破壊靱性に対する材料非均質性の影響*
(温度勾配の影響)中本久志^{*1}, 本間寛臣^{*2}, 関東康祐^{*3}Effect of Material Inhomogeneity on Fracture Toughness
(Effect of Temperature-gradient)Hisashi NAKAMOTO, Hiroomi HOMMA^{*4} and Yasuhiro KANTO^{**} International Cooperation Center for Engineering Education Development, Toyohashi University of Technology,
1-1 Tempaku-cho, Toyohashi-shi, Aichi, 441-8580 Japan

The numerical analysis was performed to estimate the effect of material inhomogeneity induced by a temperature gradient on fracture toughness for SM 490 A steel. The temperature gradient in the specimen creates change in plastic properties at a position to the position to bring about inhomogeneity in the specimen. The experimental result shows the material inhomogeneity tends to change the fracture toughness from the expected one for the crack tip material property. In the numerical analysis, void volume fraction was used for a dimple fracture criterion, and a set of critical values of plastic strain, stress triaxiality and principal stress was taken as a cleavage fracture criterion. The stress and strain distributions at the same J -integral are different between the homogeneous and the inhomogeneous materials. The numerical results agreed with the experimental result that the material inhomogeneity induced by the temperature gradient has a significant effect on the fracture toughness.

Key Words: Material Inhomogeneity, Fracture Criterion, Ductile Fracture, Brittle Fracture, Fracture Toughness, Finite Element Method, J -integral

1. 緒 言

近年, 構造物や機器の高効率化, 省エネルギー化を背景としてそれに対応する材料の見直しが進んでいる。最近では, 苛酷条件下の構造物に対して傾斜機能材料 (Functionally Graded Material: FGM) の使用が目され, それに伴って, き裂を含む FGM の強度特性評価が必要とされている。FGM の力学・強度に関する研究として, 理論的なアプローチ (1~6), 数値解析によるアプローチ (7~12) などが挙げられる。このように, 理論的または数値解析により FGM の破壊現象を解明する試みは数多く行われているが, 実験的なアプローチは大型の FGM の製造が技術的にまだ困難であるため極めて少ない。さらに, これまでの FGM に関する破壊挙動の検討は弾性問題に限定されており, 弾塑性問題まで拡張した例はほとんど見られない。

FGM は, 材料の表面から裏面にかけて材料特性が

連続的に変化しているため, 非均質材として扱うことができる。そのような非均質材の破壊靱性試験の例として, 本間ら (13) によるものが挙げられる。ここでは, 鋼の塑性特性などの機械的性質が温度によって変化することを利用して試験片に温度勾配を与えて材料の非均質を模擬した。その結果によると, 非均質材の弾塑性破壊靱性は均一温度の値とは異なった。この試験結果は, き裂先端の応力・ひずみ場が J 積分による HRR 特異場のみによって支配されるのではなく, 材料非均質性の影響も受けていることを暗示している。しかしながら, 本間ら (13) の研究では微視的破壊機構からの検討が十分になされていない。そこで本研究では, 破壊靱性に及ぼす材料非均質性の影響を微視破壊機構から詳細に検討するため, 非均質材の破壊靱性試験および数値解析を行った。

2. 破壊靱性試験

2.1 供試材と試験方法 本研究では溶接構造用圧延鋼材 (SM490A 鋼) を対象とした。SM490A 鋼の化学組成および機械的特性をそれぞれ表 1, 2 に示す。

* 原稿受付 2004 年 3 月 25 日。

^{*1} (株) コベルコ科研 (☎ 651-0073 神戸市中央区脇浜海岸通 1-5-1)。^{*2} 豊橋技術科学大学工学教育国際協力研究センター (☎ 441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)。^{*3} 豊橋技術科学大学大学院機械システム工学系。
E-mail: homma@icceed.tut.ac.jp

試験には標準コンパクト試験片が用いられ、厚さ 30、幅 130、長さ 260mm の圧延材から LT 方向で採取された。試験片寸法は ASTM 1820-01 基準に準拠し、試験片厚さ B を 1 インチ、 $W/B = 4$ (W : 試験片幅) とした。切欠き底から疲労予き裂を導入し、全予き裂長さは $a_0/W = 0.50 \sim 0.52$ (a_0 : 予き裂長さ) とした。

Table 1 Chemical compositions of test material.

