)体(slave body)の接触を考える。以下では、master bodyは剛体とし、空間固定のデカルト直交座標系 (x, y) により定式化を進める。本図に示すように、masterおよびslave bodyはそれぞれ Γ^m および Γ^s の境界を有し、これらは表面力速度境界 Γ_f 、変位速度境界 Γ_v および接触境界 Γ_c から構成される。ここで、 Γ_c は変形過程で変化するので、計算においては常に接触境界の把握、すなわち、境界 Γ 上の任意の物質点における接触判定が必要となる。

Fig. 2. Two bodies in contact and boundary condition.

Slave bodyに作用する接触応力の法線成分 f_n および二物体間の距離 g_n を用いることにより、接触条件は次式で与えられる。

$$g_n \geq 0, f_n \geq 0, f_n g_n = 0 \quad (19)$$

ここに、

$$f_n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \quad (20)$$

$$g_n \equiv (\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^s) \cdot \mathbf{n} \quad (21)$$

$\mathbf{n}$ は slave body 面上の外向き単位法線ベクトルである。また、 $\mathbf{x}^m$ は、slave body 表面上の物質点 $\mathbf{x}^s$ における $\mathbf{n}$ の方向に存在する master body 表面上の物質点である。

Slave body の接触境界 Γ_c^s における境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{if } g_n > 0, \text{ on } \Gamma_c^s \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = -\dot{\mathbf{f}} & \text{if } g_n = 0, \text{ on } \Gamma_c^s \end{cases} \quad (22)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソルである。

二物体が相対変位を生じつつ変形する場合の $\mathbf{x}^m$ の変位速度 $\mathbf{v}^m$ 、 $\mathbf{x}^s$ の変位速度 $\mathbf{v}^s$ および相対速度 $\mathbf{r}$ の関係は次式で与えられる (図3参照)。

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}^m - \mathbf{v}^s \quad (23)$$

式(15), (23)より次式が成り立つ。

$$\dot{\mathbf{f}} = -\mathbf{C}^f (\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^s) \quad (24)$$

ここに、 $\mathbf{C}^f$ は下負荷面摩擦モデルに基づく弾塑性構成テンソルであり、式(15)より、次式で与えられる。

$$\mathbf{C}^f = \left\{ \alpha_t \mathbf{I} + (\alpha_n - \alpha_t) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left(\alpha_n \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_n\|} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|} \mathbf{t} \right)}{UF + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|}} \right\} \quad (25)$$

3・2 有限要素離散化 以下では、物体の剛体回転は無視し得ると仮定し、 $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ で $\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}$ として定式化を進める。

微小変形論に基づく仮想仕事の原理の線形化方程式は次式で与えられる。なお、本研究では慣性項を無視している。

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \mathbf{D} dV = \int_{S_f} \dot{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{S_c} \dot{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{r} dS \quad (26)$$

ここに、 $\mathbf{D}$ および $\dot{\mathbf{f}}$ はひずみ速度 (物質粒子の速度勾配の対称部分) および表面力速度を表している。

また、 $\delta(\cdot)$ は仮想的な増分、 $(\cdot)$ は二階のテンソルのスカラー積を表している。式(22)および(26)より次式の増分形の剛性方程式が得られる。

$$[\mathbf{K}] \{\Delta \mathbf{u}\} = \{\Delta \mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{F}^c\} \quad (27)$$

ここに、

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = \{\mathbf{v}\} \Delta t \quad (28)$$

$[\mathbf{K}]$ 、 $\{\Delta \mathbf{u}\}$ 、 $\{\Delta \mathbf{F}\}$ および $\{\Delta \mathbf{F}^c\}$ はそれぞれ物体の剛性マトリクス、節点変位増分、節点外力増分および接触力増分ベクトルである。式(27)におけるこれらの各項は次のように与えられる。

$$[\mathbf{K}] = \sum_e V_e \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e^m \mathbf{B}_e \quad (29)$$

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = \sum_n \mathbf{v}_n^s dt \quad (30)$$

$$\{\Delta \mathbf{F}\} = \sum_e S_e^t \mathbf{N}_e^T \dot{\mathbf{f}}_e dt \quad (31)$$

ここに、 $\mathbf{C}_e^m$ 、 $\mathbf{B}_e$ および $\mathbf{N}_e$ は slave body の剛性マトリクス、ひずみ増分-節点変位増分マトリクスおよび形状関数である。また、 $(\cdot)^T$ は転置を示し、 $\sum_e$ および $\sum_n$ はそれぞれ要素および節点についての重ね合わせを表している。

