一様圧縮荷重を受ける段ボール箱形容器(正方形筒) の弾性曲げ応力解析* (異方性側板の場合)

松島 理^{*1}, 松島 成夫^{*2}

Elastic Bending Stress Analysis for Case of Corrugated Fiberboard Box Shape (Square Tubular) under Uniform Compressive Loading (On Anisotropic Side Plates)

Satoru MATSUSHIMA and Shigeo MATSUSHIMA^{*3}^{*3} Department of Mechanical Engineering, Ehime University,

3 Bunkyocho, Matsuyama-shi, Ehime, 790-8577 Japan

Formulations of elastic deflection and bending stresses for anisotropic side plates (width 350, height $h=300$ and thickness 5.44 mm, and longitudinal coefficients $E_x=291$ and $E_y=153$ N/mm² in width and height directions and Poisson's ratio $\nu_{xy}=0.10$ for width direction strain to height direction strain) in the case of the corrugated fiberboard box shape (CFCBS) under uniform compression p_{y0} were expressed using the constrain of four edges, and behaviors of deflection w and bending stresses for its box were discussed by these formulations. w and bending normal stresses σ_{bx} and σ_{by} in width and height directions of side plates distribute symmetrically to center lines in width and height directions, and shear stress τ_{bxy} distributes antisymmetrically to their center lines. Maximum w_m of $|w|$ is at side edge centers in the side plate, and maximum σ_{bxm} of σ_{bx} is at side edge centers and maximum σ_{bym} of $|\sigma_{by}|$ is at positions of $L/32$ from the plate center in the width direction. And maximum τ_{bxy} of $|\tau_{bxy}|$ is at corners of the side plate. Ratios $w(\text{aniso})/w(\text{iso})$, $\sigma_{bx}(\text{aniso})/\sigma_{bx}(\text{iso})$, $\sigma_{by}(\text{aniso})/\sigma_{by}(\text{iso})$ and $\tau_{bxy}(\text{aniso})/\tau_{bxy}(\text{iso})$ for the anisotropic plate to the isotropic plate (longitudinal coefficient $E=E_x$ and Poisson's ratio $\nu=\nu_{xy}$) are about 2, 2, 1 and 4/3 respectively.

Key Words: Computational Mechanics, Structure Analysis, Elastic Bending, Case of Corrugated Fiberboard, Elastic Stress Analysis, Structure Strength, Numerical Analysis

1. 緒 言

段ボール箱は包装用箱として盛んに用いられている⁽¹⁾⁽²⁾。そして、箱の素材である段ボールシート⁽³⁾⁽⁴⁾および段ボール箱^{(5)~(7)}の強度等に関する実用的研究が古くより行われ、最近でも行われている⁽⁸⁾⁽⁹⁾。このことより、段ボール箱の変形強度を明らかにすることは、段ボール箱の設計、開発に対し必要なことであり、有意義なことであると考えられる。

段ボールシートの引張り⁽¹⁰⁾、曲げ⁽¹¹⁾⁽¹²⁾、板曲げ⁽¹³⁾についての基礎的研究があり、一様圧縮荷重を受ける段ボール箱形容器の変形⁽¹⁴⁾についてのものがある。

段ボール箱は段ボールシートより作られ、そのシートは原紙(ライナ、中芯)の異方性⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾と段ボール構造に基づく異方性⁽¹⁰⁾とによって特異な異方特性を示すものと考えられる。段ボールシートの引張変形⁽¹⁰⁾⁽¹⁷⁾、座屈⁽¹⁸⁾に関する異方性特性についての研究が行われている。そして、等方性材段ボール箱形容器の応力(正方形筒)⁽¹⁴⁾⁽¹⁹⁾、変形(長方形筒)⁽²⁰⁾の解析を

行った研究がある。その変形の解析は主に圧縮変形で、曲げは上下辺、両側辺の連続性を議論した程度で一基本条件であるたわみの変形条件の配慮はなされていない。そのほかに、異方性を考慮した段ボール箱形容器の側板の圧縮変形応力および曲げ応力についての基礎的研究は見当たらない。

したがって、側辺の変形制限を考慮し、段ボール箱形容器のたわみおよびその曲げ応力の状況を明らかにすることは段ボールの変形、座屈強度工学上重要なことであり、段ボール箱の基礎的力学的強度として異方性側板のたわみおよび曲げ応力の解析を行うことは必要なことであると考えられる。

以上のことより、本研究では、側辺の変形制限を考慮し、上下方向に一様圧縮荷重を受ける上下周辺支持正方形筒段ボール箱形容器(異方性)の弾性のたわみ、曲げ応力の解析表示を導出することを試みた。そして、一様荷重を受ける段ボール箱のたわみ、曲げ応力状況および等方性板との相異を議論することを試みた。ただし、便宜上一般に板材に用いられている板異方性方程式⁽²¹⁾によって議論した。

2. 解析方法および基本表示

一様圧縮荷重 p_{y0} を受ける正方形筒箱形容器(底辺

* 原稿受付 2003年11月12日。

^{*1} 愛媛大学地域共同研究センター(☎790-8577 松山市文京町3)。^{*2} 正員、愛媛大学工学部。

E-mail: inesato@crest.ocn.ne.jp

L 、高さ h) の 4 側面の変形は同様であり、以下のように一側面板の変形によって議論する。

側板一隅の厚さ中央を座標の原点 0、下辺に沿った方向を x 軸、高さ方向を y 軸にし、側板の面に垂直な方向を z 軸にする(図 1 参照)。

側板のたわみ変形の議論を容易にするために、側板を均一な異方性材として取扱い、側板に生じる平面応力変形時の x, y 方向の垂直応力 σ_x, σ_y 、せん断応力 τ_{xy} およびたわみ、 x, y 方向の曲げ垂直応力 σ_{bx}, σ_{by} 、せん断応力 $\tau_{b,xy}$ の状況を議論する。