C	Mn	Si	S	P
0.18	1.49	0.36	0.03	0.01

Table 2 Mechanical properties of test material.

Temperature (°C)	Yield strength (MPa)	Ultimate strength (MPa)	Elongation (%)
20°C	364	490	17

本試験においても本間ら⁽¹³⁾による非均質材料の破壊靱性試験と同様、破壊靱性の変動が最も大きい温度領域で試験片内に温度勾配を付して非均質材料を再現した。SM490A 鋼の破壊靱性の温度依存性は、中本ら⁽¹⁴⁾による均一温度の試験結果を参考にした。その結果、き裂先端温度を -45°C に設定して試験片内で温度変化させると非均質性が効率よく与えられる。

温度勾配試験のために、図 1 に示すような装置を製作した。装置は温度勾配の低温側を冷却する装置と高温側を加熱する装置に分かれている。低温側については、凝固点の低いイソペンタン (2-メチルブタン、凝固点: 約 -160°C) を冷媒として使用しこれをマグネットポンプで循環させて試験片端部の冷却を行った。冷媒は、循環経路中にある銅パイプの熱交換器内を流れるときに液体窒素より冷却される。約 -120°C となった冷媒は、図 1 に示すように切り欠側に設置した二つの熱交換器を通じて試験片と接触する。高温側はニクロム線コイルのジュール熱の放射によって加熱される。発

熱量は変圧器で調節可能である。試験ではき裂先端温度 -45°C に対して約 $1.0^{\circ}\text{C}/\text{mm}$ の温度勾配を与え、温度変化はき裂進展方向にはほぼ直線的である。この温度分布は本間ら⁽¹³⁾による正の温度勾配試験と比較して約 5 倍の勾配となっており、材料非均質性の影響が大きく現れることが予想される。また、試験片の周囲と循環経路全体は発泡スチロールによって断熱された。このような装置によって、試験中は試験片内の温度分布を一定に保つことが可能である。試験片内の温度分布は、き裂先端からリガメント端にかけて等間隔に貼付した五つの熱電対により測定した。

中本ら⁽¹⁴⁾の均一温度試験によると、 -45°C での SM490A 鋼の破壊様式はへき開であった。温度勾配試験においてへき開による不安定破壊が発生した際には ASTM 1820-01 を使用して破壊靱性を測定する。ASTM 1820-01 では、不安定破壊発生時の破壊靱性 J_c が B 、リガメント長さ b_0 の影響を受けない条件として

$$B, b_0 \geq 50 \sim 100 \frac{J_c}{\sigma_y} \quad (1)$$

を定めている。また、SM490A 鋼には実用温度範囲でマイクロイド合体型のディンプル破壊とへき開破壊の 2 種類の破壊様式が存在することに留意し、温度勾配の影響により破壊様式がディンプル破壊へと変化した際には JSME S 001 のストレッチゾーン (SZW) 法を用いることとする。試験は、MTS 社製油圧サーボ式万能材料試験機 (ひょう量 98kN) を用い、変位制御で行われた。試験片内の温度は、 $\pm 1^{\circ}\text{C}$ で制御し、所定の温度分布で 30 分間保持した後に試験を実施した。試験終了後、微視破壊機構を観測し介在物の分散距離を測定するため、破面を走査型電子顕微鏡 (SEM) を用いて観察した。

2.2 試験結果 図 2 は各試験片の温度分布を表したものである。各試験片における温度分布はほぼ等しくなっており、き裂先端の温度は約 -45°C 、リガメント端では約 10°C であることがわかる。

破壊靱性試験の結果、すべての試験片においてへき開による不安定破壊が発生したことから、ASTM 1820-01 に基づいて破壊靱性 J_c を測定した。ここでの破壊靱性は、試験片に温度勾配による材料非均質性が存在しているため、見かけ上の値である。表 3 に測定した破壊靱性値を表す。試験終了後破面を SEM 観察した結果、中本ら⁽¹⁴⁾による -45°C 均一温度三点曲げ試験と同様、試験片によっては予き裂先端にディンプル領域が発生していた。そこで、 -45°C 均一温度の破壊靱性と、温度勾配による非均質材料の破壊靱性を比較したものを図 3 に示す。均質材および非均質材ともき裂

Fig. 1 Experimental schematic.