式(24)を式(26)の右辺第2項に代入することにより、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \{\Delta \mathbf{F}^c\} &= \sum_e S_e^c \mathbf{T}_n^T \mathbf{N}_e^T \dot{\mathbf{f}}_e dt \\ &= \sum_e S_e^c \mathbf{T}_n^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^f \mathbf{N}_e \mathbf{T}_n (\mathbf{v}_n^m - \mathbf{v}_n^s) dt \\ &= [\mathbf{K}^f] \{\Delta \mathbf{u}^m\} - [\mathbf{K}^f] \{\Delta \mathbf{u}\} \end{aligned} \quad (32)$$

ここに、 $\mathbf{T}_n$ は局所座標系 (t, n) とデカルト直交座標系 (x, y) 間の座標変換マトリクスである。また、 V_e は要素の体積、 S_e^t および S_e^c は規定された表面力速度境界および接触境界の要素表面の面積を表している。

式(32)を式(27)に代入することにより、全体剛性方程式は次式のように表現される。

$$([\mathbf{K}] - [\mathbf{K}^f]) \{\mathbf{du}\} = \{\mathbf{df}\} - [\mathbf{K}^f] \{\mathbf{du}^m\} \quad (33)$$

式(33)より摩擦挙動が擬弾塑性体として有限要素法に導入されていることがわかる。

4. 数値計算例

本節では、弾性体を対象に平面ひずみ条件下の三種類の代表的な接触・摩擦問題の計算結果について述べる。具体的には、正規すべり比の発展則に関わる物質関数(11)における材料定数 u を数水準に変化させた計算を行い、古典摩擦モデルによる解析結果との比較・照査により、本解析プログラムの妥当性を検討する。

表1に計算に用いた供試体（等方線形弾性体）および下負荷面摩擦モデルの材料定数を示す。ここに、 E および ν はそれぞれヤング率およびポアソン比である。

4・1 直方体ブロックの圧縮問題 図4に直方体ブロックの圧縮問題のFE メッシュおよび境界条件を示す。なお、本研究では、供試体の対称性を考慮して1/4領域で計算を行っている。

図5(a)および(b)に、圧縮量10%までの内側の接触要素(No.10)および外端の接触要素(No.20)における

Table 1 Material parameters.

(a) Elastic body

E	4 GPa	ν	0.3
-----	-------	-------	-----

(b) Subloading-friction model

F	100 GPa	M	0.05
α_n, α_t	1 000 GPa/mm	u	Four levels: 1, 10, 100 and ∞ (1 000)

Fig. 4. Finite element mesh and boundary condition for the compression problem of rectangular block.

無次元化された接線応力 f_t / f_t^n と接線相対変位 u_t の関係を示す。ここに、 f_t^n は現法線応力に対する正

(a) Contact element No. 10

(b) Contact element No. 20

Fig. 5. Relationships between non-dimensional tangential stress and relative tangential displacement inside and outside on the contact surface.

(a) Normal stress

(b) Non-dimensional tangential stress

Fig. 6. Distribution of contact stress on the contact surface (20% compression).

規すべり面上の接線応力であり、式(17)より計算される。本モデルは $u \rightarrow \infty$ において古典摩擦モデルに帰着し得るが、本場合、接触応力がすべり条件（摩擦基準）を満たすと($R=1$)、急に相対変位が生じており、非現実的な接触応力-相対変位関係が表現されている。一方、 u が小さい場合には、接触応力の増大とともに徐々に相対変位を生じるので、滑らかな接触応力-相対変位関係が予測されている。また、外側の接触要素ほど、相対変位量が大きくなっている様子が確認される。

図6(a)および(b)に、20%圧縮時における法線応力 f_n および無次元化された接線応力 f_t/f_t^n 分布を示す。縦軸に接触応力、横軸に接触要素番号を示して

Fig. 7. Finite element mesh and boundary condition for the indentation problem of rigid roller to elastic body.

$f_{n \max}$: Maximum normal stress (GPa)
 x : Distance under circular rigid roller (mm)
 w : Contact width (mm)

Fig. 8. Normal stress distribution ($u=10$) compared to Hertz solution.

