三重相反境界要素法を用いた三次元定常熱応力解析*

落 合 芳 博^{*1}Three-Dimensional Steady Thermal Stress Analysis
by Triple-Reciprocity Boundary Element MethodYoshihiro OCHIAI^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Kinki University,
3 4 1 Kowakae, Higashi-Osaka-shi, Osaka, 577-8502 Japan

Steady thermal stress analysis without heat generation can easily be solved by the boundary element method. However, for the case with arbitrary heat generation, a domain integral is necessary. This paper shows that the problem of three-dimensional steady thermal stress with heat generation can approximately be solved without the domain integral by triple-reciprocity boundary element Method. In this method, an arbitrary distribution of heat generation is interpolated by boundary integral equations. In order to solve the problem, the values of heat generation at internal points and on the boundary are used.

Key Words: Boundary Element Method, Thermal Stress, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Multiple-Reciprocity Method, Harmonic Function

1. 緒 言

境界要素法において領域内に任意の熱発生を伴う熱応力解析を行う場合、領域積分が必要になる。通常、領域積分のために領域内をセルで分割して解析するが、境界要素法のデータ作成が容易であるという利点が損なわれる。そこで、著者は改良形多重相反境界要素法を提案している⁽¹⁾。改良形多重相反境界要素法では、従来の多重相反法⁽²⁾⁽³⁾と異なり、高次の基本解が不要となり、少ない基本関数で、内部熱発生を伴う定常熱応力解析が行える。また、従来の多重相反境界要素法と異なり、前もって分布の微分値を与える必要がない。また、従来の多重相反境界要素法では、熱発生分布が関数で与えられていなければならない。

本論文では、三次元定常熱応力解析を、さらに少ない基本解で解析が可能になる体分布多重調和関数を用いた三重相反境界要素法を用いて示す^{(4)~(6)}。体分布多重調和関数を用いることにより、計算量を減少させることができ、しかも、複雑な熱発生分布の場合でも

安定した解を得ることができる。

2. 理 論

定常熱応力解析では、定常温度分布を求めた後、求められた温度分布を用いて熱応力分布を計算する。

2・1 熱伝導解析 点熱源や線熱源の場合、従来の境界要素法により容易に取扱うことができるので、任意の分布熱源 W_i^s が存在する場合を示す。定常熱伝導問題において、温度 T を求めるには、次のポアソン方程式を解かなければならない。

$$\nabla^2 T = \frac{-W_i^s}{\lambda} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 λ は熱伝導率である。境界要素法によれば、上式を解くための境界積分方程式は次式で与えられる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$CT(P) = \int_{\Gamma} \left\{ T_i(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_i(P, Q)}{\partial n} T(Q) \right\} d\Gamma(Q) + \lambda^{-1} \int_{\Omega} T_i(p, q) W_i^s(q) d\Omega \dots\dots\dots (2)$$

ただし、滑らかな境界上では $C=0.5$ 、領域内部では $C=1$ であり、 Γ および Ω は境界および領域を示す。なお、三次元問題の場合、式(2)における定常温度解

* 原稿受付 2003年8月25日。

^{*1} 正員、近畿大学理工学部 (〒577-8502 東大阪市小若江3-4-1)。

E-mail: ochiai@mech.kindai.ac.jp

析の基本解 $T_i(p, q)$ およびその単位法線 n に関する微分係数は次式で与えられる。

$$T_i(p, q) = \frac{1}{4\pi r} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial T_i(p, q)}{\partial n} = \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 r は観測点 p および作用点 q 間の距離である。記号 p, q は境界上では P, Q を用いるものとする。式(2)に示すように任意の熱発生 $W_i^s(q)$ が存在する場合、領域積分を考慮しなければならない。

2・2 補間 領域積分を避けるために、関数 W_{3A}^s の数を M とし、熱発生分布 W_i^s を補間により近似する⁽⁴⁾。

$$\nabla^2 W_1^s = -W_2^s \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla^2 W_2^s = -\sum_{m=1}^M W_{3A}^s(p_m) \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 M は内部補間点の数と同じであり、式(6)の W_{3A}^s は、半径 A の領域に一様に分布させた状態を示す。補間のために次の関係がある多重調和関数 T_f を導入する。

$$\nabla^2 T_{f+1} = T_f \dots\dots\dots (7)$$

したがって、 f 重調和関数 T_f は次式で求めることができる。

$$T_f = \int \frac{1}{r^2} \left[\int r^2 T_{f-1} dr \right] dr \dots\dots\dots (8)$$