Fig. 2 Temperature distribution in specimens.

先端は延性-脆性遷移領域内の温度となっているため、破壊靱性は大きくばらついている。したがって、破壊靱性に対する材料非均質性の影響を調べる際には測定データの取り扱いに注意が必要である。ディンプル破壊の先行後へき開破壊に移行した実験結果について、 -45°C 均一温度では大きくばらつき、非均質材では1つであるためそれらの比較に工学的意味がないと思われる。そこで本研究では、疲労予き裂から直接へき開が発生した場合について検討する。均質材・非均質材についてそれらの破壊靱性の平均値を計算するとそれぞれ 29.3 kN/m 、 81.9 kN/m であり、非均質材の値は均質材の値の2.8倍となっている。図3に示すように、疲労予き裂から直接へき開が発生した際の破壊靱性についてもばらつきが存在しているため、破壊靱性に対する材料非均質性の影響を定量的に評価することは困難であるが、非均質材の破壊靱性は均質材の値と比較して高くなる傾向があると考えられる。

また、本間ら⁽¹³⁾による非均質材の破壊靱性試験ではへき開は発生しなかった。これは、本間らが使用した材料 A533B 鋼は SM490A 鋼と比較して高品位で不純物が非常に少ないことに起因すると推察される。

Table 3 Fracture toughness values by temperature gradient tests.

Specimen	J_C (kN/m)	Comment
No.1	49.2	Cleavage
No.2	94.0	Cleavage
No.3	102.5	Cleavage
No.4	172.1	Cleavage with dimple

Fig. 3 Comparison of fracture toughness values by uniform temperature and temperature gradient tests.

3. 破壊条件の検討

様々な温度条件下で破壊靱性試験を実施し、有限要素解析を行って SM490A 鋼のディンプルおよびへき開破壊条件を定めた⁽¹⁴⁾。それらの条件を有限要素解析に使用することによって、遷移温度領域内の破壊靱性の変動を予測することが可能となった。そこで、定められた破壊基準を用いて非均質材の有限要素解析を行い、非均質材の破壊靱性を求める。本章では、この破壊基準について概説する。

SM490A 鋼には様々な大きさの介在物が散在している。有限要素解析では、その中でも比較的大きな介在物を有限要素モデルに導入する。このような介在物の存在は主ボイド発生の要因と考えられる。解析では、介在物周りの塑性ひずみ ϵ_p による母材と介在物の剥離による主ボイド発生と、介在物に作用する最大主応力 σ_{yy} による介在物中の破壊に起因する主ボイド発生を考慮する。解析で使用するディンプル破壊、へき開破壊および介在物におけるボイド発生の中の条件は次のように決定した。ディンプル破壊については、き裂先端前方の要素のボイド体積率 f がその臨界値 $f_E = 0.2$ に到達するとその要素を消去してディンプル領域の発生を模擬し、き裂先端と主ボイドがディンプル領域を介して合体した時点を弾塑性破壊靱性 J_{IC} と定義する。へき開破壊は、き裂先端前方の要素で $\epsilon_p = 0.00728$ 、応力三軸性 $\sigma_m/\sigma_{eq} = 2.5$ (σ_m : 平均応力, σ_{eq} : von Mises 応力), $\sigma_{yy} = 1700\text{ MPa}$ の三つの条件が同時に満足されれば発生すると仮定する。介在物における主ボイドは、 $\epsilon_p = 0.00916$, $\sigma_{yy} = 1630\text{ MPa}$ のどちらかが満足されれば発生する。簡単のため、介在物の機械的性質は母材のき裂先端のものと同じとする。解析では、上記の条件が満足された時点で介在物を形成する要素を消去し、主ボイドの発生を模擬する。

