重合メッシュ法による二次元破壊力学解析*

岡田 裕^{*1}, 遠藤明香^{*2}, 菊池正紀^{*3}Application of S-Version Finite Element Method to
Two Dimensional Fracture Mechanics ProblemsHiroshi OKADA^{*4}, Sayaka ENDOH and Masanori KIKUCHI^{**} Department of Nano-Structure and Advanced Materials, Kagoshima University,
1-21-40 Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima, 890-0065 Japan

S-version finite element method (S-FEM) is applied to two dimensional linear/nonlinear fracture mechanics problems. S-FEM in crack problems is such that local detailed finite element mesh (local mesh) is superposed on cores finite element model (global mesh) representing the global structure. Therefore, the detailed mesh representing the crack and the global mesh are generated independently. This methodology is considered to be one of global-local type analytical strategies. In this paper, the formulation of S-FEM is reviewed and applied to various linear/nonlinear fracture mechanics problems. Stress intensity factors for linear fracture problems are computed by using virtual crack closure method (VCCM). For nonlinear fracture problems, J -integral is evaluated. Calculations for the fracture parameters are carried out based on the local mesh only.

Key Words: Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, J -Integral, Finite Element Method (FEM)

1. 緒 言

構造物の破壊力学解析を行い、例えば、航空機や発電プラントなどの構造健全性評価を行うことは、それらの安全性を確保する上で大変有用と思われる。一般にそれらの構造は複雑な形状・構成を有するために、き裂を有する有限要素法モデルを構築するためには多大な労力を要する。そこで、有限要素法モデル生成技術や有限要素法解析手法自体の改良によりモデル生成を容易にするための研究が精力的に行われてきた。例えば、エレメントフリーガラーキン法 (EFGM) ^①、フリーメッシュ法 (FMM) ^②、拡張有限要素法 (X-FEM) ^③、重合メッシュ法 (SFEM) ^{④⑤} などである。著者らは、重合メッシュ法に着目し、破壊力学問題へ

の適用に的を絞り様々な検討を行ってきた^{⑥⑦}。本論文では、重合メッシュ法の二次元破壊力学問題への適用に関して、現在までに得た様々な知見を報告する。

重合メッシュ法解析では、全体構造を表す比較的粗いグローバル有限要素法モデルに、き裂先端近傍の特殊応力場を表すローカル有限要素法モデルを重ね合わせて解析を行う。それぞれのモデルで独立に変位を規定し、それらが重なり合う領域では両者の和により変位を表現する。き裂の無いグローバル有限要素モデルの上にき裂を表現するローカル有限要素モデルを重ね合わせることで、き裂の位置、長さや角度が変化してもグローバル有限要素モデルを再生成することが不要である。従って、複雑な形状を持つ構造物中のき裂解析が極めて容易である。有限要素に基づく計算という点では従来の変位法有限要素法と何ら変わりはないので、すでに確立されている応力拡大係数や J 積分などの破壊力学パラメータ^⑧の計算手法を用いることができる。

本論文では、二次元線形・非線形破壊力学問題について、重合メッシュ法を適用する際の定式化、数値解

* 原稿受付 2004 年 3 月 22 日。

^{*1} 正員、鹿児島大学大学院理工学研究科 (〒890-0065 鹿児島市都元 1-21-40)。^{*2} 東京理科大学大学院理工学研究科 (〒278-8510 野田市山崎 2641)。^{*3} 正員、東京理科大学理工学部。

E-mail: okada@mech.kagoshima-u.ac.jp

析上の問題点とその解決方法、破壊力学パラメータの計算、さらに解析精度について報告する。

2. 重合メッシュ法のき裂問題への適用

2・1 弾性き裂問題 重合メッシュ法による解析では図1のように全体構造を比較的粗いグローバル有限要素法モデルで離散化し、き裂近傍では詳細なローカル有限要素法モデルをグローバル有限要素法モデルに重ね合わせて解析を行う。両者はまったく独立に生成される。グローバル有限要素法モデルの領域を Ω^G 、ローカル有限要素法モデルの領域を Ω^L として議論を進める。

グローバル有限要素法モデルにより規定される変位関数を $u_i^G(x)$ 、ローカル有限要素法モデルにより規定される変位関数を $u_i^L(x)$ とする。変位関数 $u_i(x)$ は次式で与えられる。

