き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張*

(第 3 報, 2 方向に配向したスリットき裂
を含む材料の巨視的弾性係数)南 亜 樹^{*1}, 荒 木 栄 敏^{*2}, 岩 本 正 治^{*3}Extension of Mori-Tanaka Theorem to Crack Problem
(3rd Report, Macroscopic Elastic Moduli of the Material
Containing Mutual Perpendicular Slit-Like Cracks)Aki MINAMI, Shigetoshi ARAKI^{*4} and Masaharu IWAMOTO^{*4} Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8585 Japan

A partial differential equation is derived for the macroscopic total strain of a material containing mutual perpendicular slit-like cracks with respect to the crack densities of the cracks by using the incremental form of the Mori-Tanaka theorem. By solving the partial differential equation, the macroscopic total strain, the average interaction stress and hence the macroscopic elastic moduli are formulated as a function of the crack densities of the cracks. On the contrary to the results obtained by the ordinary Mori-Tanaka theorem, the resulting macroscopic elastic moduli asymptotically tend to zero as the crack densities of the cracks increase. The present results are in good agreement with the analytical results by means of the differential scheme and the numerical results given by Huang et al. [*Int. J. Solids Struct.*, **33** (1996), 1575-1586] especially at relatively low crack density when the magnitudes of the crack densities of the mutual perpendicular slit-like cracks are equal to each other.

Key Words: Micromechanics, Mori-Tanaka Theorem, Differential Scheme, Macroscopic Total Strain, Elastic Moduli, Mutual Perpendicular Slit-like Cracks

1. 緒 言

き裂を多数含む場合に対して, Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾に基づいた Taya の手法⁽²⁾により得られる巨視的弾性係数は, き裂密度がある値を超えると負になるという物理的に矛盾した結果を含む。このため, Taya の手法は低濃度系のき裂問題には極めて有効であるが, 高濃度の場合には適用できない。この問題を解決するために, 著者らは相互作用応力の増分のみ Mori-Tanaka の定理を適用するという増分形 Mori-Tanaka 定理を提案し, これをスリットき裂⁽³⁾やペニー形き裂⁽⁴⁾あるいはだ円き裂⁽⁵⁾が一方向に配列する場合に適用して巨視的弾性係数を求めた。その結果, 得られた巨視的弾性係数は, き裂密度の増加につれて零に漸近するという妥当な傾向を示し, また, その値は Huang らの数値解析結果⁽⁶⁾や self-consistent 法の

結果⁽⁷⁾⁽⁸⁾とよく一致することがわかった。さらに, 得られた相互作用応力の解を通常の Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾と比較することで, き裂の物理的な体積含有率を定義することもできた。

これらの結果をふまえて, 本報では, き裂面が互いに垂直な方向に配向しているスリットき裂が多数存在する場合に対して増分形 Mori-Tanaka の定理を適用し, 相互作用応力や巨視的弾性係数を求めるとともに, 得られた値を Huang らの differential scheme による結果や数値解析結果⁽⁶⁾と比較することを目的とする。

2. き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張

2・1 解析モデル 図1に示すように, 均質等方な有限物体 D 内に互いに垂直なスリットき裂 Ω_1 と Ω_2 が多数存在する状態を考える。き裂 Ω_1 と Ω_2 の長さはいずれも $2a$ であり, それらの個数をそれぞれ N_1, N_2 とする。き裂の分布は D 内で完全にランダムであり, その個数が多いことからき裂と D の外境界およびき裂間には相互作用が存在するものとする。なお, この段階では D の形状は問わない。また, Ω_1 と Ω_2 のき裂面に垂直な方向にそれぞれ x_1, x_2 軸を取り, これらのき裂と D は x_3 方向に十分長いものとして平

* 原稿受付 2003 年 9 月 1 日。

^{*1} 正員, 防衛庁技術研究本部(〒229-0006 相模原市瀬野辺2-9-54)。^{*2} 正員, 京都工芸繊維大学工芸学部(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。^{*3} 正員, 京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科先端ファイブロ科学専攻。

E-mail: araki@mech.kit.ac.jp

面ひずみ状態を考える。さらに、物体 D の弾性係数を C_{ijkl} とおき、これに一樣な応力 σ_{ij}^0 が作用するときの Ω_1 と Ω_2 の等価固有ひずみをそれぞれ $\varepsilon_{ij}^{*1}, \varepsilon_{ij}^{*2}$ とおく。

2・2 巨視的全ひずみ D 内に生じる相互作用応力は位置によって異なるが、これを $\bar{\sigma}_{ij}$ と表す。このとき、き裂領域 $\Omega_n (n=1, 2)$ と母材領域 $D-\Omega_1-\Omega_2$ 内の応力-ひずみ関係は、

$$\Omega_n \text{ 内: } \sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{\infty n} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \bar{\varepsilon}_{kl} + \varepsilon_{kl}^n - \varepsilon_{kl}^{*n}) = 0 \quad \dots\dots\dots (1\cdot a)$$

$$D-\Omega_1-\Omega_2 \text{ 内: } \sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^M = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \bar{\varepsilon}_{kl} + \varepsilon_{kl}^M) \quad \dots\dots\dots (1\cdot b)$$

となる。ここで、 $\sigma_{ij}^{\infty n}$ は無限体中に Ω_n が 1 個存在する場合の固有応力、 σ_{ij}^M は母材内の固有応力である。 ε_{ij}^n は全ひずみであり、Eshelby の解⁽⁹⁾ より Ω_n 内で、

$$\varepsilon_{ij}^n = S_{ijkl}^n \varepsilon_{kl}^{*n} \quad (n=1, 2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで、 S_{ijkl}^n は Ω_n の形状に依存する Eshelby テンソル⁽⁹⁾ である。 ε_{ij}^M は、母材内の全ひずみである。また、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は $\bar{\sigma}_{ij}$ に対応する相互作用ひずみ、 ε_{ij}^0 は作用応力 σ_{ij}^0 による作用ひずみであり、それぞれ、

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}, \quad \sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

なる関係がある。式(1)~(3)より、 $\sigma_{ij}^{\infty n}$ は、 Ω_n 内で、

$$\sigma_{ij}^{\infty n} = C_{ijkl}(S_{klmn}^n \varepsilon_{mn}^{*n} - \varepsilon_{kl}^{*n}) \quad (n=1, 2) \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。この $\sigma_{ij}^{\infty n}$ と σ_{ij}^M 、 $\bar{\sigma}_{ij}$ は、内部応力の和の条件、

$$\int_{D-\Omega_1-\Omega_2} (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^M) dD + \sum_{n=1}^2 \int_{\Omega_n} (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^{\infty n}) dD = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