2・1 変形制限について 段ボール箱の側板は一般に薄くて広いものであり、その変形は近似的に平面応力変形であると考えられ、側辺部では隣側板との変形の連続性に伴う変形制限に応じた x, y 方向の垂直応力 σ_x, σ_y およびせん断応力 τ_{xy} への制限が生じるものとする。

段ボール箱側板上下辺には、側板と同材の耳(flape)とがあり⁽²²⁾(図 1 参照)、一様圧縮荷重 p_{y0} を受ける底面正方形段ボール箱の強度は基本的に上下辺に耳を持つ四角筒の側板によって支えられるものと考えられる。したがって、まず τ_{xy} による隣側板への変形の影響を除き、近似的に側板の変形は各独立した変形制限を持つ板の変形であるとする。

箱の変形条件により、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を

$$\sigma_x(x=0 \text{ or } L, y)=0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sigma_y(x, y=0 \text{ or } h)=p_{y0} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\tau_{xy}(x=0 \text{ or } L, y=0 \text{ or } h)=0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

で、上下辺の変形条件として近似的に x 方向の垂直ひずみ ε_x を

$$\varepsilon_x(x, y=0 \text{ or } h)=0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表す。

異方性板の σ_x, σ_y およびせん断応力 τ_{xy} と ε_x, y 方

Fig. 1 CFCBS and coordinates

向の垂直ひずみ ε_y およびせん断ひずみ γ_{xy} との関係は

$$\sigma_x = E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y \quad \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$$\sigma_y = E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x \quad \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

$$\tau_{xy} = G_0 \gamma_{xy} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot c)$$

で⁽²¹⁾、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ と σ_x, σ_y との関係は

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E_x + \nu_{xy} \sigma_y / E_y \quad \dots\dots\dots (6 \cdot a)$$

$$\varepsilon_y = \sigma_y / E_y + \nu_{yx} \sigma_x / E_x \quad \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad \dots\dots\dots (6 \cdot c)$$

で表される。 E'_x, E'_y, E'', G_0 は弾性係数であり、 E_x, E_y は縦弾性係数、 G は横弾性係数である。そして、 ν_{xy}, ν_{yx} は各 y, x 方向ひずみの x, y 方向ひずみ寄与を示すポアソン比である。

式(5・a)～(6・c)より係数 E'_x, E'_y, E'', G_0 は

$$E'_x = E_x / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$E'_y = E_y / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$E'' = \nu_{xy} E'_x = \nu_{yx} E'_y \quad \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

$$G_0 = G \quad \dots\dots\dots (7 \cdot d)$$

で表され、直交異方性板の横弾性係数 G は

$$G = \frac{E_x E_y}{(1 + \nu_{xy}) E_x + (1 + \nu_{yx}) E_y} \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表される⁽¹⁵⁾。

側辺部では τ_{xy} の寄与は側板の変形のみではなく、隣側板への曲げ変形寄与が生じるものと考えられ、その寄与は隣側板($x'y'$)への y 方向曲げおよびねじりモーメント $M_y, M_{x'y}$ (単位長当たり)を起こすものと考えられ、その寄与を示すせん断力 Q_y (単位長当たり)は

$$Q_y = T \tau_{xy}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{x'y}}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表されるものと考えられる⁽²³⁾(図 2 参照)。 T は板厚である。

2・2 応力表示について

2・2・1 応力表示 p_{y0} によって生じる $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ は変形の適合条件を満たし、また力の釣合い則⁽²⁴⁾を満たすものと考えられ、式(5・a)～(7・d)より応力関数

Fig. 2 Shear stress and bending moment in side plate near side edge

F の適用条件は

$$\begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2(G + E_0) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} &= 0 \\ E_0 &= -\nu_{xy}/E_y = -\nu_{yx}/E_x \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

で表されるものと考えられる。 p_{y0} によって生じる $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が容器の変形条件式(1)～(4)を満たす側板の応力関数 F は

$$F = p_{y0}[F_0 - 1/(2x^2)] \quad \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

で表されるものと考え、 F_0 は平面応力および式(9)による板曲げ変形の議論が容易にできるように

$$\begin{aligned} F_0 &= \sum_{i=0,1,2,3,\dots} [\sin(\alpha_i x)(c_{1i}f_{1i} + c_{2i}f_{2i}) \\ &\quad + \sin(\beta_i y)(c_{3i}f_{3i} + c_{4i}f_{4i})] \quad (i=0,1,2,3,\dots, i_0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

$$\alpha_i = \frac{\pi(2i+1)}{L}, \quad \beta_i = \frac{\pi(2i+1)}{h} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$f_{1i} = \cosh\left[\alpha_i\left(y - \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$f_{2i} = \alpha_i\left(y - \frac{h}{2}\right) \sinh\left[\alpha_i\left(y - \frac{h}{2}\right)\right] \quad \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$f_{3i} = \cosh\left[\beta_i\left(x - \frac{L}{2}\right)\right],$$

$$f_{4i} = \beta_i\left(x - \frac{L}{2}\right) \sinh\left[\beta_i\left(x - \frac{L}{2}\right)\right] \quad \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