三次元の場合の f 重調和関数 T_f およびその法線方向微分係数は、一般に次式で与えられる。

$$T_f(P, Q) = \frac{r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!} \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial n} = \frac{(2f-3)r^{2f-4}}{4\pi(2f-2)!} \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots (10)$$

図1からわかるように、重調和関数 T_2 は、 r の関数であり、 $r=0$ で滑らかではないので、図2に示すように半径 A の領域に一様に分布させた状態を示す、次式で定義される体分布多重調和関数 T_{fA} を導入する。

$$T_{fA} = \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_f(P, Q) a^2 \sin \theta d\theta d\phi da \dots\dots\dots (11)$$

式(11)の積分を行うと R の関数となるが、式(9)、(10)との整合性のために R を r と書き改めて、本論文に必要な体分布多重調和関数を以下に示す⁽⁴⁾⁽⁷⁾。

$$T_{1A} = \frac{A^3}{3r}, \quad r > A \dots\dots\dots (12)$$

$$T_{1A} = \frac{3A^2 - r^2}{6}, \quad r \leq A \dots\dots\dots (13)$$

Fig.1 Polyharmonic functions (T_f, T_{fA})

Fig.2 Notations in three-dimensional problem

$$T_{2A} = \frac{A^3}{6r} \left(r^2 + \frac{A^2}{5} \right), \quad r > A \dots\dots\dots (14)$$

$$T_{2A} = \frac{-r^4 - 10r^2A^2 - 15A^4}{120}, \quad r \leq A \dots\dots\dots (15)$$

$$T_{3A} = \frac{A^3(35r^4 + 42r^2A^2 + 3A^4)}{2520r} \dots\dots\dots (16)$$

$$T_{3A} = \frac{-r^6 + 21r^4A^2 + 105r^2A^4 + 35A^6}{5040}, \quad r \leq A \dots\dots\dots (17)$$

$$T_{4A} = \frac{A^3(21r^6 + 63r^4A^2 + 27r^2A^4 + A^6)}{45360r} \dots\dots\dots (18)$$

$$T_{4A} = \frac{-r^8 + 36r^6A^2 + 378r^4A^4 + 420r^2A^6 + 63A^8}{362880}, \quad r \leq A \dots\dots\dots (19)$$

熱発生量 W_i^s は境界要素法定式化を用い、式(5)～(7)およびグリーンの定理を二度用いることにより次式で与えられる。

$$CW_1^S(P) = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_r \left\{ T_j(P, Q) \frac{\partial W_j^S(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_j(P, Q)}{\partial n} W_j^S(Q) \right\} d\Gamma(Q) - \sum_{m=1}^M T_{2A}(P, q) W_{3A(m)}^P(q) \quad (20)$$

同様に、式(6)の W_2^S は次式で与えられる。

$$CW_2^S(P) = \int_r \left\{ T_1(P, Q) \frac{\partial W_2^S(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} W_2^S(Q) \right\} d\Gamma(Q) + \sum_{m=1}^M T_{1A}(P, q) W_{3A(m)}^P(q) \quad (21)$$

式(20), (21)から自由曲面を作成することができ、複雑な分布を補間することができる⁽⁸⁾。式(5), (6)およびグリーンの定理より、式(2)は次式となる。

$$CT(P) = \int_r \left\{ T_1(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} T(Q) \right\} d\Gamma(Q) - \lambda^{-1} \sum_{j=1}^2 \int_r \left\{ T_{j+1}(P, Q) \frac{\partial W_j^S(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_{j+1}(P, Q)}{\partial n} W_j^S(Q) \right\} d\Gamma(Q) + \lambda^{-1} \sum_{m=1}^M T_{3A}(P, q) W_{3A(m)}^P(q) \quad (22)$$