を満足しなければならない。

物体 D の巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は、

Fig. 1 Mutual perpendicular slit-like cracks in a finite body

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V_D} \left\{ \int_{D-\Omega_1-\Omega_2} (\varepsilon_{ij}^0 + \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}^M) dD + \sum_{n=1}^2 \int_{\Omega_n} (\varepsilon_{ij}^0 + \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}^n) dD \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で求められるため、式(6)に式(1)を代入し、式(5)を用いると、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{V_D} \left[\int_{D-\Omega_1-\Omega_2} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}^M) dD + \sum_{n=1}^2 \left\{ \int_{\Omega_n} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}^n - \varepsilon_{ij}^{*n}) dD + \int_{\Omega_n} \varepsilon_{ij}^{*n} dD \right\} \right] \\ &= \varepsilon_{ij}^0 + \frac{(C_{klij})^{-1}}{V_D} \left\{ \int_{D-\Omega_1-\Omega_2} (\bar{\sigma}_{kl} + \sigma_{kl}^M) dD + \sum_{n=1}^2 \int_{\Omega_n} (\bar{\sigma}_{kl} + \sigma_{kl}^{\infty n}) dD \right\} + \frac{1}{V_D} \sum_{n=1}^2 \int_{\Omega_n} \varepsilon_{ij}^{*n} dD \\ &= \varepsilon_{ij}^0 + \sum_{n=1}^2 \frac{1}{V_D} \int_{\Omega_n} \varepsilon_{ij}^{*n} dD \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。ここで V_D は物体 D の体積である。スリットき裂 Ω_1 と Ω_2 は、長半径 a の扁平な円柱ボイドの短半径 c が無限小となったものとして考えられることから、式(7)より、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \sum_{n=1}^2 \frac{N_n}{V_D} \pi a^2 \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{ij}^{*n} \right] \\ &= \varepsilon_{ij}^0 + \sum_{n=1}^2 \rho_n \varepsilon_{ij}^{\infty n} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\rho_n = \frac{N_n}{V_D} \pi a^2 \quad (n=1, 2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\varepsilon_{ij}^{\infty n} = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{ij}^{*n} \right] \quad (n=1, 2) \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。 $\varepsilon_{ij}^{\infty n}$ は、既報⁽³⁾ で定義したき裂開口ひずみであり、き裂 Ω_n の開口量をき裂長さで除したものである。また、 ρ_n はき裂密度であり、本研究では巨視的全ひずみに及ぼすき裂の含有量の影響を表すものとして定義⁽³⁾ した。

2・3 従来の Mori-Tanaka の定理による全ひずみの解 従来の Mori-Tanaka の定理に基づいた Taya の手法⁽²⁾ による全ひずみ解を導く。図 1 のモデルに対して、平均相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D$ は、

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = - \sum_{n=1}^2 \rho_n \langle \sigma_{ij}^{\infty n} \rangle_{\Omega_n} \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。ここで $\langle \rangle_D$ と $\langle \rangle_{\Omega_n}$ はそれぞれ D と Ω_n にわたる体積平均を表す。また、等価式は Ω_n 内で、

$$\sigma_{ij}^0 + \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D + \sigma_{ij}^{\infty n} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。

今、作用応力 $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0$ のみが作用する場合を考える。このとき、固有ひずみ ε_{33}^{*1} と ε_{33}^{*2} は平面ひずみ条件より零となる。式(4)に円柱ボイドの Eshelby テンソル⁽⁹⁾ を代入すると、 $\sigma_{ij}^{\infty 1}$ と $\sigma_{ij}^{\infty 2}$ は、それぞれ、

$$\sigma_{11}^{\infty 1} = -\frac{\mu}{1-\nu} \frac{c}{(a+c)^2} \{(a+2c)\varepsilon_{11}^{*1} + a\varepsilon_{22}^{*1}\} \quad \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$\sigma_{22}^{\infty 1} = -\frac{\mu}{1-\nu} \frac{a}{(a+c)^2} \{c\varepsilon_{11}^{*1} + (2a+c)\varepsilon_{22}^{*1}\} \quad \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

$$\sigma_{11}^{\infty 2} = -\frac{\mu}{1-\nu} \frac{a}{(a+c)^2} \{(2a+c)\varepsilon_{11}^{*2} + c\varepsilon_{22}^{*2}\} \quad \dots\dots\dots (13\cdot c)$$

$$\sigma_{22}^{\infty 2} = -\frac{\mu}{1-\nu} \frac{c}{(a+c)^2} \{a\varepsilon_{11}^{*2} + (a+2c)\varepsilon_{22}^{*2}\} \quad \dots\dots\dots (13\cdot d)$$

となる。ここで μ と ν は母材の剛性率とポアソン比である。式(13)より、 ε_{ij}^{*1} と ε_{ij}^{*2} は、

$$\varepsilon_{11}^{*1} = -\frac{1-\nu}{2\mu} \frac{(2a+c)\sigma_{11}^{\infty 1} - c\sigma_{22}^{\infty 1}}{c} \quad \dots\dots\dots (14\cdot a)$$

$$\varepsilon_{22}^{*1} = -\frac{1-\nu}{2\mu} \frac{-a\sigma_{11}^{\infty 1} + (a+2c)\sigma_{22}^{\infty 1}}{a} \quad \dots\dots\dots (14\cdot b)$$

$$\varepsilon_{11}^{*2} = -\frac{1-\nu}{2\mu} \frac{(a+2c)\sigma_{11}^{\infty 2} - a\sigma_{22}^{\infty 2}}{a} \quad \dots\dots\dots (14\cdot c)$$

$$\varepsilon_{22}^{*2} = -\frac{1-\nu}{2\mu} \frac{-c\sigma_{11}^{\infty 2} + (2a+c)\sigma_{22}^{\infty 2}}{c} \quad \dots\dots\dots (14\cdot d)$$