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^G(x) & x \in \Omega^G - \Omega^L \\ u_i^G(x) + u_i^L(x) & x \in \Omega^L \end{cases} \quad (1)$$

すなわち、グローバルとローカル有限要素法モデルが重なり合う領域では、変位関数をそれぞれの和で表し、重ならない領域では変位関数はグローバル有限要素法モデルにより規定されるものとなる。ただし、ローカル有限要素法モデルの外周がグローバル有限要素法モデル中に存在する部分(Γ^{GL})では変位の連続を保つために、 $u_i^L(x) = 0$ とする。ローカル有限要素法モデル外周が外力規定の物体表面と接する場合や、き裂面では $u_i^L(x) = 0$ としない。さらに、変位の変分 $\delta u_i(x)$ に関しても同様である。これらを仮想仕事の原理式に代入する。

Fig. 1 A schematic illustration for a crack problem solved by S-FEM.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^G} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} D_{ijkl}^e \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} d\Omega^G &= \int_{\Omega^G} \delta u_i b_i d\Omega^G \\ &+ \int_{\Gamma_i^G} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma_i^G + \int_{\Gamma_i^{Crack}} \delta u_i \bar{t}_i^{Crack} d\Gamma_i^{Crack} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 D_{ijkl}^e はHookeの法則を表す四階テンソル、 b_i は単位体積あたりに働く体積力、 $\bar{t}_i$ はトラクションの規定された境界 Γ_i^G で与えられるトラクションを表す。 $\bar{t}_i^{Crack}$ はき裂面 Γ_i^{Crack} に働く表面力を表す。互いに向かい合うき裂面上に働く表面力は大きさが同じで向きは逆であると仮定する。式(2)に基づきグローバルとローカル有限要素で離散化すれば以下のようなマトリックス表示を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{GG} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^G \\ \mathbf{u}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^{Crack} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{GG}$ 、 $\mathbf{K}^{GL}$ 、 $\mathbf{K}^{LG}$ 、 $\mathbf{K}^{LL}$ はそれぞれ、

$$\{\delta \mathbf{u}^G\}^T [\mathbf{K}^{GG}] \{\mathbf{u}^G\} = \int_{\Omega^G} \frac{\partial \delta u_i^G}{\partial x_j} D_{ijkl}^e \frac{\partial u_k^G}{\partial x_\ell} d\Omega^G \quad (4)$$

$$\{\delta \mathbf{u}^G\}^T [\mathbf{K}^{GL}] \{\mathbf{u}^L\} = \int_{\Omega^L} \frac{\partial \delta u_i^G}{\partial x_j} D_{ijkl}^e \frac{\partial u_k^L}{\partial x_\ell} d\Omega^L \quad (5)$$

$$\{\delta \mathbf{u}^L\}^T [\mathbf{K}^{LG}] \{\mathbf{u}^G\} = \int_{\Omega^L} \frac{\partial \delta u_i^L}{\partial x_j} D_{ijkl}^e \frac{\partial u_k^G}{\partial x_\ell} d\Omega^L \quad (6)$$

$$\{\delta \mathbf{u}^L\}^T [\mathbf{K}^{LL}] \{\mathbf{u}^L\} = \int_{\Omega^L} \frac{\partial \delta u_i^L}{\partial x_j} D_{ijkl}^e \frac{\partial u_k^L}{\partial x_\ell} d\Omega^L \quad (7)$$

により与えられるマトリックスである。従って、 $\mathbf{K}^{GG}$ と $\mathbf{K}^{LL}$ の計算は通常の有限要素法の場合と同じになる。 $\mathbf{K}^{LG}$ や $\mathbf{K}^{GL}$ はグローバル有限要素法モデルとローカル有限要素法モデルの連成を表すマトリ

ックスであり、本論文では結合剛性マトリックスとよぶ。一方、 $\mathbf{K}^{LG}$ の計算はローカル有限要素法モデルの各要素とそれと重なりを持つグローバル有限要素法モデルの要素に関する積分により計算される。例えば、ローカル有限要素法モデルの要素 I_L とグローバル有限要素法モデルの要素 J_G に係わる積分の結果として現われるマトリックス $[\mathbf{k}^{I_L-J_G}]$ を次式で表すことができる。

$$[\mathbf{k}^{I_L-J_G}] = \int_{\Omega^{I_L}} \theta^{I_L-J_G}(\mathbf{x}) [\mathbf{B}^{I_L}]^T [\mathbf{D}^e] [\mathbf{B}^{J_G}] d\Omega^{I_L} \quad (8)$$

