圧力敏感性材料を対象にした Rudnicki らの せん断帯解析に生じる境界条件の乱れ*

守 時 一^{*1}, 及 川 洋^{*2}, 荻 野 俊 寛^{*2}

Boundary Condition Disturbed in Shear Banding Analysis by Rudnicki and Rice for Pressure Sensitive Materials

Hitoshi MORITOKI^{*3}, Hiroshi OIKAWA and Toshihiro OGINO

^{*3} 4-15, Higashi-3, Ohgata, Minami-Akita-gun, Akita, 010-0442 Japan

Rudnicki and Rice investigated the localization of deformation into a shear band resulted from an instability in constitutive description of homogeneous deformation in pressure sensitive dilatant materials. Their analytical method has been used very often for the prediction of shear banding in soil. In their analysis the equilibrium is considered between multiple solutions in the perpendicular direction to a shear band, but the essential requirement is ignored that these multiple solutions are under identical boundary condition. This paper shows concretely the disturbance of boundary condition appeared in the onset of instability in their method. This disturbance results in the fact that their method cannot give useful prediction for ductile fracture in soil.

Key Words: Pressure Sensitive Materials, Soil, Multiplicity, Shear Banding, Shear Mode, Plane Strain Compression

1. 緒 言

降伏応力が静水圧応力に依存する材料に土質材料や粉末金属を挙げることができる。これらの材料では圧縮応力場においても、せん断帯の発生することが知られている。せん断帯は、これまで3次元的に広がっていた塑性変形域が平面的に局所化した状態であり、近い将来この領域に亀裂の発生が予想される。このことから、せん断帯の発生は破壊予測との関連において非常に重要な研究課題としてこれまで取り上げられてきた。Rudnicki らはこの種の材料に対してせん断帯発生を予測する解析手法を提案した⁽¹⁾。本論文は彼等の手法に従って得られた解の性質について論じている。

Rudnicki らのせん断帯発生予測についての解析は速度勾配に多価性の現れることを前提としている⁽¹⁾。ここでは、多価解の存在可能性が変形特性との関連において考察されているが、残念ながら境界条件の一部を配慮することなく論じられた。この無視された条件を考慮し厳密な考察を進めると、前提としていた速度勾

配の多価性そのものの存在が否定される結果となる⁽²⁾。このような経緯から本論文では、Rudnicki らのせん断帯解析において彼等が無視した境界条件にどのような乱れが現れているかを具体的に検証することを試みた。塑性変形が静水圧応力に依存性を示す素材を考察対象としていることから、変形特性を表す各種因子は変形の各々の過程で互いに複雑に関連している。しかし、Rudnicki らの行ったせん断帯解析ではこれら因子間の関連についての配慮はなく、全体としての見通しは具体的でない。そこで本論文では、Rudnicki らの手法に基づくせん断帯発生状況を一般論で論じた後、変形挙動の調査されている土質素材に関して具体的に調べた。

2. 構成式

Rudnicki らが彼等のせん断帯解析で適用した弾塑性構成式について概要を説明する。

応力成分、ひずみ速度成分をそれぞれ σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}^R$, それらの偏差成分を σ'_{ij} , $\dot{\epsilon}'_{ij}{}^R$ とする。ひずみ速度成分に関して上添字RはEあるいはPを表し、これらはそれぞれ弾性成分、塑性成分であることを識別している。このとき、

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij}\sigma \quad \dots\dots\dots (1a)$$

* 原稿受付 2004 年 3 月 15 日。

^{*1} 正員, 自宅(☎ 010-0442 秋田県南秋田郡大潟村東3-4-15)。

^{*2} 秋田大学工学資源学部(☎ 010-8502 秋田市手形学園町1-1)。

E-mail: moritoki@coral.plala.or.jp

$$\dot{\epsilon}_{ij}^R = \dot{\epsilon}_{ij}^{R'} + \delta_{ij} \frac{1}{3} \dot{\epsilon}^R \quad (R = E \text{ or } P) \quad \dots\dots (1b)$$

の関係にあり, σ , $\dot{\epsilon}^R$ はそれぞれ静水圧引張り応力と体積ひずみ速度

$$\sigma \equiv \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad \dot{\epsilon}^R \equiv \dot{\epsilon}_{kk}^R \quad \dots\dots (2)$$

である. 全ひずみ速度成分は弾性成分と塑性成分の和

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^E + \dot{\epsilon}_{ij}^P, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^E = \dot{\epsilon}_{ij}^{E'} + \dot{\epsilon}_{ij}^{E''}, \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^P \quad (3)$$

であると仮定する.