2・3 熱応力 次に、熱応力を求めるために熱弾性変位ポテンシャルを考える。熱弾性変位ポテンシャル Φ の境界積分表示は定常問題の場合、次式で与えられる⁽¹⁾⁽⁷⁾。

$$C\Phi(P) = \int_r \left\{ \frac{\partial T(Q)}{\partial n} \phi_1(P, Q) - T(Q) \frac{\partial \phi_1(P, Q)}{\partial n} \right\} d\Gamma(Q) + \lambda^{-1} \int_a \phi_1(P, q) W_1^S(q) d\Omega \quad (23)$$

$$\phi_1(P, Q) = \beta T_2 = \frac{\beta r}{8\pi} \quad (24)$$

ポアソン比を ν 、線膨張係数を α とすると、 $\beta = (1 + \nu)\alpha/(1 - \nu)$ である。ここで、次式を満足する関数 ϕ_f を導入する。

$$\nabla^2 \phi_{f+1} = \phi_f \quad (25)$$

式(5), (6), (25)およびグリーンの定理より、式(23)は次式のように書くことができる。

$$C\Phi(P) = \int_r \left\{ \frac{\partial T(Q)}{\partial n} \phi_1(P, Q) - T(Q) \frac{\partial \phi_1(P, Q)}{\partial n} \right\} d\Gamma(Q) - \lambda^{-1} \sum_{j=1}^2 \int_r \left\{ \phi_{f+1}(P, Q) \frac{\partial W_j^S(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi_{f+1}(P, Q)}{\partial n} W_j^S(Q) \right\} d\Gamma(Q) + \lambda^{-1} \sum_{m=1}^M \phi_{3A}(P, q) W_{3A(m)}^P(q) \quad (26)$$

ただし、

$$\phi_f = \beta T_{f+1} \quad (27)$$

熱弾性変位ポテンシャルと変位との関係を用いると、変位に関する境界積分表示は次式となる⁽⁹⁾。

$$C_{ij}u_j(P) = \int_r \left\{ u_{ij}(P, Q) p_j(Q) - p_{ij}(P, Q) u_j(Q) \right\} d\Gamma(Q) + \int_r \left\{ T(Q) \frac{\partial u_i^{(1)}(P, Q)}{\partial n} - \frac{\partial T(Q)}{\partial n} u_i^{(1)}(P, Q) \right\} d\Gamma(Q) + \lambda^{-1} \sum_{j=1}^2 \int_r \left\{ W_{j+1}^S(Q) \frac{\partial u_i^{(j+1)}(P, Q)}{\partial n} - \frac{\partial W_{j+1}^S(Q)}{\partial n} u_i^{(j+1)}(P, Q) \right\} d\Gamma(Q) + \lambda^{-1} \sum_{m=1}^M u_i^{(3)A}(P, q) W_{3A(m)}^P(q) \quad (28)$$

ただし、 $u_j(Q)$ および $p_j(Q)$ は境界上の変位と表面力である。横弾性係数を G とすると、三次元問題のケルビンの基本解 u_{ij}, p_{ij} は

$$u_{ij} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (29)$$

$$p_{ij} = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (30)$$

で与えられる。ただし、 δ_{ij} はクロネッカーデルタであり、 $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$ である。また、 $u_i^{(f)}, u_i^{(3)A}$ は次式で与えられる。

$$u_i^{(f)} = \frac{\beta(2f-1)r_{,i}r^{2f-2}}{4\pi(2f)!} \quad (31)$$

$$\frac{\partial u_i^{(f)}}{\partial n} = \frac{\beta(2f-1)r^{2f-3}}{4\pi(2f)!} \left[n_i + (2f-3)r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (32)$$

$$u_i^{(3)A} = \frac{\beta A^3 r_{,i} (105r^6 + 189r^4A^2 + 27r^2A^4 - A^6)}{45 \cdot 360r^2}, \quad r > A \quad (33)$$

$$u_i^{(3)A} = \frac{\beta r r_{,i} (-r^6 + 27r^4A^2 + 189r^2A^4 + 105A^6)}{45 \cdot 360}, \quad r \leq A \quad (34)$$