4. 非均質材料の破壊シミュレーション

4.1 解析方法 2.の破壊靱性試験において試験片内の温度は -120°C から 10°C に変化している。SM490A鋼の機械的性質の温度依存性については、ほぼ同等な材料について実施されたWangら⁽¹⁵⁾の引張試験結果を参考にした。温度に依存する材料定数は降伏強度 σ_Y 、加工硬化指数 N 、塑性係数 C の3つとした。ヤング率 E は 206GPa 、ポアソン比 ν は 0.3 とし、これらの値は実験温度範囲： -120°C から 10°C で一定とした。材料の構成式を次式で近似し、FEM解析に用いた。

$$\sigma \leq \sigma_Y; \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma \geq \sigma_Y; \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left[\left(\frac{\sigma}{C} \right)^N - \left(\frac{\sigma_Y}{C} \right)^N \right] \quad (2)$$

式(2)で温度に依存する項は以下のように表される。

$$\sigma_Y = 6.56 \times 10^{-5} T^3 + 1.23 \times 10^{-2} T^2 - 5.52 \times 10^{-1} T + 3.69 \times 10^2$$

$$\frac{1}{N} = -4.71 \times 10^{-9} T^3 - 1.92 \times 10^{-6} T^2 - 2.97 \times 10^{-5} T + 2.14 \times 10^{-1}$$

$$C = 8.41 \times 10^{-4} T^3 + 9.04 \times 10^{-2} T^2 - 2 \times T + 9.25 \times 10^2 \quad (3)$$

ここで T はセ氏温度である。

材料要素内のボイド体積率をモニターするため、次式に示すTvergaard^(16,17)の多孔質材料(以降、修正Gurson材)を使用する。

$$\frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_Y^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 \sigma_m}{2\sigma_Y}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\sigma_{eq} = \left(3/2 \sigma'_{ij} : \sigma'_{ij}\right)^{1/2}$ 、 σ'_{ij} は σ_{ij} の偏差成分、 f は微小空孔の体積率である。また、 q_1, q_2 は、ボイド間の相互作用を考慮するためのパラメータである。微小空孔の体積率はボイドの発生、成長によって表現され、ボイド成長速度 $\dot{f}_{nuc}$ は次式に示すような塑性ひずみ支配によって与えられる。

$$\dot{f}_{nuc} = A \bar{\varepsilon}_m^{pl},$$

$$A = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_m^{pl} - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \quad (5)$$

ここで $\bar{\varepsilon}_m^{pl}$ は母材の相当塑性ひずみ、 ε_N はボイドが発生するときの平均ひずみ、 S_N は標準偏差である。 f_N は発生したボイドの体積率であり、それらのボイドは引張荷重が作用したときのみ発生する。本解析では、修正Gurson材の材料定数はSM490A鋼の引張試験結果⁽¹⁴⁾を参考にして、 $q_1 = 1.2$ 、 $q_2 = 0.7$ 、 $q_3 = 1.44$ を使用し、これらは実験での温度範囲で一定とした。その他の定数は、 $\varepsilon_N = 0.3$ 、 $S_N = 0.1$ 、 $f_N = 0.04$ とし、初期ボイド体積率は 0 とした。

解析モデルは三点曲げ試験片およびコンパクト試験片形状の対称性から $1/2$ 部分を解析対象とする。図4は解析で使用した有限要素モデルである。また、両者のモデルのき裂先端近傍の要素分割を図5に示す。遷移温度領域における破壊靱性を数値解析によって予測する際には、介在物の平均分散距離を測定してき裂先端前方に配置すると良好な結果が得られることが明らかにされている⁽¹⁴⁾。そこで、破壊靱性試験の破面観察結果より、き裂先端前方 $100\mu\text{m}$ に直径 $5\mu\text{m}$ の介在物を配置した。介在物の機械的性質は、中本ら⁽¹⁴⁾による数値解析と同様、母材と同一とした。

(a) Three-point bending specimen

(b) CT specimen

Fig. 4 Finite element model.

Fig. 5 Finite element model around the crack tip.