$[\mathbf{B}^{I_L}]$ と $[\mathbf{B}^{J_G}]$ はローカル有限要素 I_L とグローバル有限要素 J_G の変位-ひずみ関係マトリックス、 $[\mathbf{D}^e]$ は Hooke の法則を表すマトリックス、 Ω^{I_L} はローカル有限要素 I_L の占める領域を表す。さらに、 $\theta^{I_L-J_G}(\mathbf{x})$ はローカル有限要素 I_L とグローバル有限要素 J_G が重なり合う領域で 1、重なり合いの無い部分では 0 となるステップ状の関数である。 $[\mathbf{k}^{I_L-J_G}]$ を節点番号に従い適切に配置すれば $\mathbf{K}^{LG}$ が得られる。 $\mathbf{K}^{GL}$ はその定義から $\mathbf{K}^{LG}$ の転置行列なので求めなくてよい。また、 $\mathbf{t}^G$ と $\mathbf{t}^L$ は境界上で与えられた表面力や物体力から得られる等価節点力であり、次式で定義される。

$$\{\delta \mathbf{u}^G\}^T \{\mathbf{f}^G\} = \int_{\Omega^G} \delta u_i^G b_i d\Omega^G + \int_{\Gamma_i^G} \delta u_i^G \bar{t}_i d\Gamma_i^G \quad (9)$$

$$\{\delta \mathbf{u}^L\}^T \{\mathbf{f}^L\} = \int_{\Omega^L} \delta u_i^L b_i d\Omega^L + \int_{\Gamma_i^L} \delta u_i^L \bar{t}_i d\Gamma_i^L \quad (10)$$

ただし、式 (10) 右辺第二項の積分はローカル有限要素モデル領域がトラクションの規定された境界 Γ_i^G に接する場合にのみ実行される。 $\mathbf{t}^{\text{Crack}}$ はき裂面上に働く表面力によって発生する等価節点力ベクトルを表す。向かい合うき裂面上に働く表面力の大きさが同じで互いに逆向きであり、き裂はローカル有限要素モデルだけで表現すると仮定するので、き裂表面力に対するグローバル有限要素モデルに関する等価節点力ベクトルは現われない。き裂面が自由表面である場合は $\mathbf{t}^{\text{Crack}} = \mathbf{0}$ である。

2・2 弾塑性き裂問題 2・1 節で示した弾性き裂問題に対する重合メッシュ法の定式化を弾塑性問題に拡張する。構成方程式として J2-F 理論⁹⁾

を採用し微小変形理論に基づく増分型の定式化を行う。式 (1) で定義した変位を変位増分で置き換える。

$$\Delta u_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Delta u_i^G(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega^G - \Omega^L \\ \Delta u_i^G(\mathbf{x}) + \Delta u_i^L(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega^L \end{cases} \quad (11)$$

さらに、仮想仕事の原理式 (2) を増分型に書き換える。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^G} \frac{\partial \delta \Delta u_i}{\partial x_j} D_{ijkl}^{\text{ep}} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l} d\Omega^G &= \int_{\Omega^G} \delta \Delta u_i \Delta b_i d\Omega^G \\ &+ \int_{\Gamma_i^G} \delta \Delta u_i \Delta \bar{t}_i d\Gamma_i^G + \int_{\Gamma_i^{\text{Crack}}} \delta \Delta u_i \Delta \bar{t}_i^{\text{Crack}} d\Gamma_i^{\text{Crack}} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\Delta(\)$ は量 $(\)$ の増分を表す。構成方程式を表す 4 階テンソル D_{ijkl}^{ep} は弾性域内では Hooke の法則を表す 4 階テンソル D_{ijkl}^e と同じである。これより弾性問題の場合とまったく同様な離散化方程式を導くことができ、次のように表される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{GG} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^G \\ \Delta \mathbf{u}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{f}^G \\ \Delta \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{f}^{\text{Crack}} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式 (13) から未知節点増分を求め、それよりひずみ増分を計算する。さらに、後退オイラー法¹⁰⁾により応力増分を計算する。今までの解析では、増分量を十分に小さく設定することにより、Newton-Raphson 法¹⁰⁾などの収束計算を省いたシンプルなアルゴリズムを採用した。なお、ローカル有限要素法モデルに対して応力の計算に用いるひずみ増分は、グローバルとローカル有限要素法モデルの変位増分から計算されるひずみ増分を足し合わせたものを使用する。