内点応力の境界積分表示は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(p) = & \int_{\Gamma} \{D_{ijk}(p, Q) p_k(Q) - S_{ijk}(p, Q) u_k(Q)\} d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ T(Q) \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}(p, Q)}{\partial n} - \frac{\partial T(Q)}{\partial n} \sigma_{ij}^{(1)}(p, Q) \right\} d\Gamma(Q) \\ & + \lambda^{-1} \sum_{f=1}^2 \int_{\Gamma} \left\{ W_{f+1}^s(Q) \frac{\partial \sigma_{ij}^{(f+1)}(p, Q)}{\partial n} - \frac{\partial W_{f+1}^s(Q)}{\partial n} \sigma_{ij}^{(f+1)}(p, Q) \right\} d\Gamma(Q) + \lambda^{-1} \sum_{m=1}^M \sigma_{ij}^{(3)A}(p, q) W_{3A(m)}^p(q) \\ & \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

ただし、関数 D_{ijk} , S_{ijk} は次式で与えられる⁽¹⁰⁾。

$$D_{ijk} = \frac{1}{r^2} [(1-2\nu)\{\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}\} + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \dots \dots \dots (36)$$

$$\begin{aligned} S_{ijk} = & \frac{G}{r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{kj}r_{,i} + \delta_{ki}r_{,j}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + 3\nu(n_jr_{,i}r_{,k} + n_i r_{,j}r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,i}r_{,j} \right. \\ & \left. + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \dots \dots \dots (37) \end{aligned}$$

また、 $\sigma_{ij}^{(f)}$, $\partial \sigma_{ij}^{(f)} / \partial n$ および $\sigma_{ij}^{(3)A}$ は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^{(f)} = \frac{G\beta(2f-1)r^{2f-3}}{2\pi(2f)!} [-(2f-1)\delta_{ij} + (2f-3)r_{,i}r_{,j}] \dots \dots \dots (38)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(f)}}{\partial n} = \frac{G\beta(2f-1)r^{2f-4}}{2\pi(2f)!} \left[r_{,j}n_i + r_{,i}n_j - (2f-1)\frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij} + (2f-5)r_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \dots \dots \dots (39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(3)A} = & \frac{G\beta A^3}{22680r^3} [-\delta_{ij}(525r^6 + 567r^4A^2 + 27r^2A^4 + A^6) + 3(105r^6 + 63r^4A^2 - 9r^2A^4 + A^6)r_{,i}r_{,j}], \quad r > A \\ & \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij}^{(3)A} = \frac{G\beta}{11340} [\delta_{ij}(4r^6 - 81r^4A^2 - 378r^2A^4 - 105A^6) + 3r^2(-r^4 + 18r^2A^2 + 63A^4)r_{,i}r_{,j}], \quad r \leq A \dots \dots (41)$$

2・4 離散化 実際の計算において、熱発生量 $W_i^s(q)$ は与えられているが、式(20), (21)の $\partial W_i^s(Q)/\partial n$, $\partial W_j^s(Q)/\partial n$, W_{3A}^p は与えられていない。そこで、式(20), (21)を離散化して、これらの値を求める方法を示す。わかりやすくするために、一定要素を用いることにし、境界は滑らかであるとする。上添字 P は W_{3A}^p に関するものである。 $W_j^s(Q)$, $\partial W_j^s(Q)/\partial n$, W_{3A}^p を成分とするベクトルを $\mathbf{W}_f$, $\mathbf{V}_f$, $\mathbf{W}_{3A}^p$ とおき、式(20)を離散化すると次式が得られる。

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{W}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_2^p \mathbf{W}_{3A}^p \dots (42)$$

ただし、 $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{G}_2$ および $\mathbf{G}_2^p$ は、次式の成分を持つマトリックスである。

$$H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T(P_i, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (43)$$

$$G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(P_i, Q_j) d\Gamma_j \dots \dots \dots (44)$$

$$H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(P_i, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (45)$$

$$G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(P_i, Q_j) d\Gamma_j \dots \dots \dots (46)$$

$$G_{2ij}^p = T_{2A}(P_i, q_j^p) \dots \dots \dots (47)$$

$\mathbf{W}_2$ は式(21)より次式で与えられる。

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{W}_2 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_1^p \mathbf{W}_{3A}^p \dots \dots \dots (48)$$