図 6-8 はそれぞれ σ_y , N , C の解析試験片内分布である。これらの分布は、実験で得られた温度勾配を参考にして式 (3) から決定された。解析において、材料非均質性は要素毎に応力-ひずみ関係を変化させて表現した。有限要素モデルは二次元 8 節点 4 積分点アイソパラメトリック要素を用いて作成した。

解析で破壊靱性を求める際、 J 積分を計算した。ここでは J 積分を、通常の破壊靱性試験における場合と同様に形式的に算定した。解析には汎用有限要素法コード ABAQUS (18) を使用した。

Fig. 6 Distribution of yield stress σ_y in the inhomogeneous model.

Fig. 7 Distribution of strain hardening exponent N in the inhomogeneous model.

4.2 解析結果 均質材の破壊シミュレーションの結果、き裂先端に配置した介在物において主ボイド発生条件が満足されたが、 J 値が 39.0 kN/m まで変形が進行したとき、主ボイドとき裂先端のリガメント領域においてへき開破壊条件が満足されへき開破壊の

Fig. 8 Distribution of plastic coefficient C in the inhomogeneous model.

発生が予測された。解析によって求められた破壊靱性は、図 3 に示す -45°C 一定温度で疲労予き裂から直接へき開が発生した際の破壊靱性の測定範囲内に収まっている。

図 9 から図 11 は、均質材および非均質材における σ_{yy} , σ_m/σ_{eq} , ϵ_p のき裂先端前方における分布である。これらの分布は負荷レベルが均質材の破壊靱性 J_{C-Hom} に到達した時点で調査している。これらの図から、同じ負荷レベルでも、均質材と非均質材で応力・ひずみ分布とも異なっていることが確認できる。均質材においてき裂先端前方 100 μm 付近における σ_{yy} と σ_m/σ_{eq} の急激な減少は、主ボイド発生の影響によるものである。図 9 を見ると、非均質材では主応力のへき開破壊条件が満足されていないことがわかる。よって、非均質材ではへき開破壊条件に到達するためには J_{C-Hom} 以上の負荷が必要であり、破壊靱性は上昇する。非均質材について、塑性特性の変化をき裂先端で見ると、勾配率が最も大きな塑性係数でも 0.1% 以下である。よって、図 9 から図 11 で認められた応力・ひずみ分布の変化は、その領域での機械的性質の変化によるものでなく、き裂前方広範囲における材料非均質性の影響がき裂先端にまで及んだと考えられる。

非均質材では、 J 値が 51.6 kN/m まで変形が進行したときへき開破壊条件が満足された。図 3 からわかるように、解析によって求められた非均質材の破壊靱性は、温度勾配試験で疲労予き裂から直接へき開が発生する際の破壊靱性の測定範囲内に収まっている。その結果、非均質材について求めた見かけ上の破壊靱性は均質材の破壊靱性と比較して約 32% 大きくなることがわかった。

2. では、疲労予き裂から直接へき開破壊が発生する

Fig. 9 σ_{yy} distributions along the line ahead of the crack tip for the homogeneous and the inhomogeneous models.

Fig. 11 ε_p distributions along the line ahead of the crack tip for the homogeneous and the inhomogeneous models.

Fig. 10 σ_m/σ_{eq} distributions along the line ahead of the crack tip for the homogeneous and the inhomogeneous models.

Fig. 12 f distributions along the line ahead of the crack tip for the homogeneous and the inhomogeneous models.

場合に注目して非均質材の破壊靱性が上昇することを述べた。また、均質材と非均質材について予測された破壊靱性は、疲労予き裂から直接へき開が発生する際の破壊靱性の測定範囲内に収まっていた。そこで、均質材及び非均質材について、それぞれの破壊靱性に到達した時点でのき裂先端前方ボイド体積率分布を図 12 に示す。き裂先端から 40 μm の範囲でボイドの発生が観察されるが、要素を消去する段階には至っていない。これは、均質材・非均質材ともディンプル破壊が発生していないことを表していると考えられ、破壊靱性試験結果と一致している。

こまでは、き裂先端から介在物の平均分散距離に介在物を配置した結果について議論した。次に、き裂先端前方に存在する介在物の位置が平均分散距離から

変化する場合を考える。ここでは、介在物がき裂先端前方 50, 150, 200 μm の位置に存在する場合について均質材と非均質材の破壊靱性を調査した。図 13 は介在物の存在位置に対する均質材と非均質材の破壊靱性の変化である。均質材・非均質材とも介在物の存在位置がき裂先端に近づくにつれ破壊靱性は減少し、遠くなるにつれ上昇している。この結果、見かけ上の破壊靱性で、非均質材の値は均質材の破壊靱性と比較してすべての場合で高くなることがわかる。

以上の結果、材料内に存在する材料非均質性はき裂先端の応力・ひずみ場に影響を与え、見かけ上の破壊靱性を変化させることが判明した。

Fig. 13 Fracture toughness variations for the inclusion position.