を表す。 $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ は係数である。

式(1)～(4)を満たす側板の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は応力関数の定義により

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (14)$$

で表され⁽²⁴⁾、 σ_x, σ_y および τ_{xy} を

$$\sigma_x = p_{y0}\sigma_{0x}, \quad \sigma_y = p_{y0}\sigma_{0y} - p_{y0} \quad \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

$$\tau_{xy} = p_{y0}\tau_{0xy} \quad \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

で表すと、 $\sigma_{0x}, \sigma_{0y}, \tau_{0xy}$ は式(11・a)～(15・b)により

$$\begin{aligned} \sigma_{x0} &= \sum_{i=0,1,2,3,\dots} [-\alpha_i^2 \sin(\alpha_i x)[(c_{1i} + 2c_{2i})f_{1i} \\ &\quad + c_{2i}f_{2i}] + \beta_i^2 \sin(\beta_i y)(c_{3i}f_{3i} + c_{4i}f_{4i})] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y0} &= \sum_{i=0,1,2,3,\dots} [\alpha_i^2 \sin(\alpha_i x)(c_{1i}f_{1i} + c_{2i}f_{2i}) \\ &\quad - \beta_i^2 \sin(\beta_i y)[(c_{3i} + 2c_{4i})f_{3i} + c_{4i}f_{4i}]] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy0} &= -\sum_{i=0,1,2,3,\dots} [\alpha_i^2 \cos(\alpha_i x)[(c_{1i} + c_{2i})f_{1i} \\ &\quad + c_{2i}f_{2i}] + \beta_i^2 \cos(\beta_i y)[(c_{3i} + c_{4i})f_{3i} + c_{4i}f_{4i}]] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16 \cdot c)$$

で表される。

2・2・2 係数 $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ について $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ を明らかにすると、式(14)～(16・c)によって諸応力を明らかにすることができる。

式(2)を満たす式(16・b)に式(11・a)～(13・b)の値

を代入すると、上下辺での関係

$$\begin{aligned} K_{1i}c_{1i} + K_{2i}c_{2i} &= 0 \\ K_{1i} &= \cosh\left(\frac{\alpha_i h}{2}\right), \quad K_{2i} = \frac{\alpha_i h}{2} \sinh\left(\frac{\alpha_i h}{2}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17 \cdot a)$$

が得られ、 c_{2i} と c_{1i} との関係は

$$c_{2i} = -(K_{1i}/K_{2i})c_{1i} \quad \dots\dots\dots (17 \cdot b)$$

で表されることがわかる。式(1)を満たす式(16・a)に式(11・a)～(13・b)の値を代入すると、側面で関係

$$\begin{aligned} K_{3i}c_{3i} + K_{4i}c_{4i} &= 0 \\ K_{3i} &= \cosh\left(\frac{\beta_i L}{2}\right), \quad K_{4i} = \frac{\beta_i L}{2} \sinh\left(\frac{\beta_i L}{2}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

が得られ、 c_{4i} と c_{3i} との関係は

$$c_{4i} = -(K_{3i}/K_{4i})c_{3i} \quad \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

で表されることがわかる。式(3)を満たす式(16・c)に式(11・a)～(13・b)の値を代入すると、隅での関係

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 [K_{5i}c_{1i} + (K_{5i} + K_{6i})c_{2i}] \\ + \beta_i^2 [K_{7i}c_{3i} + (K_{7i} + K_{8i})c_{4i}] &= 0 \\ K_{5i} &= \sinh\left(\frac{\alpha_i h}{2}\right), \quad K_{6i} = \frac{\alpha_i h}{2} \cosh\left(\frac{\alpha_i h}{2}\right) \\ K_{7i} &= \sinh\left(\frac{\beta_i L}{2}\right), \quad K_{8i} = \frac{\beta_i L}{2} \cosh\left(\frac{\beta_i L}{2}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19 \cdot a)$$

が得られ、式(17・b)、(18・b)、(19・a)より c_{4i} と c_{2i} との関係は

$$\begin{aligned} c_{2i} &= -(K_{01i}/K_{02i})(\alpha_i/\beta_i)^2 c_{4i} \\ K_{01i} &= -K_{2i}K_{5i}/K_{1i} + K_{7i} \\ K_{02i} &= -(K_{4i} + K_{5i})K_{4i}/K_{3i} + (K_{7i} + K_{8i}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19 \cdot b)$$

で表されることがわかる。

式(4)を満たす式(6・a)に式(16・a)、(16・b)の値を代入すると、上下辺では関係

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sum_{i=0,1,3,5,\dots} \alpha_i^2 [\sin(\alpha_i x)(c_{1i} + 2c_{2i})K_{1i} \\ &\quad + c_{2i}K_{2i}] + \frac{\nu_{xy}}{E_y} \left[\sum_{i=0,1,3,5,\dots} [\sin(\alpha_i x)c_{1i}(K_{1i} \right. \\ &\quad \left. + c_{2i}K_{2i})] + p_{y0} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (20 \cdot a) \end{aligned}$$

が得られ、式(20・a)にステップ関数⁽²⁵⁾を適用すると、関係

$$\begin{aligned} \sum_{i=0,1,3,5,\dots} \alpha_i^2 \sin(\alpha_i x) \left[\frac{2}{E_x} c_{2i} K_{1i} \right] \\ = - \sum_{i=0,1,3,5,\dots} \sin(\alpha_i x) \left[\frac{4\nu_{xy}p_{y0}}{\pi(2i+1)E_y} \right] \quad \dots\dots\dots (20 \cdot b) \end{aligned}$$