弾性変形は, フックの法則に従うとき

$$\dot{\epsilon}_{ij}^E = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}' \quad \dots\dots (4a)$$

$$\dot{\epsilon}^E = \frac{1}{K} \dot{\sigma} \quad \dots\dots (4b)$$

で関係付けられている. ここで, G は横弾性係数, K は体積弾性係数を表し, これらはポアソン比を ν として

$$K = 2G \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \quad \dots\dots (5)$$

の関係にある. 式 (4) を式 (1b) に代入して

$$\dot{\epsilon}_{ij}^E = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}' + \delta_{ij} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \dot{\sigma} \quad \dots\dots (6)$$

となる. ここで, 応力速度に付している上添字 J は Jaumann の成分であることを表す.

塑性変形では関連則に従って偏差ひずみ速度を

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \frac{\dot{\gamma}^P}{2\tau} \sigma_{ij}' \quad \dots\dots (7)$$

で表す. ここで, τ , $\dot{\gamma}^P$ は相当偏差応力, 相当塑性偏差ひずみ速度で, それぞれ

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'}, \quad \dot{\gamma}^P \equiv \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P} \quad \dots\dots (8)$$

で定義している. Rudnicki らは, 塑性体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^P$ は相当塑性偏差ひずみ速度と

$$\dot{\epsilon}^P = \zeta \dot{\gamma}^P \quad \dots\dots (9)$$

で関係付けられるものと仮定している. ここで, ζ は材料定数である. したがって, 式 (7), (9) より塑性成分では

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \left(\frac{1}{2\tau} \sigma_{ij}' + \delta_{ij} \frac{1}{3} \zeta \right) \dot{\gamma}^P \quad \dots\dots (10)$$

の関係になる.

式 (3) により全ひずみ速度が表され, 式 (4b) から

$$\dot{\sigma} = K(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^P) \quad \dots\dots (11)$$

であるので, これを用いて式 (6) より

$$\sigma_{ij}' = \left\{ \dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left(K^* - \frac{1}{3} \right) \dot{\epsilon} \right\} - \left\{ \dot{\epsilon}_{ij}^P + \delta_{ij} \left(K^* - \frac{1}{3} \right) \dot{\epsilon}^P \right\} \quad \dots\dots (12)$$

を得る. ここで, 上添記号*は応力関連項を $2G$ で除した無次元値を表す. 例えば

$$\sigma_{ij}'^* \equiv \frac{1}{2G} \sigma_{ij}', \quad K^* \equiv \frac{K}{2G} = \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \quad \dots\dots (13)$$

である. σ_{kl}' と $\dot{\epsilon}_{kl}$ の積和を求めると

$$\sigma_{kl}' \dot{\epsilon}_{kl} = \tau (2\dot{\epsilon}^{J*} + \dot{\gamma}^P) \quad \dots\dots (14)$$

の関係にある. Rudnicki らは塑性変形下における硬化係数 h を, 関連因子 μ を導入して

$$h\dot{\gamma}^P = \dot{\epsilon}^J + \mu \dot{\sigma} \quad \dots\dots (15)$$

で表している. 式 (14), (15) より $\dot{\epsilon}^J$, $\dot{\epsilon}^{J*}$ を消去すると

$$(1 + 2h^*) \dot{\gamma}^P = \frac{1}{\tau} \sigma_{kl}' \dot{\epsilon}_{kl} + 2\mu \dot{\sigma}^* \quad \dots\dots (16)$$

を得る. 式 (9), (11) より

$$\dot{\sigma}^* = K^* (\dot{\epsilon} - \zeta \dot{\gamma}^P) \quad \dots\dots (17)$$

であるので, これを式 (16) に代入して

$$\dot{\gamma}^P = L (N_{kl} + \mu K^* \delta_{kl}) \dot{\epsilon}_{kl} \quad \dots\dots (18)$$

と表すことができる. ここで

$$L \equiv \frac{2}{1 + 2h^* + 2\mu \zeta K^*}, \quad N_{kl} \equiv \frac{\sigma_{kl}'}{2\tau} \quad \dots\dots (19)$$

と置いている. 式 (12) に式 (9), (10) を代入し, 式 (18) を用いて, 応力速度は

$$\sigma_{ij}'^* = \dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left(K^* - \frac{1}{3} \right) \dot{\epsilon}_{kk} - L (N_{ij} + \zeta K^* \delta_{ij}) (N_{kl} + \mu K^* \delta_{kl}) \dot{\epsilon}_{kl} \quad \dots\dots (20)$$

となる.