5. 結 言

本研究では、SM490A 鋼に温度勾配による材料非均質性が存在する場合について破壊靱性試験および数値解析を行い、破壊靱性に対する材料非均質性の影響を調査した。そこで以下の結論を得た。

- 本試験での温度勾配による材料非均質性は破壊靱性に対して影響を与え、見かけ上の破壊靱性で、非均質材の値は均質材の破壊靱性と比較して高くなる傾向がある
- 有限要素解析の結果、同じ負荷レベルにおいても均質材と非均質材の応力・ひずみ分布は異なった。
- その結果、材料内に存在する非均質性は破壊靱性に対して影響を与え、非均質材の見かけ上の破壊靱性は上昇する。

文 献

- (1) Erdogan F., "Fracture mechanics of functionally graded materials.", *Composites Engineering*, **5-7**, (1995), pp.753-770
- (2) Delale F. and Erdogan F., "The crack problem for a nonhomogeneous plane.", *Journal of Applied Mechanics*, **50**, (1983), pp.609-613
- (3) Eischen J.W., "Fracture of nonhomogeneous materials.", *International Journal of Fracture*, **34**, (1987), pp.3-22
- (4) Jin Z.-H. and Noda N., "Crack-Tip singular fields in nonhomogeneous materials." *Journal of applied Mechanics*, **61**, (1984), pp. 738-739
- (5) Konda N. and Erdogan F., "The mixed-mode crack problem in a nonhomogeneous elastic plane", *Engineering Fracture Mechanics*, **47**, (1994), pp.533-545
- (6) Erdogan F. and Wu B.H., "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties.", *Journal of applied Mechanics*, **64**, (1997), pp.449-456
- (7) Gu P., Dao M. and Asaro R.J., "A simplified method for calculating the crack-tip field of functionally graded materials using the domain integral.", *Journal of applied Mechanics*, **66**, (1999), pp.101-108
- (8) Anlas G., Santare M.H. and Lambros J., "Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials.", *International Journal of Fracture*, **104**, (2000), pp.131-143
- (9) Kim J.-H. and Paulino G.H., "Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials.", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, (2002), pp.1903-1935
- (10) Dolbow J.E. and Gosz M., "On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials.", *International Journal of Solids and Structures*, **39**, (2002), pp.2557-2574
- (11) Rao B.N. and Rahman S., "Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials.", *Engineering Fracture Mechanics*, **70**, (2003), pp.1-27
- (12) Rousseau C.-E. and Tippur H.V., "Influence of elastic gradient profiles on dynamically loaded functionally graded materials: cracks along the gradient.", *International Journal of Solids and Structures*, **38**, (2001), pp.7839-7856
- (13) Homma H., Shah Q.H. and Kawada S., "Effect of temperature gradient on crack initiation.", *The International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **63-3**, (1995), pp.339-345
- (14) 中本久志・中本寛臣・鈴木智・楠谷智史, "延性-脆性遷移領域における破壊靱性の予測", 日本計算工学会論文集, **6** (2004), pp.217-225
- (15) Wang G.Z., Liu G.H. and Chen J.H., "Effects of precracked specimen geometry on local cleavage fracture stress σ_f of low alloy steel.", *International Journal of Fracture*, **112**, (2001), pp.183-196
- (16) Tvergaard V., "Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions.", *International Journal of Fracture*, **17**, (1981), pp.389-407
- (17) Tvergaard V., "On the localization in ductile materials containing spherical voids.", *International Journal of Fracture*, **18**, (1982), pp.237-252
- (18) Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., "ABAQUS users and theory manual, version 6.2.", (2002), Providence, RI.