いる。法線応力の分布特性には u による差異は見られないが、 f_t/f_t^n の分布特性は u の値に大きな影響を受けている。これより、古典摩擦モデル($u \rightarrow \infty$)では、接触面上、内側から外側に向けて、接線応力の急激な変化を予測するのに対して、本提案モデルでは接線応力の滑らかな分布を予測可能であることがわかる。

4・2 円形剛体の押込み問題

図7に円形剛体の押込み問題の解析に用いるFEメッシュおよび境界条件を示す。計算では、供試体は下面を鉛直方向

(a) Normal stress

(b) Tangential stress

(c) Relative tangential displacement

Fig. 9. Contact stress and relative tangential displacement distribution of 20% indentation.

固定とし、上面に設置した円形剛体を貫入量が半径の20%に達するまで押込んでいる。なお、供試体の対称性を考慮して1/2領域で計算を行っている。

本解析プログラムの妥当性を評価するため、図8に示すように、法線応力分布についてHertzの理論解との比較を行った。比較に用いたFE解析結果は $u=10$ の場合の20%貫入時におけるものである。縦軸および横軸は、法線応力および円形剛体直下からの水平距離をそれぞれの最大値で除して無次元化して表している。本図より、法線応力は円形剛体直下が最も大きく、側方にくにしたがって滑らかに減少しており、その分布特性はHertzの理論解と極めて良く一致している。

図9(a), (b) および(c)に数水準の材料定数 u による法線応力、接線応力および接線相対変位分布を示す。横軸は円形剛体直下からの水平距離を示している。法線応力 f_n は、 u の値によらずほぼ同一の分布を示している。一方、接線応力 f_t は、 u が大であるほど、高いピーク値を示し、また、全接触力が大きくなっている。逆に、接線相対変位量 $-u_t$ は、 u が大になるにつれて、小となることわかる。

4・3 繰返し摩擦問題 図10に繰返し摩擦問題の解析条件を示す。供試体は上面を接触境界、下面を完全固着境界としている。また、接触境界上には、一定の法線応力(5 GPa)のもとで、一定振幅の接線応力が繰返し作用するものとし、接線応力の大きさは正規すべり状態時の10, 50 および80%の三段階に設定している。

図11に種々の材料定数 u の値による接線応力と相対変位の関係を示す。設定応力値は80%のものである。古典摩擦モデル($u \rightarrow \infty$)を用いた場合には、接線応力振幅一定の繰返し負荷に対して弾性的な相対変位が予測されるのみで、相対変位の集積は全く予測されていない。一方、本提案モデルでは、正規すべり面内部の接線応力の変化に対してすべり変位が表現されるので、接線応力振幅一定の繰返し負荷における相対変位の集積が現実的に予測されている。また、その集積量は u が小さくなるほど増加する様子がわかる。

図12に $u=10$ における各応力レベルに対する接線応力 f_t と相対変位 u_t の関係を示す。本図より、いずれの応力レベルでも、古典摩擦モデルを用いた解析では、接線応力の繰返し負荷に対する相対変位の集積が全く予測されていないことがわかる。他方、本解析プログラムによれば、いずれの応力振幅に対し

Fig. 10. Finite element mesh and boundary condition for the cyclic friction problem.

Fig. 11. Relationships between tangential stress and relative tangential displacement for various u (amplitude: 80% of the maximum tangential stress).

Fig. 12. Relationships between tangential stress and relative tangential displacement for various constant amplitudes of tangential stress ($u=10$).

ても相対変位の集積が表現されており、その集積量は接触応力の大きさに依存する。

5. 結 言

本研究では、前報¹⁷⁾で提案した下負荷面摩擦モデルを導入した有限要素解析プログラムを開発するとともに、弾性体を対象に平面ひずみ条件下の直方体ブロックの圧縮問題ならびに円形剛体の押込み問題の解析を行い、その妥当性を検討した。下負荷面摩擦モデルは摩擦基準以下の接触応力の変化に対して

もすべり変位を表現し得るので、本解析プログラムは、古典摩擦モデルによる有限要素プログラムに比して、接触面における接線応力のより現実的な滑らかな分布を表現し得る。また、摩擦基準以下の接線応力の繰返し負荷問題のシミュレーションにおいては、すべり変位の集積が表現され、摩擦原理に基づく構造物固定部の安全設計の向上に資すると期待される。