となる。これらを式(10)に代入すると、き裂開口ひずみ ε_{ij}^{c1} と ε_{ij}^{c2} は、

$$\varepsilon_{11}^{c1} = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{11}^{*1} \right] = -\frac{1-\nu}{\mu} \sigma_{11}^{\infty 1} \quad \dots\dots\dots (15\cdot a)$$

$$\varepsilon_{22}^{c1} = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{22}^{*1} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (15\cdot b)$$

$$\varepsilon_{11}^{c2} = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{11}^{*2} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (15\cdot c)$$

$$\varepsilon_{22}^{c2} = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{c}{a} \varepsilon_{22}^{*2} \right] = -\frac{1-\nu}{\mu} \sigma_{22}^{\infty 2} \quad \dots\dots\dots (15\cdot d)$$

となる。また、式(13)において $c \rightarrow 0$ の極限を取り、式(15)を代入すると、 $\sigma_{ij}^{\infty 1}$ と $\sigma_{ij}^{\infty 2}$ は、

$$\sigma_{11}^{\infty 1} = -\frac{\mu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^{c1} \quad \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

$$\sigma_{22}^{\infty 1} = -\frac{\mu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^{c1} - \frac{2\mu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^{*1} \quad \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

$$\sigma_{11}^{\infty 2} = -\frac{2\mu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^{*2} - \frac{\mu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^{c2} \quad \dots\dots\dots (16\cdot c)$$

$$\sigma_{22}^{\infty 2} = -\frac{\mu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^{c2} \quad \dots\dots\dots (16\cdot d)$$

となる。式(12)に式(11)と式(16)を代入すると、等価固有ひずみとき裂開口ひずみは、それぞれ、

$$\varepsilon_{22}^{*1} = -\frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \quad \dots\dots\dots (17\cdot a)$$

$$\varepsilon_{11}^{*2} = -\frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \quad \dots\dots\dots (17\cdot b)$$

$$\varepsilon_{11}^{c1} = \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\sigma_{11}^0}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \quad \dots\dots\dots (18\cdot a)$$

$$\varepsilon_{22}^{c2} = \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\sigma_{22}^0}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \quad \dots\dots\dots (18\cdot b)$$

となる。式(18)を式(8)に代入することにより、巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は次式となる。

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\rho_1 \sigma_{11}^0}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \quad \dots\dots\dots (19\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22}^0 + \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\rho_2 \sigma_{22}^0}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \quad \dots\dots\dots (19\cdot b)$$

平均相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D$ は、式(11)に式(16)～(18)を代入することにより、

$$\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \sigma_{11}^0 \quad \dots\dots\dots (20\cdot a)$$

$$\langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1-(\rho_1 + \rho_2)} \sigma_{22}^0 \quad \dots\dots\dots (20\cdot b)$$

となる。式(20)より、Taya の手法による平均相互作用応力は、き裂密度の和 $\rho_1 + \rho_2$ の関数と作用応力との積となることがわかる。

2.4 Mori-Tanaka の定理の拡張 既報⁽³⁾で提案した方法に従って、一様な引張応力が作用する場合と、せん断応力が作用する場合の巨視的全ひずみを求める。

2.4.1 一様な引張応力が作用する場合 2.3節と同様に図1に示す物体Dに一様な引張応力 σ_{11}^0 と σ_{22}^0 が作用する場合を考える。巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は、式(15)を式(8)に代入して、

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}^0 - \rho_1 \frac{1-\nu}{\mu} \sigma_{11}^{\infty 1} \quad \dots\dots\dots (21\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22}^0 - \rho_2 \frac{1-\nu}{\mu} \sigma_{22}^{\infty 2} \quad \dots\dots\dots (21\cdot b)$$

となる。式(12)を式(21)に代入すると、巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}(\rho_1, \rho_2)$ は、

$$\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{11}^0 + \rho_1 \frac{1-\nu}{\mu} (\sigma_{11}^0 + \langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D) \quad \dots\dots\dots (22\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{22}^0 + \rho_2 \frac{1-\nu}{\mu} (\sigma_{22}^0 + \langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D) \quad \dots\dots\dots (22\cdot b)$$

となる。

次に、図1の母材領域 $D - \Omega_1 - \Omega_2$ に、スリットき裂 Ω_1 のみを n_1 個加える。 n_1 は N_1 や N_2 に比べて非常に小さく、また、新しく加えたき裂の位置は $D - \Omega_1 - \Omega_2$ 内で完全にランダムとする。き裂密度の増加を $\delta\rho_1$ とすると、式(9)より、

$$\delta\rho_1 = \frac{n_1}{V_D} \pi a^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。この追加により平均相互作用応力は $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D$ に変化するものとし、その変化量を $\delta\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D$ とおくと、

$$\langle \bar{\sigma}'_{ij} \rangle_D = \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D + \delta\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。Taya の手法⁽²⁾を相互作用応力の増分に適用

する。新しく加えたき裂が Ω_1 のみであることから、式(11)を参照して、

$$\delta\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle_D = -\delta\rho_1\sigma_{ij}^{01'} \quad (25)$$

となる。ここで $\sigma_{ij}^{01'}$ は相互作用応力の変化によって変化した Ω_1 の固有応力である。 Ω_2 の固有応力も同様に $\sigma_{ij}^{02'}$ に変化したとすると、 Ω_n 内の等価式は、

$$\Omega_n \text{ 内: } \sigma_{ij}^0 + \langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle_D + \sigma_{ij}^{0n'} = 0 \quad (26)$$

となる。き裂 Ω_1 を追加した後の巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}(\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2)$ は、式(21)より、

$$\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{11}^0 - (\rho_1 + \delta\rho_1) \frac{1-\nu}{\mu} \sigma_{11}^{01'} \quad (27\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{22}^0 - \rho_2 \frac{1-\nu}{\mu} \sigma_{22}^{02'} \quad (27\cdot b)$$

となる。式(26)に式(24)と式(25)を代入して $\sigma_{ij}^{0n'}$ を求め、これをさらに式(27)に代入すると、

$$\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{11}^0 + \frac{\rho_1 + \delta\rho_1}{1 - \delta\rho_1} \frac{1-\nu}{\mu} \times (\sigma_{11}^0 + \langle\bar{\sigma}_{11}\rangle_D) \quad (28\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{22}^0 + \frac{\rho_2}{1 - \delta\rho_1} \frac{1-\nu}{\mu} \times (\sigma_{22}^0 + \langle\bar{\sigma}_{22}\rangle_D) \quad (28\cdot b)$$

となる。式(22)と式(28)より $\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle_D$ を消去すると、