が得られる。そこで、式(20・b)が常に成り立つには、関係

$$\frac{2}{E_x} \alpha_i^2 c_{2i} K_{1i} = -\frac{4\nu_{xy}p_{y0}}{\pi(2i+1)E_y} \quad \dots\dots\dots (21)$$

であることが必要であると考えられ、式(17・b)を式(21)に代入すると異方性側板の係数 c_{1i} の関係

$$c_{1i} = -\frac{2\nu_{xy}p_{y0}}{\pi(2i+1)\alpha_i^2} \left(\frac{E_x}{E_y} \right) \left(\frac{K_{2i}}{K_{1i}^2} \right) \dots\dots\dots (22)$$

が得られる。

以上のことにより、 c_{1i} は式(22)によって求められ、式(17・b)によって c_{2i} が明らかになれば、式(18・b)、(19・b)によって c_{3i} 、 c_{4i} が明らかになる。そして、式(14)～(16・c)より σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} が明らかになる。

2・3 たわみ、曲げ応力について たわみ w および曲げ応力 σ_{bx} 、 σ_{by} 、 τ_{bxy} の表示を議論する。

異方性側板 x 、 y の曲げモーメント M_x 、 M_y およびねじりモーメント M_{xy} とたわみ w との関係は

$$M_x = \int_{-T/2}^{T/2} \sigma_x z dz = - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (23\cdot a)$$

$$M_y = \int_{-T/2}^{T/2} \sigma_y z dz = - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots (23\cdot b)$$

$$M_{xy} = - \int_{-T/2}^{T/2} \tau_{xy} z dz = 2D_{xy} \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (23\cdot c)$$

で表される⁽²¹⁾。 D_x 、 D_y 、 D_1 、 D_{xy} は弾性係数

$$D_x = E'_x T^3/12, \quad D_y = E'_y T^3/12 \dots\dots\dots (24\cdot a)$$

$$D_1 = E'' T^3/12, \quad D_{xy} = G T^3/12 \dots\dots\dots (24\cdot b)$$

である。

上述のように側板の曲げ変形の議論には曲げモーメント表示に関する吟味が必要である。箱の変形条件を考慮すると、 x 方向の曲げを起こす曲げモーメント

M_x は箱側辺では零で表され、 y 方向の曲げを起こすモーメント M_y 、ねじりモーメント M_{xy} は式(9)のように生じるものと考えられる。すなわち、 Q_y は式(9)、(14)、(15・b)、(16・c)より

$$\begin{aligned} Q_y &= T\tau_{xy}(x=0) \\ &= -T \sum_{i=1,2,3,\dots} [\alpha_i^2 [(c_{1i} + c_{2i})f_{5i} + c_{2i}f_{2i}] \\ &\quad + \beta_i^2 \cos(\beta_i y) [(c_{3i} + c_{4i})]] \dots\dots\dots (25\cdot a) \end{aligned}$$

で、 Q_y と w との関係は式(9)、(23・b)、(23・c)より

$$Q_y = - \left[D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right], \quad H = D_1 + 2D_{xy} \dots\dots\dots (25\cdot b)$$

で表される⁽²³⁾。側板の側辺、上下辺に働く M_x 、 M_y は

$$M_x(x=0 \text{ or } L)=0, \quad M_x(y=0 \text{ or } h)=0 \dots\dots\dots (26\cdot a)$$

$$M_y(y=0 \text{ or } h)=0 \dots\dots\dots (26\cdot b)$$

で、側板上下辺の w は

$$w(x=0 \text{ or } L)=0 \dots\dots\dots (26\cdot c)$$

であると考えられる。

2・3・1 たわみ表示 側板の対称性を考慮し、式(11・b)、(13・a)、(13・b)の f_{1i} 、 f_{2i} にフーリエ級数を適用すると、 f_{1i} 、 f_{2i} は

$$f_{1i} = \sum_{n=1,2,3,\dots} G_{1in} \sin(\gamma_n y) \dots\dots\dots (27\cdot a)$$

$$f_{2i} = \sum_{n=1,2,3,\dots} G_{2in} \sin(\gamma_n y) \dots\dots\dots (27\cdot b)$$

$$\gamma_n = \pi(2n+1)/h \dots\dots\dots (28)$$

で表される。指数・正弦関数の積分関係⁽²⁶⁾

$$\begin{aligned} \int \exp(\alpha_i y) \sin(\gamma_n y) dy &= \frac{\exp(\alpha_i y)}{\alpha_i^2 + \gamma_n^2} [\alpha_i \sin(\gamma_n y) - \gamma_n \cos(\gamma_n y)] \\ \int y \exp(\alpha_i y) \sin(\gamma_n y) dy &= \frac{y \exp(\alpha_i y)}{\alpha_i^2 + \gamma_n^2} [\alpha_i \sin(\gamma_n y) - \gamma_n \cos(\gamma_n y)] \\ &\quad - \frac{\exp(\alpha_i y)}{(\alpha_i^2 + \gamma_n^2)^2} [(\alpha_i^2 - \gamma_n^2) \sin(\gamma_n y) - 2\alpha_i \gamma_n \cos(\gamma_n y)] \end{aligned}$$

により、 G_{1in} 、 G_{2in} は

$$G_{1in} = -\frac{4\gamma_n \cos(\Delta\gamma_n)}{(\alpha_i^2 + \gamma_n^2)h} \cos(\alpha_i y) \dots\dots\dots (29\cdot a)$$

$$G_{2in} = -\frac{4\gamma_n \cos(\Delta\gamma_n)}{(\alpha_i^2 + \gamma_n^2)h} \left[\frac{2\alpha_i \gamma_n}{\alpha_i^2 + \gamma_n^2} - \gamma_n h \right] \cos(\alpha_i y) \dots\dots\dots (29\cdot b)$$

$$\Delta\gamma_n = \frac{\pi h}{L}(2n+1), \quad \alpha_i = \frac{\pi}{2}(2i+1) \dots\dots\dots (30)$$