2・3 剛性マトリックスの積分 式 (8) に示したように、結合剛性マトリックス $\mathbf{K}^{LG}$ を求める際には、各ローカル要素に基づく積分を実行するが、その被積分関数が不連続になる場合がある。例えば、図 2 (a) に示すように、あるローカル要素にグローバル要素が幾つか重なり、その一つとの重なり合いが部分的であるような場合を想定する。このとき図 2 (a) 中でハッチを施した部分では式 (8) 中の関数 $\theta^{I_L-J_G}(\mathbf{x})$ の値が 1、その他の部分では 0 となる。

従って、積分を実行するローカル要素の内部で被積分関数に不連続が発生する。有限要素法における要素剛性マトリックスの積分に通常用いられるガウスの数値積分¹⁰⁾をこのような場合に対して適用すると積分精度の悪化を招く。そこで、ローカル要素を図 2 (b) のようなサブ領域に分割し、それぞれのサブ領域でフル積分 (3×3 ガウス積分) を行い、被積分関数の不連続に起因する積分精度の悪化を防ぐこととした。

なお、増分法の計算を用いる弾塑性解析では、各点の応力、塑性ひずみ、相当塑性ひずみを記憶しておくが必要になる。それら諸量の分布を適切に表現するために、グローバルメッシュに対しても積分サブ領域を設定する場合もある。本報の解析では、サブ領域分割後の積分点ごとにそれらをメモリーに記憶した。

2・4 未知節点変位/速度の求解 式 (3) や (13) に示した未知節点変位/速度に対する連立一次方程式を解き、解を求める。しかし、式 (3) と (13) の全体剛性マトリックスは結合剛性マトリックス (K^{LG} や K^{GL}) の成分も含むのでバンドマトリックスではない。大規模疎行列となるので、有限要素法解析でよく用いられるスカイライン法¹¹⁾などのバンドマトリックス用直接解法よりも疎行列用反復解法 (例えば、ICCG 法¹²⁾) を用いた方が必要なメモリー量などの点で有利である。本研究の計算では ICCG 法を利用した。他に、グローバルとローカル有限要素法モデルの節点リナンバリングを行い、全体剛性マトリックスをバンド状にする方法もある¹³⁾。

3. 破壊力学パラメータの計算方法

き裂先端の特異応力場を評価するために、線形破壊力学問題では応力拡大係数⁹⁾、弾塑性破壊力学問題では J 積分⁹⁾がよく使われる。

3・1 線形問題 (VCCM 法^{14,15)} による応力拡大係数の計算)

VCCM 法 (仮想き裂閉口積分法, Virtual Crack Closure-Integral Method) を用いれば、き裂先端近傍の節点変位や節点力に関する情報だけからエネルギー解放率や応力拡大係数を求めることができる。VCCM 法を用いれば、クォーターポイントエレメントのような特異要素¹⁶⁾を用いずとも比較的粗い有限要素分割でもエネルギー解放率や応力拡大係数を精度良く計算できることが知られている¹⁴⁾。二次元問題で 8 節点アイソパラメトリック要素を用いた計算では、図 3 に示すき裂先端から後方の 2 節点の変位 (u_i^{1U} , u_i^{2U} , u_i^{1L} , u_i^{2L}) と、き裂先端と一つ前方の節点

の等価節点力 (f_i^{1U} , f_i^{2U}) を用いる。ただし、等価節点力の計算には図 3 中でシェイディングを施したき裂面より上方の 2 要素だけを用いる。さらに、き裂上下面の変位差 (u_i^{1D} , u_i^{2D}) を次式で定義する。

$$u_i^{1D} = u_i^{1U} - u_i^{1L}, \quad u_i^{2D} = u_i^{2U} - u_i^{2L} \quad \dots\dots\dots (14)$$

これらより、モード I と II に関連するエネルギー解放率 (G_I , G_{II}) を計算することができる。

$$\left. \begin{aligned} G_I &= \frac{1}{2h} (u_2^{1D} f_2^{1U} + u_2^{2D} f_2^{2U}) \\ G_{II} &= \frac{1}{2h} (u_1^{1D} f_1^{1U} + u_1^{2D} f_1^{2U}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 h はき裂先端要素の幅を表す。応力拡大係数 (K_I , K_{II}) は次式で与えられる。

$$K_I = \sqrt{G_I E'}, \quad K_{II} = \sqrt{G_{II} E'} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 $E' = E$ (平面応力), $E' = E/(1-\nu^2)$ (平面ひずみ) である。 E と ν はヤング率とポアソン比を表す。

VCCM 法計算に用いる節点変位はき裂先端近傍における重ね合わせにより表される変位、

Fig. 2 A local element partially overlapping with a global element.