3. 速度勾配差と公称応力速度差の関係

平衡条件や境界条件の一意性を評価するに必要な基礎関係式を誘導する.

公称応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ は速度勾配 $v_{i,j}$ を介して応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ と

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{jk} v_{i,k} + \sigma_{ij} v_{k,k} \quad \dots\dots (21)$$

の関係にある. ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ と剛体回転速度 ω_{ij} はそれぞれ

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} - v_{i,j}) \quad \dots\dots (22)$$

である. また, Jaumann の応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}'$ は

$$\dot{\sigma}_{ij}' = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ki} \omega_{kj} - \sigma_{kj} \omega_{ki} \quad \dots\dots (23)$$

で関係付けられている. これらより

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}' + \sigma_{ki} \omega_{kj} - \sigma_{kj} \dot{\epsilon}_{ki} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{k,k} \quad \dots\dots (24)$$

となる.

せん断帯に関して, そのせん断面を境に多価の解が出現した場合を想定する. 多価となった解を任意に二つ選り, これらの差に対して Δ を付して表す. 式 (24) より

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = \Delta \dot{\sigma}_{ij}' + \sigma_{ki} \Delta \omega_{kj} - \sigma_{kj} \Delta \dot{\epsilon}_{ki} + \sigma_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{k,k} \quad \dots\dots (25)$$

を得る. Rudnicki らは座標軸 x_2 方向に対して垂直に不連続が発生し, 座標軸 (x_1, x_3) が多価解の境界面 (不連続面) になった状態を想定している. このとき, 速度勾配の不連続面に関する差を

$$\Delta v_{i,j} = g_i \delta_{j2} \quad \dots\dots (26)$$

で表している. したがって, 式 (22) より

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (g_j \delta_{i2} + g_i \delta_{j2}) \quad \dots\dots\dots (27a)$$

$$\Delta \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} (g_j \delta_{i2} - g_i \delta_{j2}) \quad \dots\dots\dots (27b)$$

であるので、これらを式 (25) に代入して

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij} &= \Delta \dot{\sigma}_{ij}' + \frac{1}{2} \sigma_{2i} g_j - \frac{1}{2} \sigma_{2j} g_i \delta_{i2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma_{2j} g_i - \frac{1}{2} \sigma_{2i} g_j \delta_{i2} + \sigma_{ij} g_2 \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

となる。彼らは不連続面に関する平衡条件として

$$\Delta \dot{\sigma}_{2j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad \dots\dots\dots (29)$$

を与えている。これは

$$\Delta \dot{\sigma}_{2j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad \dots\dots\dots (30)$$

と等価である。

Rudnicki らは、最初に近似的な取り扱いとして

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij}' \approx \Delta \dot{\sigma}_{ij} \quad \dots\dots\dots (31)$$

を仮定し、有為な g_i ($i=1,2,3$) の存在条件を検討している。しかし、後半では、

$$g_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

の拘束条件の下ではあるが、式 (31) の近似を行うことなく考察している。本論文では境界条件の乱れを検討することを目的としているので、ここでは最初から厳密な取り扱いを目指し式 (32) の拘束下で検討を進めることにする。これにより座標軸 x_3 方向に関する多価性についての考察は必要でなくなる。式 (28) に関して今後考察を必要とする成分は式 (32) の条件下で

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{11} &= \Delta \dot{\sigma}_{11}' + \sigma_{11} g_2 \\ \Delta \dot{\sigma}_{12} &= \Delta \dot{\sigma}_{12}' - \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) g_1 + \sigma_{12} g_2 \quad \dots (33) \\ \Delta \dot{\sigma}_{21} &= \Delta \dot{\sigma}_{12}' - \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) g_1 \\ \Delta \dot{\sigma}_{22} &= \Delta \dot{\sigma}_{22}' - \sigma_{12} g_1 \end{aligned}$$

である。

次に、Jaumann の応力速度差は式 (20) より

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij}' &= \Delta \dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left(K^* - \frac{1}{3} \right) \Delta \dot{\epsilon}_{kk} \\ &\quad - I_1 (N_{ij} + \zeta K^* \delta_{ij}) (N_{kl} + \mu K^* \delta_{kl}) \Delta \dot{\epsilon}_{kl} \quad (34) \end{aligned}$$