で表される。

箱形状および分布荷重零下の条件⁽²⁴⁾

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

および板の対称性を満たす w は、式(9)、(26・a)～(26・c)、(31)を考慮し、

$$w = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \left[\sum_{n=0,1,2,3,\dots} \sin(\gamma_n y) \left[d_{0in} G_{1in} f_{An} + (d_{0in} G_{1in} + d_{2in} G_{2in} f_{Bn}) \right] + [\beta_i^3 \sin(\beta_i y) (d_{3i} f_{3i} + d_{4i} f_{4i})] \right]$$

$$(i=0, 1, 2, 3, \dots, i_0) \dots\dots\dots (32)$$

$$f_{An} = \cosh \left[\gamma_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \right], \quad f_{Bn} = \gamma_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \sinh \left[\gamma_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]$$

で表されるものとする。 $d_{0in}, d_{1in}, d_{2in}, d_{3i}, d_{4i}$ は係数である。

2・3・2 係数決定 $d_{0in}, d_{1in}, d_{2in}, d_{3i}, d_{4i}$ が明らかにになれば、式(32)より w の値が明らかになる。そこで、 $d_{0in}, d_{1in}, d_{2in}, d_{3i}, d_{4i}$ を議論する。

式(25・b)に式(32)を代入すると、 $Q_y(x=0)$ は

$$\begin{aligned} Q_y(x=0) = & \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \left[\sum_{n=0,1,2,3,\dots} [\gamma_n^3 \sin(\gamma_n y) [2H(d_{1in}G_{1in} + d_{2in}G_{2in}K_{G0n})] \right. \\ & + (H - D_y)[d_{0in}G_{1in}K_{G0n} + d_{1in}G_{1in}K_{G0n} + d_{2in}G_{2in}K_{G1n}] \\ & \left. + [\beta_i^3 \sin(\beta_i y) [2Hd_{4i}K_{7i} + (H - D_y)(d_{3i}K_{7i} + d_{4i} + K_{8i})]] \right] \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$K_{G0n} = \cosh[(\gamma_n L)/2], \quad K_{G1n} = [(\gamma_n L)/2] \sinh[(\gamma_n L)/2]$$

で表される。式(25・a)が成り立つには、式(23・a)、(26・a)より得られる関係

$$\begin{aligned} D_x[(d_{0in}G_{1in} + 2d_{1in}G_{1in} + 2d_{2in}G_{2in})K_{G0n} + (d_{1in}G_{1in}d_{2in}G_{2in})K_{G1n}] \\ - D_1[(d_{0in}G_{1in})K_{G0n} + (d_{1in}G_{1in}d_{2in}G_{2in})K_{G1n}] = 0 \dots\dots\dots (34\cdot a) \end{aligned}$$

$$K_{G1n} = [(\gamma_n L)/2] \sinh[(\gamma_n L)/2] \dots\dots\dots (34\cdot b)$$

$$D_x[(d_{3i} + 2d_{4i}K_{4i})K_{3i} + d_{4i}K_{4i}] = D_1(d_{3i}K_{3i} + d_{4i}K_{4i}) \dots\dots\dots (34\cdot c)$$

を満たすことが必要であり、式(34・c)より関係

$$d_{4i} = K_{T0i}d_{3i}, \quad K_{T0i} = -\frac{(D_x - D_1)K_{3i}}{2D_xK_{4i} + (D_x - D_1)K_{3i}} \dots\dots\dots (34\cdot d)$$

が成り立つ。式(25・a)と式(33)とが常に等しくなるには、両式の対応する項の i 次項が等しくなることが必要であり、関係

$$T\alpha_i^2(c_{1i} + c_{2i})f_{1i} = \sum_{n=0,1,2,3,\dots} \gamma_n^3 \cos(\gamma_n y) [K_{T0n}d_{0in}G_{1in} + (K_{Tin} + 2HK_{G0n})d_{1in}G_{2in}]$$

$$T\alpha_i^2c_{2i}f_{1i} = \sum_{n=0,1,2,3,\dots} \gamma_n^3 \cos(\gamma_n y) (K_{T2n} + 2HK_{G0n})G_{2in}d_{2in}$$

$$K_{Tin} = (H - D_y)K_{G0n}, \quad K_{T2n} = (H - D_y)K_{Gin}$$

$$T[(c_{3i} + c_{4i})K_{7i} + c_{4i}K_{8i}] = \beta_i[2Hd_{4i}K_{7i} + (H - D_y)(d_{3i}K_{7i} + d_{4i}K_{8i})] \dots\dots\dots (35\cdot a)$$

が成り立つものと考えられ、上式の両項の i, n 次項が等しくなるには、関係

$$T\alpha_i^2(c_{1i} + c_{2i}) = \gamma_n^3[(K_{T1n}d_{1in} + 2Hd_{1in}K_{G0n}) + K_{T1n}d_{0in}] \dots\dots\dots (35\cdot b)$$

$$T\alpha_i^2c_{2i} = \gamma_n^3(K_{T2n} + 2HK_{G0n})d_{2in} \dots\dots\dots (35\cdot c)$$