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2) - \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)}{\delta\rho_1} = \frac{1 + \rho_1}{\rho_1(1 - \delta\rho_1)} \{ \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2) - \varepsilon_{11}^0 \} \quad (29\cdot a)$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2) - \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2)}{\delta\rho_1} = \frac{1}{1 - \delta\rho_1} \{ \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2) - \varepsilon_{22}^0 \} \quad (29\cdot b)$$

となる。式(29)において $\delta\rho_1 \rightarrow 0$ の極限を取ると、巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}(\rho_1, \rho_2)$ のき裂密度 ρ_1 に関する微分、

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} = \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \{ \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2) - \varepsilon_{11}^0 \} \quad (30\cdot a)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} = \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2) - \varepsilon_{22}^0 \quad (30\cdot b)$$

が得られる。

ρ_2 に対する全ひずみの微分方程式を求めるために、前とは逆に母材領域 $D - \Omega_1 - \Omega_2$ に Ω_2 を n_2 個加える。 n_2 は N_1 や N_2 に比べて非常に小さく、新しく加えたき裂の位置は母材内で完全にランダムとする。き裂密度の増加を $\delta\rho_2$ とすると、式(9)より、

$$\delta\rho_2 = \frac{n_2}{V_D} \pi a^2 \quad (31)$$

となる。以降の解析は、形式的に式(24)~(30)において添字 1 と 2 を入換えたものとなるため、巨視的全ひ

ずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}(\rho_1, \rho_2)$ のき裂密度 ρ_2 に関する微分は、

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} = \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2) - \varepsilon_{11}^0 \quad (32\cdot a)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} = \frac{1 + \rho_2}{\rho_2} \{ \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2) - \varepsilon_{22}^0 \} \quad (32\cdot b)$$

となる。

式(30)と式(32)より、 $\bar{\varepsilon}_{ij}(\rho_1, \rho_2)$ のき裂密度 ρ_1 と ρ_2 に関する偏微分方程式、

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} = \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} \quad (33\cdot a)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} = \frac{1 + \rho_2}{\rho_2} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \quad (33\cdot b)$$

が得られる。まず、式(33・a)を変数分離法を用いて解く。式(33・a)の解を、

$$\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2) = A + u(\rho_1)v(\rho_2) \quad (34)$$

とおく。ここで、 A は定数、 $u(\rho_1)$ と $v(\rho_2)$ はそれぞれ ρ_1 と ρ_2 のみの関数である。式(34)を ρ_1 と ρ_2 で微分すると、

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} = \frac{du(\rho_1)}{d\rho_1} v(\rho_2) \quad (35\cdot a)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} = u(\rho_1) \frac{dv(\rho_2)}{d\rho_2} \quad (35\cdot b)$$

となる。式(35)を式(33・a)に代入して整理すると、

$$\frac{\frac{du(\rho_1)}{d\rho_1}}{1 + \rho_1} u(\rho_1) = \frac{\frac{dv(\rho_2)}{d\rho_2}}{v(\rho_2)} \quad (36)$$

となる。式(36)の左辺は ρ_1 のみの関数を、右辺は ρ_2 のみの関数を含むことから、両辺の値は定数となり、これを k とおく。このとき、 $u(\rho_1)$ と $v(\rho_2)$ に対する二つの常微分方程式、

$$\frac{du(\rho_1)}{d\rho_1} = k \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} u(\rho_1) \quad (37\cdot a)$$

$$\frac{dv(\rho_2)}{d\rho_2} = kv(\rho_2) \quad (37\cdot b)$$

が得られる。式(37)を解くと、 $u(\rho_1)$ と $v(\rho_2)$ は、

$$u(\rho_1) = C_1 \rho_1^k e^{k\rho_1} \quad (38\cdot a)$$

$$v(\rho_2) = C_2 e^{k\rho_2} \quad (38\cdot b)$$

となる。ここで C_1 と C_2 は積分定数である。式(38)を式(34)に代入すると、 $\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)$ は、

$$\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2) = A + C \rho_1^k e^{k(\rho_1 + \rho_2)} \quad (39)$$

となる。ここで $C = C_1 \cdot C_2$ である。式(39)の定数 k 、 A 、 C を決定する。まず、 k について考える。式(39)より、 $k=0$ のとき $\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)$ は常に定数となり、 $k < 0$ のとき $\rho_1=0$ において $\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)$ は発散する。したがって、 $k > 0$ でなければならない。巨視的全ひずみの初期条件は、

$$\bar{\varepsilon}_{11}(0, 0) = \varepsilon_{11}^0 \quad (40)$$

であるため、式(39)にこれを代入すると、

$$A = \varepsilon_{11}^0 \dots\dots\dots (41)$$

となる。また、相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D$ の初期条件は、 $\rho_1 = \rho_2 = 0$ のとき $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D = 0$ である。式(22・a)に式(39)と式(41)を代入すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D = -\frac{\mu}{1-\nu} C \rho_1^{k-1} e^{k(\rho_1+\rho_2)} - \sigma_{11}^0 \dots\dots\dots (42)$$

となる。式(42)より、 $0 < k < 1$ のとき、 $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D$ は $\rho_1 = 0$ で発散する。また、 $k > 1$ のとき、式(42)に $\rho_1 = \rho_2 = 0$ を代入すると、 C の値にかかわらず $\langle \sigma_{11} \rangle_D = -\sigma_{11}^0$ となり、初期条件を満足しない。したがって、 $k=1$ でなければならない。これと $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D$ の初期条件を式(42)に代入すると、積分定数 C は、

$$C = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sigma_{11}^0 \dots\dots\dots (43)$$

となる。 $k=1$ と式(41)、(43)を式(39)に代入すると、巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)$ は、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2) &= \varepsilon_{11}^0 + \frac{1-\nu}{\mu} \sigma_{11}^0 \rho_1 e^{\rho_1+\rho_2} \\ &= \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)\sigma_{11}^0 \{1+2\rho_1 e^{\rho_1+\rho_2}\} - \nu\sigma_{22}^0] \dots\dots (44) \end{aligned}$$

となる。また、式(42)に $k=1$ と式(43)を代入すると、 $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D$ は次式となる。

$$\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D = (e^{\rho_1+\rho_2} - 1) \sigma_{11}^0 \dots\dots\dots (45)$$