Fig. 3 A schematic illustration for the calculation of stress intensity factors by using VCCM.

$$u_i = u_i^G(x) + u_i^L(x) \cdots \cdots \cdots (17)$$

を用いる。ただし、図 1 に示すようにき裂が構造に完全に埋め込まれている場合、VCCM 法ではき裂面上の相対変位を利用するため、ローカル有限要素法モデルにより表される $u_i^L(x)$ だけを利用する。応力は、式 (17) で表した変位からひずみを求めて計算し、詳細有限要素法メッシュの形状関数を利用して等価節点力 (f_i^{1U} , f_i^{2U}) を計算する。

3・2 J 積分法¹⁷⁾によるエネルギー解放率の計算

J 積分は図 4 のように、き裂を囲む経路に沿って式

Fig. 4 A schematic illustration for J integral.

(18) の積分を行い、き裂のエネルギー解放率を求める手法である。き裂及びき裂周辺部分にはローカル有限要素法モデルが重ね合わされる。そのため、J 積分経路もローカル有限要素法モデル上に設定する。

$$J = \oint_{\Gamma} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right)$$

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \cdots \cdots \cdots (18)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

4. 重合メッシュ法によるき裂の解析

本章では、はじめに線形破壊力学問題に対して重合メッシュ法を適用して解析精度について論じ、さらに弾塑性き裂問題への適用例を示す。

4・1 基本的な線形破壊力学問題への適用

帯板の中央き裂問題と三点曲げ問題に対して応力拡大係数を求めた結果より、解析精度について考察をする。第一に、重合メッシュ法解析においてもき裂先端部分でローカル有限要素法モデルの要素分割を十分細かくすることが必要と思われる。しかし、ローカル有限要素法モデル領域がき裂先端からどの程度の拡がりを持つべきかについて明確な指針は無い。さらに、結合剛性マトリックスの積分精度の問題もある。そこで、口

Fig. 5 Definitions of the representative sizes r and L_g of the local mesh region and of an element in the global model.

Fig. 6 Center cracked tension panel and its global mesh and typical local mesh [(a) Problem statement, (b) Global finite element mesh and (c) Local finite element mesh].

Fig. 7 Three point bending problem and its global mesh and typical local mesh [(a) Problem statement, (b) Global finite element mesh and (c) Local finite element mesh].

一カル有限要素法モデル領域の代表寸法とグローバル有限要素一つの大きさの間で精度を保証するために必要な条件と 2・3 節で取り上げた積分サブ領域の有無の影響に関して調べた。図 5 に示すように長方形のローカル有限要素領域をグローバル有限要素領域上に重ね合わせ、その代表寸法を r とする。 r はき裂先端から前方と上方へのローカル有限要素領域境界までの距離を表す。また、グローバル有限要素 1 個の代表寸法を L_g とする。

図 6 に中央き裂問題、図 7 に三点曲げ問題で使用した典型的な要素分割を示す。図 6 (b), 7 (b) でシェイディングを施した部分は、ローカルメッシュを重ね合わせる典型的な領域を示す。それぞれの問題に対して、三種類のき裂長さを設定し、ローカル有限要素領域の代表寸法 r とグローバル有限要素の代表寸法 L_g の比を様々に設定し、解析を行い応力拡大係数を VCCM 法により計算した。また、同じ条件のもとで積分サブ領域 (10×10) を設定する場合としない場合で解析を行っている。それらの結果を理論解⁹⁾と比較した誤差を図 8 に示す。

図 8 によれば、積分サブ領域を設定するしないに係わらず、比 r/L_g が 1 未満で解析を行った結果には大きな誤差が含まれているが、積分サブ領域を使用し、比 r/L_g を 1 以上とした場合の誤差はほぼ同等になる

Fig. 8 Error vs. r/L_g for the problems of (a) center cracked panel and (b) three point bend specimen.