が成り立つことが必要である。

式(34・c)、(35・a)、(35・c)より d_{2in}, d_{3i} は

$$d_{2in} = \frac{T\alpha_i^2c_{2i}}{\gamma_n^3(K_{T2n} + 2HK_{G0n})} \dots\dots\dots (36\cdot a)$$

$$d_{3i} = \frac{C_{Ti}}{D_{d3i} + D_{d4i}K_{T0i}} \dots\dots\dots (36\cdot b)$$

$$C_{Ti} = T[(c_{3i} + c_{4i})K_{7i} + c_{4i}K_{8i}], \quad D_{d3i} = \beta_i(H - D_y)K_{7i}, \quad D_{d4i} = \beta_i[2HK_{7i} + (H - D_y)K_{8i}]$$

で表され、式(34・a)、(35・b)、(36・a)より d_{0in}, d_{1in} は

$$d_{0in} = \frac{D_{2in}d_{2in}D_{1in}^* + D_{1in}D_{2in}^*}{D_{0in}D_{1in}^* + D_{1in}D_{0in}^*}, \quad d_{1in} = \frac{D_{0in}D_{2in}^* - D_{2in}d_{2in}D_{0in}^*}{D_{0in}D_{1in}^* + D_{1in}D_{0in}^*} \dots\dots\dots (36\cdot c)$$

$$D_{0in} = -K_{T1n}K_{G0n}G_{1in}, \quad D_{1in} = (2D_xK_{G0n} - D_{0in})G_{2in}, \quad D_{2in} = K_{T2n}G_{2in} + 2D_xG_{2in}K_{G0n}$$

$$D_{0in}^* = \gamma_n^3K_{T1n}, \quad D_{1in}^* = \gamma_n^3(K_{T1n} + 2HK_{G0n}), \quad D_{1in}^* = T\alpha_i^2(c_{1i} + c_{2i})$$

で表されるものと考えられる。

式(36・a)によって d_{2in} が求まれば、式(34・d)、(36・b)、(36・c)によって $d_{0in}, d_{1in}, d_{3i}, d_{4i}$ が求められ、式(32)によって w が明らかになる。

2・3・3 曲げ応力について 側板の x, y 方向の曲げ応力 $\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau_{bxy}$ は

$$\sigma_{bx} = -z \left(E'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E''_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (37\cdot a)$$

$$\sigma_{by} = -z \left(E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots (37 \cdot b)$$

$$\tau_{bxy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (37 \cdot c)$$

で表され⁽²³⁾、式(23・a)～(23・c)、(37・a)～(37・c)より

$$\sigma_{bx} = \frac{M_x T^3}{12} z, \quad \sigma_{by} = \frac{M_y T^3}{12} z, \quad \tau_{bxy} = \frac{M_{xy} T^3}{12} z \dots\dots\dots (38)$$

で表される。

そして、式(23・a)～(23・c)、(32)より M_x, M_y, M_{xy} は

$$M_x = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \left[\sum_{n=0,1,2,3,\dots} \gamma_n^3 \sin(\gamma_n y) [D_y [(d_{0in} G_{0in} + 2d_{2in} G_{2in}) f_{An}] + d_{2in} G_{2in} f_{8n}] \right. \\ \left. + D_1 [(d_{0in} G_{0in} f_{An} + d_{2in} G_{2in} f_{8n})] \right] + [\beta_i^3 \sin(\beta_i y) [D_y [d_{3i} f_{3i} + d_{4i} f_{4i}] + D_x [(d_{3i} + 2d_{4i}) f_{4i} + d_{4i} f_{4i}]]] \dots\dots\dots (39 \cdot a)$$

$$M_y = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \left[\sum_{n=0,1,2,3,\dots} \gamma_n^3 \sin(\gamma_n y) [D_y [d_{0in} G_{0in} f_{An} + d_{2in} G_{2in} f_{8n}] + D_1 [(d_{0in} G_{0in} + 2d_{2in} G_{2in}) f_{An} \right. \\ \left. + d_{2in} G_{2in} f_{8n}]] + \beta_i^3 \sin(\beta_i y) [D_y [(d_{3i} + 2d_{4i}) f_{3i} + d_{4i} f_{4i}] + D_y [d_{3i} f_{3i} + d_{4i} f_{4i}]] \right] \dots\dots\dots (39 \cdot b)$$

$$M_{xy} = -2D_{xy} \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \left[\sum_{n=0,1,2,3,\dots} \gamma_n^3 \sin(\gamma_n y) [(d_{0in} G_{0in} + d_{2in} G_{2in}) f_{cn}] + d_{2in} G_{2in} f_{Dn} \right] \\ + \beta_i^3 \sin(\beta_i y) [(d_{3i} + d_{4i}) f_{3i} + d_{4i} f_{4i}] \dots\dots\dots (39 \cdot c)$$

$$f_{cn} = \sinh \left[\gamma_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$f_{Dn} = \gamma_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \sinh \left[\gamma_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]$$

で表される。

式(32)によって w が明らかになれば、式(38)によって $\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau_{bxy}$ が明らかになる。

3. 結果および考察

応力値の算定においては、既知の係数値⁽¹⁷⁾ になり、 $E_x = 2.91 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$, $E_y = 1.53 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$ とし、 $\nu_{xy} = 0.10$ とした。また、前報⁽¹⁷⁾ にならい、 $T = 5.44 \text{ mm}$ (両面段ボール)、 $p_{y0} = 1.0 \times 10^{-2} \text{ N/mm}^2$ とした。