ただし、 $\mathbf{G}_1^p$ は次式の成分を持つマトリックスである。

$$G_{1ij}^p = T_{1A}(P_i, q_j^p) \dots \dots \dots (49)$$

また、式(20)において、熱発生量 $W(p^p)$ の補間のための内点を活用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(p^p) = & -\mathbf{H}_3 \mathbf{W}_1 + \mathbf{G}_3 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_4 \mathbf{W}_2 - \mathbf{G}_4 \mathbf{V}_2 \\ & - \mathbf{G}_3^p \mathbf{W}_{3A}^p \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{H}_3$, $\mathbf{G}_3$, $\mathbf{H}_4$, $\mathbf{G}_4$ および $\mathbf{G}_3^p$ は、次式の成分を持つマトリックスである。

$$H_{3ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1(p_i^p, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (51)$$

$$G_{3ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(p_i^p, Q_j) d\Gamma_j \dots \dots \dots (52)$$

$$H_{4ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(p_i^p, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (53)$$

$$G_{4ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(p_i^p, Q_j) d\Gamma_j \dots \dots \dots (54)$$

$$G_{3ij}^p = T_{2A}(p_i^p, q_j^p) \dots \dots \dots (55)$$

式(5)より W_2^s は曲率和に相当し、 $\mathbf{W}_2=0$ とおくと、境界近くでの変化が少なくなる。そこで、一次元の三次自然スプライン⁽¹¹⁾の場合と同様に $\mathbf{W}_2=0$ とおくと、式(42), (48), (50)より次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2^p \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^p \\ \mathbf{G}_3 & -\mathbf{G}_4 & -\mathbf{G}_3^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{W}_{3A}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_3 \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}(p^p) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (56)$$

上式より $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ および $\mathbf{W}_{3A}^p$ を求めることができる。一定要素を用いた場合、境界を N_0 分割し、内点を N_1 点使用した場合、 $(2N_0 + N_1)$ 行の連立方程式を解かなければならない。体分布多重調和関数を用いない場合は、 $(3N_0 + N_1)$ 行の連立方程式を解かなければならず、計算量が増加する。

3. 解 析 例

3・1 計算例 1 本解法の精度を確かめるために、図 3 に示すように内半径 a 、外半径 b の中空円筒の温度分布および熱応力を求めた。ただし、次式の熱発生分布を伴うものとする。

$$W = \frac{W_0(b^2 - R^2)}{b^2 - a^2} \quad (57)$$

上式において、 R は中心からの距離とし、上下面への熱の移動はない二次元状態であるとする。円の内外周温度は 0°C であるとする。縦弾性係数 $E=210\text{ GPa}$ 、熱膨張係数 $\alpha=11 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ とし外力は作用しないものとする。また、対称性より 4 分の 1 の領域で解析を行い、半径 $a=10\text{ mm}$ 、 $b=30\text{ mm}$ 、 $W_0/\lambda=1^\circ\text{C}/\text{mm}^2$ として計算した。ただし、 λ は熱伝導率である。図 4 は式 (57) で与えられた熱発生分布と式 (56) で補間され

Fig. 3 Quarter region of cylinder with heat generation

Fig. 4 Interpolation of heat generation

Fig. 5 Temperature distribution on cylinder

Fig. 6 Stress distribution on cylinder

た分布の比較を示す。図5および図6は、温度および熱応力の厳密解との比較を示す。本計算例では、要素数680、内点数45とし、滑らかな分布であるので内点は規則的に配置した。

3・2 計算例2 図7に示すような一辺 $L=10$

(a) Boundary elements

(b) Internal points

Fig. 7 Cube with heat generation

Fig. 8 Interpolation of heat generation in cube

mmの立方体領域において、次式で示されるような指数関数分布の熱発生があるとする。

$$W = W_0 \exp(-\mu x) \quad (58)$$

$x=0$ mmの面の温度は 0°C に保たれているものとし、他の面は断熱状態であるとする。また、 $x=0$ mm、および $x=10$ mmの面には外力は作用しないものとし、 $y=0$ mm、および $y=10$ mmの面の y 方向の変位はないものとし、 $z=0$ mm、および $z=10$ mmの面の z 方向の変位はないものとして計算する。また、 $W_0/\lambda =$