次に、同様に式(33・b)を解く。式(33・b)は、式(33・a)の添字1と2を入換えたものであり、また、 $\rho_1 = \rho_2 = 0$ のとき、 $\bar{\varepsilon}_{22}(0, 0) = \varepsilon_{22}^0$ および $\langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D = 0$ という初期条件についても $\bar{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_2)$ と $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D$ の初期条件の添字1と2を入換えたものとなる。したがって、式(44)と式(45)の添字1と2を入換えることにより、

$$\bar{\varepsilon}_{22}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)\sigma_{22}^0 \{1+2\rho_2 e^{\rho_1+\rho_2}\} - \nu\sigma_{11}^0] \dots\dots\dots (46)$$

$$\langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D = (e^{\rho_1+\rho_2} - 1) \sigma_{22}^0 \dots\dots\dots (47)$$

となる。

式(44)～(47)は互いに垂直な2種類のスリットき裂が存在する場合に対する解であるが、これを用いて二つの特別な場合に対する解を求めることにする。

(1) 1方向に配列するスリットき裂

式(46)と式(47)に $\rho_1 = 0$ と $\sigma_{11}^0 = 0$ を代入するとともに、式(47)にはさらに等価式(12)を代入すると、

$$\bar{\varepsilon}_{22}(0, \rho_2) = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{22}^0 (1+2\rho_2 e^{\rho_2}) \dots\dots\dots (48)$$

$$\langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D = -(1-e^{-\rho_2}) \sigma_{22}^0 \dots\dots\dots (49 \cdot a)$$

となる。これは、D内に Ω_2 のみが存在し、 σ_{22}^0 のみが作用する場合の解であり、既報⁽³⁾の結果と完全に一致する。さらに、既報⁽³⁾では求められなかったき裂面に平行な方向の相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D$ は、式(45)に $\rho_1 = 0$

と等価式(12)を代入すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D = -(1-e^{-\rho_2}) \sigma_{11}^0 \dots\dots\dots (49 \cdot b)$$

となることがわかった。

(2) x_1 - x_2 面内で配向がランダムなスリットき裂

スリットき裂の配向が x_1 - x_2 面内で完全にランダムな場合、すなわち、き裂面の法線と x_2 (あるいは x_1) 軸のなす角度に関する確率密度分布が一様である場合には、角度の絶対値が同じで符号のみが異なる二つのき裂が同数存在することになる。これら一組のき裂の開口による物体Dの巨視的全ひずみは、 x_2 (あるいは x_1) 軸に対して非対称な成分が互いに相殺され、結果的に対称な成分のみとなる。また、角度の小さいき裂が全ひずみに及ぼす影響は x_2 方向では小さく、 x_1 方向では大きくなる。角度が大きい場合にはこの逆となる。しかしながら、あらゆる角度のき裂がすべて同じ確率で存在するため、結果的に x_1 方向と x_2 方向の巨視的全ひずみは等しくなる。この巨視的全ひずみに及ぼすき裂の影響は、式(9)で示したき裂密度で表されるため、 x_1 - x_2 面内で完全にランダムに配向するスリットき裂を含む場合については、式(44)あるいは式(46)において、

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{\rho}{2} \dots\dots\dots (50)$$

とおけばよいことになる。また、相互作用応力についても同様に、式(45)あるいは式(47)に式(50)を代入すればよい。

さらに、式(12)より Ω_1 と Ω_2 内の等価式の和を取ると、

$$2(\sigma_{ij}^0 + \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D) + \sigma_{ij}^{\infty 1} + \sigma_{ij}^{\infty 2} = 0 \dots\dots\dots (51)$$

となるため、これを式(45)と式(47)に代入し、式(50)を用いると、

$$\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_D = -\frac{1}{2} (1-e^{-\rho}) (\sigma_{11}^{\infty 1} + \sigma_{11}^{\infty 2}) \dots\dots\dots (52 \cdot a)$$

$$\langle \bar{\sigma}_{22} \rangle_D = -\frac{1}{2} (1-e^{-\rho}) (\sigma_{22}^{\infty 1} + \sigma_{22}^{\infty 2}) \dots\dots\dots (52 \cdot b)$$

となる。同じ含有率 $f/2$ を有する2種類の介在物が共存する場合に対する Mori-Tanaka の定理の結果は、

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle_D = -\frac{f}{2} (\sigma_{ij}^{\infty 1} + \sigma_{ij}^{\infty 2}) \dots\dots\dots (53)$$

であるため、式(52)と式(53)を比較すると、スリットき裂がランダムに配向する場合のき裂の体積含有率は $(1-e^{-\rho})$ となることがわかった。著者らのこれまでの解析⁽³⁾⁽⁴⁾により、スリットき裂、ペニー形き裂およびだ円き裂が1方向に配列する場合のき裂の体積含有率は $(1-e^{-\rho})$ となることがわかっている。したがって、これらの結果より、1方向ではなく2方向あるいはランダムに配向する場合においても、同じ形となる

ことが明らかになった。この含有率 $(1-e^{-\rho})$ を用いることで、前報⁽⁴⁾でも述べたようにこれらのき裂を含む問題は通常の Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾を用いて解くことができる。

2・4・2 一様なせん断応力が作用する場合 図1の物体Dに一様なせん断応力 $\sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0$ が作用する場合を考える。このとき、考えるべきき裂の等価固有ひずみは $\varepsilon_{12}^{*1} = \varepsilon_{21}^{*1}$ と $\varepsilon_{12}^{*2} = \varepsilon_{21}^{*2}$ である。 Ω_n 内の等価式は、式(12)より、平均的に、

$$\Omega_n \text{ 内: } \sigma_{12}^0 + \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D + \sigma_{12}^{*n} = 0 \quad \dots\dots\dots (54)$$

となる。式(4)に Ω_n の Eshelby テンソル⁽⁹⁾ を代入し、式(10)のき裂開口ひずみを用いると、

$$\sigma_{12}^{*n} = \lim_{c \rightarrow 0} \left[-\frac{2\mu}{1-\nu} \frac{ac}{(a+c)^2} \varepsilon_{12}^{*n} \right] = -\frac{2\mu}{1-\nu} \varepsilon_{12}^{*n} \quad \dots\dots\dots (55)$$

となる。式(55)を式(8)に代入することにより、巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1, \rho_2)$ は、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{12}^0 - \frac{1-\nu}{2\mu} (\rho_1 \sigma_{12}^{*1} + \rho_2 \sigma_{12}^{*2}) \quad \dots\dots\dots (56)$$