Fig. 3 Relations between w and position x

Fig. 4 Relations between stresses σ_x, σ_{bx} and position x

Fig. 5 Relations between stresses σ_y, σ_{by} and position x

Fig.6 Relations between stresses τ_{xy} , τ_{bxy} and position x

式(11・a), (11・b), (32)の級数は、有限値の無限級数であるが、式(14)～(16・c)また(38)～(39・c)の計算値が妥当な値を示すと思われる i_0 値を9にとり、 $i_0=9$ (19次)までのものに留めた。

式(32)より求めた $L=350$ mm, $h=300$ mmとした際の w (anis)と x との関係を図3に示す。また、 $E=E_x$, $\nu=\nu_{xy}$ とした等方性側板の際の w (iso)を求め、同時にその w を図3に示す。図3より、 w は、高さ、幅の中心線に沿って各極大、極小が生じ、 x, y 中心線に対称的に生じることが、上下辺では $w=0$ になり、 w の最大値は $y=0$ または h にあることがわかる。そして、 w の最小値は $x=0$ または L , $y=h/2$ にあることがわかり、異方性側板の w 値は等方性のものより大きく、2倍程度であることがわかる。このように、側辺では大きい w (外向き)が生じるのは隣側板の側辺に生じる式(9)の τ_{xy} によって生じるものと考えられる。

また、 σ_{bx} , σ_{by} , τ_{bxy} および σ_x , σ_y , τ_{xy} の値を式(15・a), (15・b), (37・a)～(37・c)より求め、式(37・a)～(37・c)によって等方性側板の $z=T/2$ の σ_{bx} , σ_{by} , τ_{bxy} の値を求めた。そして、 σ_x , $\sigma_y - p_{y0}$, τ_{xy} は等方性のものと同様の分布を示し、それらの値は等方性のものより2倍程度 (E_x/E_y) 大きいことがわかった。

所定の y におけるそれら σ_{bx} 値と x との関係を図4に示す。図4より、両 σ_{bx} は、高さ中心線に沿って極大が、幅中心線に沿って極小が生じることがわかり、 $|\sigma_{bx}|$ の最大値は、側辺中央に生じ、 σ_{bx} 最小位置と同じ位置にあり、最小値が上下辺に生じることがわかる。そして、異方性側板の $|\sigma_{bx}|$ 値は、等方性のものより大きく、2倍程度であることがわかる。

異方性側板および等方性側板の σ_{by} , σ_y と x との関係を示したものが図5である。図5より、 $y=h/2$ 付

近では両 σ_{by} は、高さ中心線に沿って極大、極小、極大が、 $y=h/4$ 付近では極小が生じ、幅中心線に沿って極大が生じることがわかり、 $x=L/32$ また $31L/32$, $y=h/2$ 付近で σ_{by} の最大が上下辺に最小値が生じることがわかる。そして、異方性側板の $|\sigma_{by}|$ 値は等方性のものとほぼ同値であることがわかる。なお、図4, 5より、 σ_{bx} , σ_{by} は幅、高さの中心線に対称的に生じることがわかる。

異方性側板および等方性側板の τ_{bxy} と x との関係を示したものが図6である。図6より、 x の増加に伴って上下辺付近では両 τ_{bxy} 値は大きな減少を示し、 y の増加に伴って側辺付近でも両 τ_{bxy} 値は大きな減少を示すことがわかり、 $y=h/4$ また $3h/4$ 付近では x の増加に伴って $|\tau_{bxy}|$ の増加、減少が生じ、その間に $|\tau_{bxy}|$ の極大が生じることが、その最大位置は $x=0$ また L , $y=0$ また h にあることがわかる。異方性側板の $|\tau_{bxy}|$ 値は、等方性のものより大きく、4/3倍程度であることがわかる。そして、 τ_{bxy} は幅、高さの中心線に対し反対称的に生じることがわかる。図4～6より、異方性側板と等方性側板の最大 $|\sigma_{bx}|$, $|\sigma_{by}|$, $|\tau_{bxy}|$ との比 $|\sigma_{bx}(\text{anis})|/|\sigma_{bx}(\text{iso})|$, $|\sigma_{by}(\text{anis})|/|\sigma_{by}(\text{iso})|$, $|\tau_{bxy}(\text{anis})|/|\tau_{bxy}(\text{iso})|$ は各2, 1, 4/3程度であることがわかり、異方性側板の $|\sigma_{bx}|$, $|\sigma_{by}|$, $|\tau_{bxy}|$ の最大値は $|\sigma_x|$, $|\sigma_y|$, $|\tau_{xy}|$ の最大値の各5, 4, 3倍程度であることがわかる。

そして、側板の τ_{xy} の反対性分布を考慮すると、たわみ変形の対称性が満たされ、側辺のたわみの連続性も満たされているものと考えられる。

本表示の結果は式(1)～(4), (26・a)～(26・c)の変形条件をすべて満たすように導出したものであり、得られた諸値は一応妥当なものと考えられる。

4. 結 言

一様圧縮変位を受ける段ボール箱形容器(正方形筒)の一基本的変形として容器側板(両面段ボール; 幅 $L=350$ mm, 高さ $h=300$ mm, 厚さ $T=5.44$ mm: 幅、高さ方向を x, y 軸、一隅を原点0)の上下辺に沿って一様圧縮荷重 p_{y0} ($=1.0 \times 10^{-2}$ N/mm²) を働かした際の弾性変形を議論し、そのたわみおよび曲げ応力の表示式を導出した。そして、本容器のたわみおよび曲げ応力の特性を議論した。ただし、側板の縦、横方向の縦弾性係数 E_x, E_y を 2.91×10^2 N/mm², 1.53×10^2 N/mm², ポアソン比 ν_{xy} を0.10とした。