なお、本解析プログラムでは、古典摩擦モデルに求められる、接触応力が摩擦基準を満たしているか否かの判定およびすべり状態において接触応力をすべり摩擦面に引き戻す処理 (mean normal法, radial return法, Euler法等) が不要であるので、古典摩擦モデルに比して、数値計算プログラムを著しく簡略化し得る。

参 考 文 献

- (1) Seguchi, Y., Shindo, A., Tomita, Y. and Sunohara, M.: Sliding rule of friction in plastic forming of metal. Computational Methods in Nonlinear Mechanics, University of Texas at Austin, pp. 683-692, 1976.
- (2) Fredriksson, B.: Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. Comp. and Struct., Vol. 6, pp.281-290, 1976.
- (3) Michalowski, R. and Mroz, Z.: Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. Archives of Mechanics. Vol.30, pp.259-276, 1978.
- (4) Curnier, A.: A theory of friction. Int. J. Solids Struct., Vol.20, pp.637-647, 1984.
- (5) Cheng, J.-H. and Kikuchi, N.: An incremental constitutive relation of uniaxial contact friction for large deformation analysis. J. Appl. Mech. (ASME), Vol. 52, pp.639-648, 1985.
- (6) Wriggers, P., Vu Van T. and Stein, E.: Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. Comp. and Struct., Vol. 37, pp.319-331, 1990.
- (7) Peric, D. and Owen, D. R.J.: Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method. Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.35, pp.1289-1309, 1992.
- (8) Neto, E.A.de Souza, Hashimoto, K, Peric, D. and Owen, D.R.J.: A phenomenological model for frictional contact accounting for wear effects. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, Vol.354, pp.819-843, 1996.
- (9) Drucker, D.C.: Conventional and unconventional plastic response and representation. Appl. Mech. Rev. (ASME), Vol.41, pp.151-167, 1988.
- (10) Rabinowicz, E.: The nature of the static and kinetic coefficients of friction. J. Appl. Phys., Vol.22(11), pp.1373-1379, 1951.
- (11) Rabinowicz, E., Friction and Wear of Materials, John Wiley & Sons, New York, 1965.
- (12) Burwell J.T. and Rabinowicz, E., The nature of the coefficient of friction. J. Appl. Phys., Vol.24(2), pp.136-139, 1953.
- (13) Courtney-Pratt, J.S. and Eisner, E.: The effect of a tangential force on the contact metallic bodies. Proc. Royal Soc. London, Ser. A, Vol.238, pp.529-550, 1957.
- (14) Johnson, K.L.: Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces. Proc. Royal Soc. London, Ser. A, Vol.230, pp.531-548, 1955.
- (15) Oden, J.T. and Pires, E.B.: Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. J. Appl. Mech. (ASME), Vol. 50, pp.67-76, 1983.
- (16) Oden, J.T. and Pires, E.B.: Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws. Comp. and Struct., Vol. 19, pp.137-147, 1984.
- (17) 橋口公一, 岡安崇史, 尾崎伸吾: 下負荷面の概念に基づく摩擦理論. 日本機械学会論文集 A 編, Vol.69, pp.295-301, 2003.
- (18) Hashiguchi, K.: Plastic constitutive equations of granular materials. Proc. US-Japan Seminar Continuum Mech. Stast. Appr. Mech. Granular Materials, Sendai, pp. 321-329, 1978.
- (19) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, J. Appl. Mech. (ASME), Vol.47, pp.266-272, 1980.
- (20) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, Int. J. Solids Struct., Vol.25, pp.917-945, 1989.
- (21) Hashiguchi, K.: On the loading criterion. Int. J. Plasticity, Vol.10, pp.871-878, 1994.
- (22) Hashiguchi, K.: Fundamentals in constitutive equation -Continuity and smoothness conditions and loading criterion-. Soils and Foundations, Vol.40(3), pp.155-161, 2000.
- (23) Roscoe, K.H. and Burland, J.B.: On the generalized stress-strain behavior of 'wet' clay. Engineering Plasticity (eds. Heyman, J. and Leckie, F.A.), Cambridge, Cambridge Univ. Press, pp. 535-608, 1968.
- (24) Schofield, A.N. and Wroth, C.P.: Critical State Soil Mechanics, London, McGraw-Hill. 1968.
- (25) Bay, N. and Wanheim, T.: Real area of contact and friction stresses at high pressure sliding contact. Wear, Vol.38, pp.201-209, 1976.