となる。式(56)に式(54)を代入すると、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{12}^0 + \frac{1-\nu}{2\mu} (\rho_1 + \rho_2) (\sigma_{12}^0 + \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D) \quad \dots\dots\dots (57)$$

となる。これより、せん断応力が作用する場合、 $\bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1, \rho_2)$ は、 $\rho_1 + \rho_2$ の関数となることがわかる。このため、母材領域に n_1 個のスリットき裂 Ω_1 と n_2 個のスリットき裂 Ω_2 を同時に加えることにする。 n_1 と n_2 は N_1 と N_2 に比べて非常に小さく、新しく加えたき裂の位置は母材内で完全にランダムとする。この追加により平均相互作用応力は $\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D$ に変化するものとし、その変化量を $\delta \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D$ とおくと、

$$\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D = \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D + \delta \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D \quad \dots\dots\dots (58)$$

となる。 $\delta \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D$ は、両方のき裂を同時に加えたことから、式(31)とは異なり、

$$\delta \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D = -\delta \rho_1 \sigma_{12}^{*1'} - \delta \rho_2 \sigma_{12}^{*2'} \quad \dots\dots\dots (59)$$

となる。 $\sigma_{12}^{*1'}$ と $\sigma_{12}^{*2'}$ は、変化後の固有応力である。 Ω_n 内の等価式は、式(54)と同様に、

$$\Omega_n \text{ 内: } \sigma_{12}^0 + \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D + \sigma_{12}^{*n'} = 0 \quad \dots\dots\dots (60)$$

となる。巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1 + \delta \rho_1, \rho_2 + \delta \rho_2)$ は、式(56)より、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1 + \delta \rho_1, \rho_2 + \delta \rho_2) \\ = \varepsilon_{12}^0 - \frac{1-\nu}{2\mu} \{ (\rho_1 + \delta \rho_1) \sigma_{12}^{*1'} + (\rho_2 + \delta \rho_2) \sigma_{12}^{*2'} \} \quad \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

となる。式(60)に式(58)と式(59)を代入して $\sigma_{12}^{*1'}$ と $\sigma_{12}^{*2'}$ を求め、これらを式(61)に代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1 + \delta \rho_1, \rho_2 + \delta \rho_2) \\ = \varepsilon_{12}^0 + \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\rho_1 + \rho_2 + (\delta \rho_1 + \delta \rho_2)}{1 - (\delta \rho_1 + \delta \rho_2)} (\sigma_{12}^0 + \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D) \\ = \varepsilon_{12}^0 + \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\rho_1 + \rho_2 + \delta(\rho_1 + \rho_2)}{1 - \delta(\rho_1 + \rho_2)} (\sigma_{12}^0 + \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D) \quad \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

となる。表記を簡単にするため、き裂密度の和 $\rho_1 + \rho_2$ を ρ とおき、式(57)と式(62)の巨視的全ひずみを $\bar{\varepsilon}_{12}(\rho)$ と $\bar{\varepsilon}_{12}(\rho + \delta \rho)$ と表記する、すなわち、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho) = \varepsilon_{12}^0 + \frac{1-\nu}{2\mu} \rho (\sigma_{12}^0 + \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D) \quad \dots\dots\dots (63)$$

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho + \delta \rho) = \varepsilon_{12}^0 + \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\rho + \delta \rho}{1 - \delta \rho} (\sigma_{12}^0 + \langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D) \quad \dots\dots\dots (64)$$

と表す。式(63)と式(64)より $\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D$ を消去すると、

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{12}(\rho + \delta \rho) - \bar{\varepsilon}_{12}(\rho)}{\delta \rho} = \frac{1+\rho}{\rho(1-\delta \rho)} \{ \bar{\varepsilon}_{12}(\rho) - \varepsilon_{12}^0 \} \quad \dots\dots\dots (65)$$

となる。式(65)で $\delta \rho \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_{12}(\rho)}{d\rho} = \frac{1+\rho}{\rho} \{ \bar{\varepsilon}_{12}(\rho) - \varepsilon_{12}^0 \} \quad \dots\dots\dots (66)$$

が得られる。

式(66)を解くと、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho) = \varepsilon_{12}^0 + C \rho e^{\rho} \quad \dots\dots\dots (67)$$

となる。ここで C は積分定数である。初期条件は、 $\rho_1 = \rho_2 = 0$ 、すなわち $\rho = 0$ のとき $\bar{\varepsilon}_{12}(0) = \varepsilon_{12}^0$ であり、式(67)はこれを自動的に満足している。式(57)に式(67)を代入すると、平均相互作用応力 $\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D$ は、

$$\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D = \frac{2\mu}{1-\nu} C e^{\rho} - \sigma_{12}^0 \quad \dots\dots\dots (68)$$

となる。 $\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D$ の初期条件は、 $\rho = 0$ のとき $\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D = 0$ であるため、積分定数 C は、

$$C = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{12}^0 \quad \dots\dots\dots (69)$$

となる。式(69)を式(67)に代入し、 ρ の表記を元に戻すと、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho) = \frac{\sigma_{12}^0}{2\mu} \{ 1 + (1-\nu)(\rho_1 + \rho_2) e^{\rho_1 + \rho_2} \} \quad \dots\dots\dots (70)$$

となる。また、式(69)を式(68)に代入すると、

$$\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D = (e^{\rho_1 + \rho_2} - 1) \sigma_{12}^0 \quad \dots\dots\dots (71)$$

となる。

式(70)と式(71)は互いに垂直な2種類のスリットき裂が存在する場合に対する解であるが、これを用いて二つの特別な場合に対する解を求める。

(i) 一方向に配列するスリットき裂

式(70)と式(71)に $\rho_1 = 0$ を代入するとともに、式(71)にはさらに等価式(12)を代入すると、D内に Ω_2

のみが存在するときの解が得られ、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(0, \rho_2) = \frac{\sigma_{12}^0}{2\mu} \{1 + (1-\nu)\rho_2 e^{\rho_2}\} \quad \dots\dots\dots (72)$$

$$\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D = -(1 - e^{-\rho_2}) \sigma_{12}^{02} \quad \dots\dots\dots (73)$$

となる。これについても、既報⁽³⁾の結果と一致する。

(ii) x_1 - x_2 面内で配向がランダムなスリットき裂さらに、式(50)を式(70)に代入すると、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho) = \frac{\sigma_{12}^0}{2\mu} \{1 + (1-\nu)\rho e^\rho\} \quad \dots\dots\dots (74)$$