ことがわかる。積分サブ領域を使用しない場合は、比 r/L_g を 1 以上としても誤差が大きくなることもある。ローカル有限要素法モデル領域の代表寸法 r がグローバル有限要素 1 個のそれに L_g に比較して大きいと同様であることと積分サブ領域の使用が、精度良く応力拡大係数を求めるために必要なことを示している。

なお、三点曲げ問題の結果では、積分サブ領域を使用した場合 $r/L_g \geq 1$ において誤差がほぼ一定値 (約 1%) に収束するが、積分サブ領域無しの場合は誤差の大きさにばらつきがあり、誤差が小さくなる場合も多く見られる。積分誤差による解析精度劣化は積分サブ領域の使用により改善が可能であり、積分サブ領域を使用した場合は誤差がある一定値に収束したのであろう。図 7 に示すようにグローバル有限要素法モデルは非常に粗いため、三点曲げ問題におけるリガメント部の曲げ変形を適切に評価にできなかった可能性があるが、中央き裂問題ではこのような問題は発生しない。このことが、三点曲げ問題において積分サブ領域を使用しても 1% 程度の誤差が発生した原因の一つと思われる。

4・2 混合モードき裂問題への適用 重合メッシュ法のき裂問題のモデル生成が容易であるという特長を生かし、き裂にキंकのある混合モードき裂の解析を行った例を示す。

図 9 にき裂の様相 (ステップ 1 (直線き裂) からステップ 4 まで) を示す。これらは、混合モード荷重下における疲労き裂進展を模したものである。図 10 にグローバル有限要素法モデルと典型的なローカル有限要素法モデル (ステップ 4) を示す。き裂の周辺だけローカル有限要素法モデルを配置すればよく、き裂モデルの生成は比較的容易である。なお、図 10 の解析モデルは前節の解析結果から得られた、精度よくき裂解析をおこなうための条件 ($r/L_g \geq 1$) を満足する。また、積分サブ領域は 10×10 を設定した。

重合メッシュ法解析の結果から VCCM 法により得られた応力拡大係数を表 1 に示す。ステップ 1 に関して重合メッシュ法の解析結果を厳密解⁹⁾と、ステップ 2~4 は有限要素法の解析結果と比較した。厳密解との誤差、有限要素法による解との差は両者 1% 以内であり、重合メッシュ法で精度よく応力拡大係数を求めることができたといえる。

4・3 弾塑性き裂問題の解析 中央き裂 (図 6(a)と同様であり、 $a/W = 0.3$) が一様引張り応力 σ を受けた場合の 1/4 モデル解析を行い、有限要素法解析との比較を行った。有限要素法の応力積分法は後退

Fig. 9 Mixed mode kinked crack problems.

Fig. 10 Global and a typical local mesh discretizations the mixed mode kinked crack problem.

型オイラー法，収束計算には Newton-Raphson 法を用いた．解析に用いたヤング率，ポアソン比，加工硬化率，降伏応力を図 11 中に示す．bilinear 硬化則を仮定した．解析に用いたグローバル有限要素法モデルとローカル有限要素法モデルを図 12 に示す．図 12

Table 1 Stress intensity factors calculated by s-FEM and FEM for the problems of kinked cracks (Step 1~4)

	K_I, K_{II} (MPa mm ^{1/2})	s-FEM +VCCM	FEM/ Analytical Sol.	Error/ Difference [%]
Step1	K_I	113.80	112.80	0.89
	K_{II}	-113.26	-112.80	0.41
Step2	K_I	240.10	242.11	0.83
	K_{II}	94.77	95.53	0.80
Step3	K_I	328.48	329.71	0.37
	K_{II}	122.34	122.91	0.46
Step4	K_I	445.27	447.67	0.54
	K_{II}	123.46	124.58	0.90

(a) 中のシェーディングを施した領域にローカルメッシュを重ね合わせた．ローカル有限要素法モデル領域の大きさは解析精度を保証する上で必要な $r/Lg \geq 1.0$ を満足する．ローカル有限要素に対する積分用のサブ領域は一つのローカル有限要素内で 9×9 とした．グローバル有限要素に対してもサブ領域を 29×29 設定した．これは，グローバルモデル上で塑性ひずみの分布等を正確に表すためである．J 積分経路はローカル有限要素法モデル上に点線で示したように 5 経路設定した．参照解として使用した有限要素法解析で用いたモデルは，き裂近傍で重合メッシュ法のローカル有限要素法モデルと同じである．