である。これに式 (27a) を適用すると

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij}' &= \frac{1}{2} (g_j \delta_{i2} + g_i \delta_{j2}) + \delta_{ij} \left(K^* - \frac{1}{3} \right) g_2 \\ &\quad - L (N_{ij} + \zeta K^* \delta_{ij}) (N_{2k} g_k + \mu K^* g_2) \quad \dots (35) \end{aligned}$$

となる。具体的には式 (32) の条件下で

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{11}' &= \left(K^* - \frac{1}{3} \right) g_2 - L (N_{11} + \zeta K^*) R \\ \Delta \dot{\sigma}_{12}' &= \frac{1}{2} g_1 - L N_{12} R \quad \dots\dots\dots (36) \\ \Delta \dot{\sigma}_{22}' &= \left(K^* + \frac{2}{3} \right) g_2 - L (N_{22} + \zeta K^*) R \end{aligned}$$

である。ここで

$$R \equiv N_{12} g_1 + (N_{22} + \mu K^*) g_2 \quad \dots\dots\dots (37)$$

と置いている。

式 (36) を式 (33) に代入し

$$\Delta \dot{\sigma}_{11} = \left(K^* - \frac{1}{3} + \sigma_{11}' \right) g_2 - L (N_{11} + \zeta K^*) R \quad \dots (38a)$$

$$\Delta \dot{\sigma}_{12} = \frac{1}{2} (1 - \sigma_{11}' - \sigma_{22}') g_1 + \sigma_{12}' g_2 - L N_{12} R \quad (38b)$$

$$\Delta \dot{\sigma}_{21} = \frac{1}{2} (1 - \sigma_{11}' + \sigma_{22}') g_1 - L N_{12} R \quad \dots\dots\dots (38c)$$

$$\Delta \dot{\sigma}_{22} = -\sigma_{12}' g_1 + \left(K^* + \frac{2}{3} \right) g_2 - L (N_{22} + \zeta K^*) R \quad \dots\dots\dots (38d)$$

を得る。式 (38) がこれからの議論における基礎式である。

4. 多価性の発生条件

式 (30) の平衡条件に式 (38c, d) の $\Delta \dot{\sigma}_{2j}'$ ($j=1,2$) を適用すると、それぞれから

$$\begin{aligned} C_1 g_1 + C_2 g_2 &= 0 \quad \dots\dots\dots (39) \\ D_1 g_1 + D_2 g_2 &= 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \frac{1}{2} - \tau' (N_{11} - N_{22}) - L N_{12}^2 \\ C_2 &\equiv -L N_{12} (N_{22} + \mu K^*) \quad \dots\dots\dots (40) \\ D_1 &\equiv -2\tau' N_{12} - L (N_{22} + \zeta K^*) N_{12} \\ D_2 &\equiv K^* + \frac{2}{3} - L (N_{22} + \zeta K^*) (N_{22} + \mu K^*) \end{aligned}$$

である。この演算においては、定義に基づいて

$$\sigma_{ij}' = 2\tau' N_{ij} + \delta_{ij} \sigma' \quad \dots\dots\dots (41)$$

の関係を適用している。式 (39) において有意な g_i が存在するには、式 (39) で係数行列式が零となる

$$C_1 D_2 - C_2 D_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

の条件が必要である。これより、このときの L を L_R と表し

$$L_R = \frac{A_0}{A_1} \quad \dots\dots\dots (43)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv \left(K^* + \frac{2}{3} \right) \left\{ \frac{1}{2} - \tau' (N_{11} - N_{22}) \right\} \quad \dots (44) \\ A_1 &\equiv N_{12}^2 \left(K^* + \frac{2}{3} \right) + 2\tau' N_{12}^2 (N_{22} + \mu K^*) \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} - \tau' (N_{11} - N_{22}) \right\} (N_{22} + \zeta K^*) (N_{22} + \mu K^*) \end{aligned}$$

である。このとき得られる有為な g_1 と g_2 についてこれらの比は

$$g = \frac{g_2}{g_1} = -\frac{C_1}{C_2} = -\frac{D_1}{D_2} \quad \dots\dots\dots (45)$$