となる。また、 $2 \cdot 4 \cdot 1$ 項と同様に、等価式の和の式(51)を式(71)に代入し、式(50)を用いると、

$$\langle \bar{\sigma}_{12} \rangle_D = -\frac{1}{2}(1 - e^{-\rho})(\sigma_{12}^{01} + \sigma_{12}^{02}) \quad \dots\dots\dots (75)$$

となる。式(75)と Mori-Tanaka の定理による式(53)を比較すると、せん断応力が作用する場合についても、ランダム配向するスリットき裂の含有率は $(1 - e^{-\rho})$ であることがわかる。

2.5 巨視的弾性係数 静水圧応力が作用する場合の巨視的全ひずみの静水圧成分 $\bar{\varepsilon}_{kk}(\rho_1, \rho_2)$ は、式(44)と式(46)より、

$$\bar{\varepsilon}_{kk}(\rho_1, \rho_2) = \frac{\sigma_{kk}^0}{3K} \left\{ 1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\rho_1 + \rho_2) e^{\rho_1 + \rho_2} \right\} \quad \dots\dots\dots (76)$$

となる。ここで K は母材の体積弾性係数である。式(76)は、図1に示した x_1 - x_2 面内において、 Ω_1 と Ω_2 の個数が異なる場合の結果であり、このとき図1に示した物体Dは x_1 - x_2 面内においても異方性となる。今、物体Dの巨視的体積弾性係数 $\bar{K}$ を、等方性材料と同様にして、

$$\bar{\varepsilon}_{kk}(\rho_1, \rho_2) = \frac{\sigma_{kk}^0}{3\bar{K}} \quad \dots\dots\dots (77)$$

と定義する。このとき、式(76)を式(77)に代入すると、

$$\frac{\bar{K}}{K} = \frac{1}{1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\rho_1 + \rho_2) e^{\rho_1 + \rho_2}} \quad \dots\dots\dots (78)$$

となる。次に、 x_1 - x_2 面内の巨視的剛性率を、

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\rho_1, \rho_2) = \frac{\sigma_{12}^0}{2\bar{\mu}_{12}} \quad \dots\dots\dots (79)$$

と定める。式(79)に式(70)を代入すると、

$$\frac{\bar{\mu}_{12}}{\mu} = \frac{1}{1 + (1-\nu)(\rho_1 + \rho_2) e^{\rho_1 + \rho_2}} \quad \dots\dots\dots (80)$$

となる。

さらに、式(50)を式(78)と式(80)に代入することにより、ランダム配向するスリットき裂に対して、

$$\frac{\bar{K}}{K} = \frac{1}{1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \rho e^\rho} \quad \dots\dots\dots (81 \cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{12}}{\mu} = \frac{1}{1 + (1-\nu)\rho e^\rho} \quad \dots\dots\dots (81 \cdot b)$$

を得る。

3. 解析結果および考察

まず最初に、比較のためき裂の希薄分布、Taya の手法、self-consistent 法、differential scheme の結果を以下に示した後、本解析結果と比較する。

3.1 希薄分布と Taya の手法による巨視的弾性係数 ランダム配向するき裂の希薄分布に対する $\bar{K}_{\text{dilute}}$ は、式(50)のき裂密度を用いると、

$$\frac{\bar{K}_{\text{dilute}}}{K} = \frac{1}{1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \rho} \quad \dots\dots\dots (82)$$

となる⁽¹⁰⁾。また、Taya の手法により求められた巨視的全ひずみ式(19)に、式(50)と $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{kk}^0 / (2(1 + \nu))$ を代入すると、

$$\bar{\varepsilon}_{kk} = \frac{\sigma_{kk}^0}{3K} \left\{ 1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\rho}{1-\rho} \right\} \quad \dots\dots\dots (83)$$

となり、これを式(77)に代入すると、

$$\frac{\bar{K}_{\text{Taya}}}{K} = \frac{1}{1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\rho}{1-\rho}} \quad \dots\dots\dots (84)$$

となる。

3.2 self-consistent 法と differential scheme の解 self-consistent 法により求められたランダム配向するスリットき裂の巨視的弾性係数は、

$$\frac{\bar{K}_{\text{sc}}}{K} = \frac{1}{1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\rho}{1-\rho}} \quad \dots\dots\dots (85 \cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{\text{sc}}}{\mu} = \frac{1-\rho}{1-\nu\rho} \quad \dots\dots\dots (85 \cdot b)$$

となる⁽⁶⁾。式(85・a)と Taya の手法による結果(84)は一致していることがわかる。式(85)より、self-consistent 法による結果は、 $\rho > 1$ において $\bar{K}_{\text{sc}}$ 、 $\bar{\mu}_{\text{sc}}$ とともに負になるという物理的な矛盾を含んでいることがわかる。

この矛盾は differential scheme により解決されている⁽¹¹⁾。self-consistent 法は、着目するき裂の周りを未知の弾性係数でばかして均質化するという方法である。これに対して、differential scheme は微量のき裂を加えた状態に対して均質化するという作業を繰返すものであり、いわば self-consistent 法の増分形である。differential scheme の解は、self-consistent 法と同様に一般的に陽な形では得られず、支配微分方程式のみが求められ、この支配微分方程式を数値計算するという手順を踏むことになる。しかしながら、ランダム配向するスリットき裂の場合に対しては陽な解が

得られ, Huang ら⁽⁶⁾によれば次式となる.

$$\frac{\bar{K}_{ds}}{K} = \frac{1-2\nu}{e^{\rho}(1-\nu)-\nu} \quad \dots\dots\dots (86\cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{ds}}{\mu} = \frac{1}{e^{\rho}(1-\nu)+\nu} \quad \dots\dots\dots (86\cdot b)$$