得られた結果は、以下のようなものである。

(1) たわみ w は、高さ中心線に沿い板中央で極小となるように、幅中心線に沿い板中央で極大となる

ように生じる。 x, y 中心線に対し対称的に生じるが、上下辺では零になり、 w の最小値は上下辺にあり、最大値は側辺中央にある。異方性側板の w 値は等方性のものの2倍程度である。

(2) x 方向の曲げ垂直応力 σ_{bx} は、高さ中心線に沿って極大となるように、幅中心線に沿って極小となるように生じる。側板中央で $|\sigma_{bx}|$ の最大値が、上下辺に最小値が生じる。異方性側板の $|\sigma_{bx}|$ 値は等方性のものの2倍程度である。

(3) y 方向の曲げ垂直応力 σ_{by} は、上下辺から $y = h/2$ 付近では高さ中心線に沿って極大、極小、極大となるように、 $y = h/4$ 付近では極小が生じ、幅中心線に沿って極大となるように生じる。高さ中心線の側辺から x 方向 $L/32$ 位置に σ_{by} の最大値が、上下辺に最小値が生じる。異方性側板の $|\sigma_{by}|$ 値は等方性のものに等しい。

(4) 上下辺付近では x せん断応力 τ_{bxy} は x の増加に伴って大きく減少し、側辺では $|\tau_{bxy}|$ 値は y の増加に伴って大きな減少が生じる。上下辺から $h/4$ 付近では $|\tau_{bxy}|$ は x の増加に伴って増加、減少を示すように生じ、その間に $|\tau_{bxy}|$ の極大が生じる。その最大値は四隅にあり、等方性のものの4/3倍程度である。

(5) 側板の幅および高さの中心線に対し、 w, σ_x, σ_y は対称的に、 τ_{xy} は反対称的に生じる。 x, y 方向の圧縮垂直応力 $|\sigma_{bx}|, |\sigma_{by}|$ 、せん断応力 $|\tau_{bxy}|$ は、等方性のものと同様な分布を示すが、2倍程度大きい。

(6) $|\sigma_{bx}|, |\sigma_{by}|, |\tau_{bxy}|$ の最大値は圧縮変形の等方性の諸応力 $|\sigma_x|, |\sigma_y|, |\tau_{xy}|$ 最大値の5, 4, 3倍程度である。

以上のことより、本応力表示の容器側辺における諸応力は妥当なものと考えられ、一般圧縮を受ける段ボール箱形容器(正方形筒)の弾性応力表示は段ボール箱強度設計の算定に役立つものと考えられる。

文 献

- (1) 例えば、段ボール実用百科編集委員会編、段ボール実用百科、(1970)、21、一律書房。
- (2) レンゴー(株)編、段ボール技術、(1971)、16、包装新聞社。
- (3) 例えば、文献(1)の537ページ；文献(2)の310ページ。
- (4) Koning Jr., J. W. and Stern, R., *Tappi*, **60**-12 (1977), 128-131.
- (5) 例えば、文献(1)の548ページ；文献(2)の316ページ。
- (6) 例えば、紙業タイムス社編、新・紙加工便覧紙業、(1980)、797、タイムス社。
- (7) Maltenfort, G. G., *Tappi*, **53**-11 (1970), 1076-1079; Grartaganis, P., *Tappi*, **58**-11 (1975), 102-108; Morris Jr., R. M. and Vallow, G. P., *Tappi*, **58**-11 (1975), 110-113.
- (8) 川端洋一、日本包装学会誌、**6**-1 (1997), 19-23, 24-28.
- (9) 川端洋一、日本包装学会誌、**7**-2 (1998), 63-70.
- (10) 松島成夫・奥田隆宏・宮内治・野沢光治、紙パ技協誌、**36**-3 (1982), 377-387.
- (11) 松島成夫・矢野忠・松島晟・横田俊昭、紙パ技協誌、**45**-4 (1991), 480-486.
- (12) 松島理・松島成夫、機論、**60**-576, A (1994), 1814-1820.
- (13) 松島理・松島成夫、機論、**64**-618, A (1998), 415-421.
- (14) 松島理・松島成夫、機論、**66**-651, A (2000), 2015-2021.
- (15) Jones, A. R., *Tappi*, **51**-5 (1968), 203-209.
- (16) 石淵浩・木村稔・吉沢昭宣・佐久田博司・由谷豊、機論、**59**-557, A (1993), 156-162.
- (17) 松島成夫・矢野忠・松島理、紙パ技協誌、**54**-7 (2000), 986-995.
- (18) 松島理・松島成夫、包装学会誌、**9**-5 (2000), 301-310.
- (19) 松島理・松島成夫、紙パ技協誌、**56**-12 (2002), 1793-1801.
- (20) 松島理・松島成夫、機論、**69**-679, A (2003), 571-578.
- (21) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1956), 364-390, McGraw-Hill.
- (22) 例えば、Wright, P. G., McKinaly, P. R. and Shaw, E. Y. N. (原沢秀雄・増田次郎・大塚忠訳)、ユーザーのための段ボール箱ハンドブック、(1991)、7-12、ユニ出版；文献(1)の102-108ページ。
- (23) 例えば、倉西正嗣、応用弾性学、(1966)、73-80、共立出版。
- (24) 例えば、文献(23)の105-135ページ。
- (25) 例えば、Sommerfeld, A., *Partial Differential Equation in Physics*, (1949), 7, Academic Press.
- (26) 森口繁・宇田川銑久・一松信、数学公式 I, (1965), 216, 岩波全書。