重合メッシュ法と有限要素法の弾性解析結果（試験片上端に与えた応力は $\sigma/\sigma_Y = 1.81 \times 10^{-4}$ ）を理論解⁹⁾と照らし合わせた結果を表 2 に示す．さらに塑性変形が生じた直後と塑性変形が進行した段階（ $\sigma/\sigma_Y = 0.37, 0.46$ ）の J 積分値をそれぞれ表 3 に示す．ただし表中の J_1 は全 5 経路中塑性域を通らない経路の平均値を示している．また $\sigma/\sigma_Y = 0.46$ における降伏域の分布を図 13 に示した．以上の比較により，重合メッシュ法弾塑性解析の精度は有限要素法解析と比較して 1% 程度の差であることが確かめられた．

5. 結 言

本報では，重合メッシュ法の二次元破壊力学問題に対する適用について報告した．破壊力学解析における，き裂パラメータの計算や精度をある程度保証するための条件について議論を行った．精度を保証するためには，結合剛性マトリックスを積分するための積分サブ領域の使用が有効であり，さらにローカル有限要素法モデル領域の大きさがグローバル有限要素法モデルの

Fig. 11 One-dimensional stress-strain curve.

Fig. 12 Center cracked tension panel and its global mesh and typical local mesh [(a) Global finite element mesh and (b) Local finite element mesh].

要素一つの大きさと同等かそれより大きいことが必要なことがわかった。

モード I き裂問題だけでなく、混合モードき裂問題、あるいは弾塑性き裂問題に対しても精度良くき裂パラメータを求めることができた。重合メッシュ法はき裂材のモデル生成が容易であるという特長は、二次元問題よりも三次元問題でより顕著に表れるであろう。今後は三次元問題にもチャレンジしてゆきたい。

文 献

- (1) Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **30**(1994), 229-256.
- (2) Yagawa, G., Yamada, T., *Comput. Mech.*, **18**(1996), 383-386.
- (3) Belytschko, T., Black, T., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **45**(1999), 601-620.
- (4) Fish, J., Markolefas, S., Guttal, R., Nayak, P., *Appl. Numer. Mathematics*, **14**(1994), 135-164.
- (5) Fish, J., Guttal, R., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**(1996), 3461-3662.
- (6) 岡田, 遠藤, 菊池, 機構論, **No02-02**, (2002), 665-666.
- (7) 岡田, 遠藤, 菊池, 機構論, **No03-26**, (2003), 599-600.

(a)

(b)

Fig. 13 The results of Plastic area [(a) is S-FEM analysis, (b) is FEM analysis].

Table 2 Comparisons on J integral value between theoretical solution and that by S-FEM and that by FEM.

Applied stress $\sigma/\sigma_Y = 1.81 \times 10^4$	J_I [10 ⁶ MPa mm]	Error [%]	Analytical Sol.
S-FEM+J-integral	4.611	0.36	4.628
FEM+J-integral	4.655	0.59	

Table 3 J integral values calculated by S-FEM and FEM and differences between S-FEM and FEM.

Applied stress σ/σ_Y	S-FEM +J-integral [MPa mm]	Difference [%]	FEM +J-integral [MPamm]
0.37	0.996	0.806	1.005
0.46	1.507	0.786	1.519

- (8) 岡村, 破壊力学と材料強度講座 I 線形破壊力学入門, (1976), 培風館
- (9) 山田, 塑性力学, (1986), 日刊工業新聞社
- (10) 野口, 久田, 非線形有限要素法の基礎と応用, (1996), 丸善
- (11) 鷺津 他, 有限要素法ハンドブック基礎編, (1981), 培風館
- (12) 小国, 村田 他, 行列計算ソフトウェア, (1991), 丸善
- (13) 奥野, 高野, 座古, 機構論, **No03-26**, (2003), 603-604
- (14) Rybicki, E.F., Kanninen, M.F., *Engng. Fract. Mech.*, **9**(1977), 931-938.
- (15) Maiti, S.K., *Engng. Fract. Mech.*, **41-3**(1992), 339-348.
- (16) Barsoum, R.S., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **10**(1976), 25-37.
- (17) Rice, J.R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **35**(1968), 379-386.