3.3 解析結果 ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合について $\bar{K}$ とき裂密度 ρ の関係を図2に示す. 図中, 実線は本解析解を, 点線は希薄分布の解(82)をそれぞれ示している. また, 破線は Taya の手法による解(84)と self-consistent 法による解(85・a)を, 一点鎖線は differential scheme による解(86・a)を示す. さらに, ●印は, 25 個のき裂がランダムに分布する代表体積要素が周期的に配列している状態を想定し, 境界要素法を用いて巨視的弾性定数を解析した Huang らの数値解析結果⁽⁶⁾である. 図2より, 本解析解は, ρ の値のいかんにかかわらず, き裂間の相互作用を無視した希薄分布の解に比べて小さいことから, き裂間の相互作用の影響を表すことができ, また, Taya の手法や self-consistent 法による結果が $\rho>1$ になると負となるのに対して, differential scheme の結果と同様に零に漸近するという物理的に矛盾のない結果となることがわかる. differential scheme の結果と比較すると, 本解析解は ρ の値のいかんにかかわらず常に若干小さくなるのがわかる. これについての比較は後にまとめて行うことにする. また, Huang らの数値解析結果と比べると, ρ が比較的小さい場合にはよく一致し, 特に, ρ が 0.7 程度までは, ほぼ下限値を示していることがわかる. 式(9)に示したように, き裂密度はき裂の大きさと個数によって定められる. したがって, 完全にランダムな状態を高いき裂密度のもとで表現するにはき裂の個数を増す必要があると思われる. しかしながら, Huang らの解析モデルはき裂密度のいかんにかかわらず代表体積要素内のき裂の個数を 25 個に固定しているため, き裂密度の増加に伴い, そ

のランダムさの度合いが低下しているものと考えられる. これによって, ρ が大きい場合に本解析解や differential scheme の結果との差が大きくなったものと考えられる.

次に, ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合について $\bar{\mu}$ とき裂密度 ρ の関係を図3に示す. 図中, 実線は本解析解を, 破線は self-consistent 法による解(85・b)を, 一点鎖線は differential scheme による解(86・b)を, ●印は Huang らの数値解析結果を示している. 図3より, 体積弾性係数 $\bar{K}$ と同様に, $\bar{\mu}$ に対しても, self-consistent 法は $\rho>1$ で負になるのに対して, 本解析解は ρ が増加すると零に漸近することがわかる. また, differential scheme の結果より若干小さくなり, ρ が比較的小さい場合には Huang らの数値解析とよく一致することがわかる.

これら二つの結果に対して, 本解析解を differential scheme による解と比較する. 式(81)を ρ に関して Maclaurin 展開すると,

$$\frac{\bar{K}}{K} = \left\{ 1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\rho + \rho^2 + \frac{\rho^3}{2} + \dots \right) \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (87\cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{12}}{\mu} = \left\{ 1 + (1-\nu) \left(\rho + \rho^2 + \frac{\rho^3}{2} + \dots \right) \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (87\cdot b)$$

となる. また, 式(86)の differential scheme による結果を ρ に関して Maclaurin 展開すると,

$$\frac{\bar{K}_{ds}}{K} = \left\{ 1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} + \dots \right) \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (88\cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{ds}}{\mu} = \left\{ 1 + (1-\nu) \left(\rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} + \dots \right) \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (88\cdot b)$$

となる. 式(87)と式(88)より, 本解析解は, differential scheme による結果と比べて, ρ が 1 次の項までは完全に一致しているが, 2 次以上の項については常に係数が整数倍となっている. このため, 配向

Fig. 2 Macroscopic bulk modulus versus crack density

Fig. 3 Macroscopic shear modulus versus crack density

がランダムなスリットき裂材の巨視的弾性係数に対して、本解析解は、母材のポアソン比のいかんにかかわらず differential scheme の結果より過小評価となることがわかる。しかしながら、differential scheme の結果(86)は、配向がランダムなスリットき裂の解であるのに対して、本解析解は式(78)や式(80)で示したものが本来の形であり、互いに垂直な2方向に配向したスリットき裂に対するものである。したがって、完全にランダムな場合には若干精度は劣るものの、2方向あるいは1方向に配向した場合についても取扱うことができるという大きな特徴を有している。

4. 結 言

本報では、前報で提案した増分形 Mori-Tanaka 定理をき裂面が互いに垂直な方向に配向したスリットき裂が多数存在する場合に適用し、相互作用応力と巨視的弾性定数を求めた。また、それぞれのき裂の個数を等しいとおくことで、完全にランダムに配向するスリットに対する解についても求めた。その結果、き裂密度が増加しても巨視的弾性定数が負にならず零に漸近するという物理的に矛盾のない解が得られた。また、これを Huang らの数値解析結果と比較すると、き裂密度が比較的小さい場合にはよく一致することがわかった。さらに、differential scheme の解と比べると、き裂密度のいかんにかかわらず本解析解は若干小さくなることがわかった。また、得られた相互作用応力を通常の Mori-Tanaka の定理と比較することで、ランダム配向するスリットき裂の物理的な体積含有率を定

義することができた。

文 献

- (1) Mori, T. and Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Met.*, **21** (1973), 571-574.
- (2) Taya, M., Stiffness and strength of an aligned short-fiber reinforced composite, *J. Compos. Mater.*, **15** (1981), 199-210.
- (3) 荒木栄敏・南亜樹・岩本正治, き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張(第1報, 配向したスリットき裂を含む材料の巨視的弾性係数), *機論*, **70**-693, A (2004), 731-739.
- (4) 南亜樹・荒木栄敏・岩本正治, き裂問題への Mori-Tanaka の定理の拡張(第2報, 配向したペニー形き裂を含む材料の巨視的弾性係数), *機論*, **70**-694, A (2004), 830-836.
- (5) Minami, A., Araki, S. and Iwamoto, M., Application of differential scheme to the Mori-Tanaka theorem for macroscopic stiffness analysis of aligned elliptical cracked-solids, *Theoret. Appl. Mech.*, **52** (2003), 3-17.
- (6) Huang, Y., Chandra, A., Jiang, Z. Q., Wei, X. and Hu, K. X., The numerical calculation of two-dimensional effective moduli for microcracked solids, *Int. J. Solids Struct.*, **33** (1996), 1575-1586.
- (7) Budiansky, B. and O'Connell, R. J., Elastic moduli of a cracked solid, *Int. J. Solids Struct.*, **12** (1976), 81-97.
- (8) Hoenig, A., Elastic moduli of a non-randomly cracked body, *Int. J. Solids Struct.*, **15** (1979), 137-154.
- (9) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd Revised Ed., (1987), 74-89, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.
- (10) Kachanov, M., Tsukrov, I. and Shafiro, B., Effective moduli of solids with cavities of various shapes, *Appl. Mech. Rev.*, **47** (1994), 151-174.
- (11) Hashin, Z., The differential scheme and its application to cracked materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988), 719-734.