Fig. 9 Stress distribution on cube (σ_{yy})

Fig. 10 Maximum stress distribution on cube ($z=5$ mm, $\times 10$ MPa)

$1^{\circ}\text{C}/\text{mm}^{-1}$ として計算する。他の条件は図 3 の場合と同じとする。本計算例の平面ひずみ状態とした場合の熱応力 σ_{yy} の厳密解は次式で与えられる⁽¹²⁾。

$$\sigma_{yy} = \frac{-W_0 \alpha E \{ [1 - \exp(-\mu x)] - \mu x \exp(-\mu L) \}}{\lambda \mu^2 (1 - \nu)} \dots\dots\dots (59)$$

図 8 に $\mu=0.05, 0.2, 0.5 \text{ mm}^{-1}$ における近似された熱発生分布と与えられた分布の比較を示す。図 9 に、本手法により計算した $y=z=5 \text{ mm}$ の位置の熱応力分布と厳密解の比較を示す。本計算例では、要素数 600、内点数 64 とした。

次に、図 7 と同じ形状で熱発生分布が下記のような場合の熱応力分布を求める。

$$W = W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \dots\dots\dots (60)$$

熱発生分布 $W_0/\lambda=1^{\circ}\text{C}/\text{mm}^{-2}$ とする。外周温度は 0°C とし、外力は作用しないものとする。他の条件は図 3 の場合と同じとする。図 10 に $z=5 \text{ mm}$ の位置における最大熱応力分布を示す。

4. 結 言

体分布多重調和関数により、複雑な熱発生分布を境界積分により表現することが可能であり、任意の熱発生分布が作用する場合でも、境界積分のみで精度良く定常熱応力解析が可能になることが示された。解析に必要な体分布多重調和関数から導かれる基本解を示した。本手法では熱発生分布を表現するための境界データと内点データが加わるだけで熱発生分布を伴う場合

でも、少ない入力データで三次元定常熱応力解析が可能であることがわかった。特に、熱発生分布が滑らかな場合、非常に少ない内点で解析が可能であった。

文 献

- (1) 落合芳博, 改良された多重相反境界要素法による定常熱応力解析, 機論, **60**-571, A (1994), 756-762.
- (2) Nowak, A. J. and Neves, A. C. 編, *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, (1994), 25-43, Computational Mechanics Publications.
- (3) Nowak, A. J. and Brebbia, C. A., The multiple-reciprocity method. A new approach for transforming BEM domain integral to the boundary, *Eng. Analysis Bound. Elements*, **6** (1989), 164-167.
- (4) 落合芳博, 三重相反境界要素法による任意物体を伴う三次元応力解析, 機論, **67**-663, A (2001), 1747-1753.
- (5) 落合芳博, 三重相反境界要素法による傾斜機能材料の定常熱伝導解析, 機論, **68**-675, B (2002), 3130-3135.
- (6) Ochiai, Y. and Kobayashi, T., Initial Strain Formulation without Internal Cells for Elastoplastic Analysis by Triple-Reciprocity BEM, *Int. J. Num. Method Eng.*, **50** (2001), 1877-1892.
- (7) 落合芳博, 改良形多重相反境界要素法による直交異方性体の定常熱伝導解析, 機論, **64**-618, B (1998), 492-497.
- (8) 落合芳博・広永美喜也・川島成平, 体分布多重調和関数を用いた立体形状モデリング, 機論, **66**-646, (2000), 2082-2087.
- (9) 関谷壮・落合芳博・石田良平, 境界要素法による熱応力解析, (1992), 17-51, 森北出版.
- (10) Brebbia, C. A. (田中正隆訳), 境界要素解析—理論と応用, (1984), 46, 丸善.
- (11) 桜井明, スプライン関数入門, (1981), 4-9, 東京電機大学出版局.
- (12) 竹内洋一郎, 熱応力(再増補改訂版), (1989), 48-74, 日新出版.