である。

せん断帯の発生観察にあたって、これまで速度勾配の不連続面に垂直な方向に座標軸 x_2 を採ってきた。ここで、応力の主方向にある座標軸 $\bar{x}_1$ を導入する。式 (32) の前提条件から

$$\bar{x}_3 = x_3 \quad \dots\dots\dots (46)$$

である。座標面 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ において座標軸 x_2 が座標軸 $\bar{x}_1$ となす角度を ξ とし、これを形態角度と呼ぶ。主方向に関するテンソル成分には上記号⁻を付し、1つの添字

で表すことにする。このとき、

$$\begin{aligned} N_{11} &= \bar{N}_1 \sin^2 \xi + \bar{N}_2 \cos^2 \xi \\ N_{22} &= \bar{N}_1 \cos^2 \xi + \bar{N}_2 \sin^2 \xi \quad \dots\dots\dots (47) \\ N_{12} &= (\bar{N}_1 - \bar{N}_2) \sin \xi \cos \xi \end{aligned}$$

である。偏差応力の定義と式 (8) より

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3 &= 0 \quad \dots\dots\dots (48) \\ \bar{N}_1^2 + \bar{N}_2^2 + \bar{N}_3^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

の関係にあるので、

$$N \equiv \bar{N}_3 \quad \dots\dots\dots (49)$$

と置くと

$$\bar{N}_1, \bar{N}_2 = \frac{1}{2} (-N \pm \sqrt{1 - 3N^2}) \quad \dots\dots\dots (50)$$

で与えられる。したがって、 N と ξ を指定することでせん断面に関する N_{ij} は特定することができる。材料定数ならびに応力値の設定については付録を参照いただきたい。式 (45) から求められる不連続速度勾配比 g を図1に示す。 g は形態角度 ξ に依存して変化している。式 (43) より求められる硬化因子 $1/L_R$ の変化を図2に示す。式 (19) より $1/L$ の増減は h^* の増減とは逆の関係にある。Rudnicki らは h^* が最大となる方向がせん断帯の形態に関係するとして議論を進めているが、こ

れには何の根拠もない。 h^* の最小値は零であり、これに対応する $1/L$ を $(1/L)_{\min}$ で表した。図2で示した $1/L_R$ は $\xi \approx 0.7$ 近傍で $(1/L)_{\min}$ にほぼ接しているが、それ以外では $(1/L)_{\min}$ を下回っている。このような $1/L_R$ を得るには h^* は負値でなければならないので、ここで求められた不連続速度勾配の存在は架空なものである。

式 (38c, d) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1} \Delta \dot{s}_{21}^* &= \frac{1}{2} - \tau^* (N_{11} - N_{22}) \\ &\quad - LN_{12} \left\{ N_{12} + (N_{22} + \mu K^*) g \right\} \quad \dots\dots\dots (51) \\ \frac{1}{g_1} \Delta \dot{s}_{22}^* &= -2\tau^* N_{12} + \left(K^* + \frac{2}{3} \right) g \\ &\quad - L (N_{22} + \zeta K^*) \left\{ N_{12} + (N_{22} + \mu K^*) g \right\} \end{aligned}$$

の関係にある。これに式 (45) を代入すると当然の結果ではあるが、

$$\frac{1}{g_1} \Delta \dot{s}_{21}^* = 0, \quad \frac{1}{g_1} \Delta \dot{s}_{22}^* = 0 \quad \dots\dots\dots (52)$$

を得る。 g_1 は有為な値を持ち一般に零ではないことから、式 (45) で算出された不連続速度勾配は平衡条件、式 (30) の要請に依っている。

5. 境界条件の乱れ

本解析では、座標軸 x_2 に垂直な平面が多価解の不連続面であるとしている。さらに、式 (32) の条件から座標軸 x_3 方向に関しては一律な速度勾配が指定されている状態にある。したがって、残る境界条件は座標軸 x_1 方向に関するものである。多価解が発生すると、これに伴って不連続面が現れる。この不連続面を境とする両側領域を領域A、領域Bと呼ぶことにする。これら領域A、Bでは多価解発生の如何に拘らず同一の境界条件が課せられていなければならない。これは

$$\Delta \dot{s}_{ij} = 0 \quad (j=1,2) \quad \dots\dots\dots (53)$$

であることを要請している⁽²⁾。式 (41) を考慮して式 (38a, b) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1} \Delta \dot{s}_{11}^* &= -L (N_{11} + \zeta K^*) N_{12} \\ &\quad + \left\{ K^* - \frac{1}{3} + 2\tau^* N_{11} + \sigma^* \right. \\ &\quad \left. - L (N_{11} + \zeta K^*) (N_{22} + \mu K^*) \right\} g \quad \dots\dots\dots (54) \\ \frac{1}{g_1} \Delta \dot{s}_{12}^* &= \frac{1}{2} - \tau^* (N_{11} + N_{22}) - \sigma^* - LN_{12}^2 \\ &\quad + \left\{ 2\tau^* N_{12} - L (N_{22} + \mu K^*) N_{12} \right\} g \end{aligned}$$

を得る。不連続速度勾配発生時を考察対象としているので、ここでは $L = L_R$ である。不連続速度勾配比に式 (45) を代入し、硬化因子に式 (43) を適用することで、これらが式 (53) の条件を満足しているか否かを

Fig.1 Dependence of discontinuous velocity gradient ratio on mode angle

Fig.2 Relation between hardening factor and mode angle

検証することができる。これには静水圧引張り応力 σ^* 値の指定が必要となる。式(54)から算出される $\Delta s_{ij}^*/g_1$ ($j=1,2$)を図3に示す。 $\Delta s_{12}^*/g_1$ は $\xi \approx 0.7$ で零を満足するが、これ以外では $\Delta s_{11}^*/g_1$ も $\Delta s_{12}^*/g_1$ も零とは異なる値を持つ。それゆえ、これらは、通常は、式(53)の条件を満足していない。したがって、Rudnicki らの解析においてはせん断帯の発生時点で境界条件に乱れが現れる結果となっている。

Fig.3 Disturbance of boundary conditions

6. せん断帯発生の予測性

Rudnicki らの規準を変形挙動が観察されている土質材料に適用し、そこでのせん断帯発生の予測性を検討する。これまで土質力学では、降伏関数(相当偏差応力 q と静水圧応力 p との間の関係)を変形挙動の観察結果から同定する試みはほとんどなされていない。しかし、降伏関数は変形挙動と密接な関係にあり、この関係を無視することは議論を空論化するおそれがあると考えられる。そこで、筆者らは変形挙動から降伏関数を求める手法を提案している。ここでは、これを適用する⁽³⁾。以下の議論においては、ひずみ、ひずみ速度の弾性成分は省略できるものと仮定し、塑性成分のみを考察の対象とした。

Rudnicki らが用いた構成式と硬化因子を2章で説明したが、これらは土質力学で通常適用されている定義とはいくぶん異なっている。そこで、まず最初に、一部の因子に関して通常の定義との間の関連を示す。

相当偏差応力と相当塑性偏差ひずみ速度は通常

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_q^P \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P} \quad \dots (55)$$

で定義されている。式(8)と比較し、

$$q = \sqrt{3} \tau, \quad \dot{q} = \sqrt{3} \dot{\tau} \quad \dots (56a)$$

$$\dot{\epsilon}_q^P = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\gamma}^P \quad \dots (56b)$$

の関係にある。

つぎに硬化特性についてであるが、筆者らは塑性変

形過程における軟化現象の曖昧さを回避する目的で、体積圧縮塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_v^P$ に相当塑性偏差ひずみ速度を $\dot{\epsilon}_q^P$ 加えた硬化ひずみ速度(硬化に寄与するひずみ速度) $\dot{\epsilon}_v$ を

$$\dot{\epsilon}_v = a \dot{\epsilon}_q^P + b \dot{\epsilon}_v^P \quad \dots (57)$$

として導入した。ここで、

$$\dot{\epsilon}_v^P = -\dot{\epsilon}^P \quad \dots (58)$$

であり、係数 a, b を硬化比率定数と呼び、塑性変形の過程において $\dot{\epsilon}_v > 0$ の要請を満足するように

$$a + b = 1 \quad (a \geq 0, b \geq 0) \quad \dots (59)$$

の限定した範囲内で正值として設定している。

いま、 p, q の依存関係を降伏関数あるいは降伏曲線と呼び、

$$f(p, q, p_v) = 0 \quad \dots (60)$$

で表す。ここで

$$p = -\sigma, \quad \dot{p} = -\dot{\sigma} \quad \dots (61)$$

であり、 p_v は、土質材料の塑性変形に伴う硬化の状態を表す変数であり、硬化相当圧力と呼んでいる。降伏関数 f を時間微分すると

$$\dot{f} = M_p \dot{\sigma}_p + M_q \dot{q} = 0 \quad \dots (62)$$

の関係にある。ここで、

$$M_p \equiv \int_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_p} + \int_q \frac{\partial f}{\partial \sigma_q}, \quad M_q \equiv \frac{\partial f}{\partial p_q} \quad \dots (63)$$

$$f_p \equiv \frac{\partial f}{\partial p}, \quad f_q \equiv \frac{\partial f}{\partial q}$$

と置いている。塑性ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\Lambda} M_{ij} \quad \dots (64)$$

で与えられ、ここで、 $\dot{\Lambda}$ はひずみ速度比例係数である。これより

$$\dot{\epsilon}_p^P = \dot{\Lambda} f_p, \quad \dot{\epsilon}_q^P = \dot{\Lambda} f_q \quad \dots (65)$$

の関係にある。 p_v は硬化の程度を表し、 p_v の $\dot{\epsilon}_v$ に関する依存性が素材の硬化特性である。これを

$$p_v = h_v(\dot{\epsilon}_v) \quad \dots (66)$$

と置くと、式(57)、(65)より

$$\dot{p}_v = h_v' (a \dot{\epsilon}_q^P + b \dot{\epsilon}_v^P), \quad h_v' \equiv \frac{dp_v}{d\dot{\epsilon}_v} \quad \dots (67)$$

となる。

Rudnicki らは相当塑性偏差ひずみ速度と塑性体積ひずみ速度の関係を式(9)で仮定している。これは式(56b)、(58)より

$$\dot{\epsilon}_v^P = -\sqrt{3} \zeta \dot{\epsilon}_q^P \quad \dots (68)$$

であり、したがって

$$\zeta = -\frac{1}{\sqrt{3}} f_r \quad \dots (69)$$

で関係付けられる。ここで

$$f_r \equiv \frac{f_p}{f_q} \quad \dots (70)$$

である。式 (65) , (69) を考慮して式 (64) は

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \sqrt{3} \zeta \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_q^p \quad \dots\dots\dots (71)$$

となる。これは Rudnicki らの表現、式 (10) に対応するものである。

式 (60) の時間微分は

$$\dot{f} = f_p \dot{p} + f_q \dot{q}^j + M_y \dot{p}_y = 0 \quad \dots\dots\dots (72)$$

と表現することもできる。これに式 (57) , (69) を考慮して

$$\dot{q}^j + f_p \dot{p} = -\frac{1}{f_q} M_y h_y' (a - \sqrt{3} \zeta b) \dot{\varepsilon}_q^p \quad \dots\dots\dots (73)$$

を得る。式 (73) が式 (15) との対応関係を与えている。これらを比較して

$$\mu = -\frac{f_p}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots\dots (74a)$$

$$h = -\frac{1}{3 f_q} M_y h_y' (a - \sqrt{3} \zeta b) \quad \dots\dots\dots (74b)$$

である。関連則に従っているの、式 (69) , (74a) の比較から

$$\mu = \zeta \quad \dots\dots\dots (75)$$

となっている。非関連則として $\mu \neq \zeta$ と置くことも一見可能に見えるが、偏差成分が関連則に基づいて式 (7) で設定されているので、 $\mu \neq \zeta$ とすることは論理的にそぐわない。

塑性ひずみ速度成分を数値的に求めるには式 (60) の降伏曲線形状が判明していなければならない。これには、降伏曲線が相似膨脹することを仮定して $p_y = 1$ の降伏曲線 $f(\tilde{p}, \tilde{q}, 1) = 0$ (これを基本降伏曲線と呼ぶ) が決定されていることが必要である。上記号 $\sim$ は基本降伏曲線に関する量であることを表す。(p, q) 座標面において基本降伏曲線の動径を $\tilde{r}$ で、その偏角を θ で表すとき、変形観察から

$$\tilde{r} = k(\theta) \quad \dots\dots\dots (76)$$

が求められる。 M_y については

$$M_y = -\tilde{r} \quad \dots\dots\dots (77)$$

の関係にある。このときの、降伏曲線の動径 r は相似膨脹の仮定から

$$r = h_y \tilde{r} \quad \dots\dots\dots (78)$$

で与えられる。

参照する変形挙動として変形経過とせん断帯の発生を詳細に観察している Desrues らによる平面ひずみ圧縮実験を取り上げた⁽⁴⁾。そこでは初期圧密負荷 ($p_0=0.3\text{Mpa}$) の後、平面ひずみ圧縮変形を課し、そこで圧縮負荷応力と体積ひずみの経過が求められている。それらを図 4, 図 5 に示す。応力関連成分は p_0 で規格化している。ここで示されたひずみ値は全て塑性成分として処理した。この変形挙動に基づいて基本降伏曲

Fig.4 Development of loading stress

Fig.5 Development of volumetric strain

Fig.6 Basic yield function k(θ)

Fig.7 Hardening characteristic

線と硬化特性を同定した。基本降伏曲線を図 6 に、硬化特性を図 7 に示す。これらの同定法に関しては文献 (3) を参照いただきたい。降伏曲線の膨脹限界に関する諸量に添字 c を付して表している。硬化比率定数に関しては、変形過程において $\dot{\epsilon}_v > 0$ の状態を維持することのできる数値としてここではひとまず $a=0.4$, $b=0.6$ を設定している。

平面ひずみ圧縮実験から同定した図 6、図 7 による基本降伏曲線と硬化特性を用いて任意の負荷における変形挙動を解析的に追跡することが可能である。変形挙動の追跡法については文献 (5) を参照いただきたい。参照した Desrués らの平面ひずみ圧縮実験ではせん断帯の発生が観察されている。そこで報告されているせん断帯の形態から算出される形態角度は $\xi_c = 1.1$ である。変形追跡の各段階で応力状態 N_{ij} が算出され、さらに硬化係数 h^* が式 (77) を考慮して式 (74b) より求められる。変形追跡において判明した N_{ij} に基づいて求められる式 (19) による $1/L$ の経過を図 8 に示す。これに対して、Rudnicki らの解析でせん断帯の発生条件、式 (42) に基づく式 (43) から算出される $1/L_R$ を図 9 に

Fig.8 Dependence of hardening factor on radius angle ratio in referred experiment

Fig.9 Hardening factor needed for shear banding

示す。図 9 では、数種の形態角度 ξ をパラメータとして表示している。これら以外の形態角度に関する $1/L_R$ についてはこれから補間的に推測することが可能である。図 8 の $1/L$ は降伏曲線の膨脹限界 $\theta/\theta_c = 1$ において $(1/L)_{min}$ に漸近しているが、それ以外ではこれよりも常に大きい。それゆえ、 h^* は変形過程において正值であり、膨脹限界で零に漸近する値が得られている。これに対して、図 9 で算出された $1/L_R$ は図 8 で示された $(1/L)_{min}$ と比較してこれも常に小さな値であることから、そこでは負値となる h^* が要請されていることになる。したがって、Rudnicki らの手法で得られる硬化因子は参照実験との対比においても不自然な値を要請し、実現性に欠ける。

7. 結 言

Rudnicki らは塑性挙動が静水圧の影響を受ける膨脹性物体についてせん断帯の発生を不連続速度勾配の発生でもって予測する手法を提案した。これまで、この手法に基づいて土質材料における変形の局所化が随所で論じられてきた。しかし、そこで予測されるせん断帯の発生と形態は実現性に乏しいものであった。

Rudnicki らの解析提案では、せん断帯のせん断面に関する平衡は考慮されているが、発生する多価解が共通の境界条件下になければならないことについては問うていない。Rudnicki らの解析で考慮していない境界条件の共通性について本論文で検討した結果、多価解の間で境界条件に乱れの発生していることを実証することができた。

彼等の解析で導入されている材料定数は本来変形過程で互いに関連して変化する状況にある。このことを配慮するために、平面ひずみ圧縮実験に基づいて算出されたこれらの間の関連を導入して Rudnicki らの解析においてせん断帯発生時に要請される硬化因子を具体的に求めた。しかし、これらは現実離れた値を示す結果となった。

以上の考察から、変形速度勾配の多価性発現に関してその不連続面に関する平衡維持条件のみを配慮した、いわゆるせん断帯解析が延性破壊発端の予測性にあまりにもひ弱である原因が、境界条件の乱れに大きく関連していると考えられる。

参 考 文 献

- (1) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **23**(1975), 371-394.
- (2) 守時 一・奥山栄樹, 材料, **47**(1998), 247-252.
- (3) 守時 一・及川 洋, 土木学会, 応用力学論文集, **3**(2000).

303-312.

- (4) Desrues, J., Lanier, J. and Stutz, P., *Engineering Fracture Mechanics*, **21**(1985), 909-921.
 (5) 守時 一・ 及川 洋・ 荻野俊寛, 土木学会, 応用力学論文集, **4**(2001), 239-249.
 (6) 守時 一・ 及川 洋・ 荻野俊寛, 土木学会, 応用力学論文集, **5**(2002), 283-294.

付録：材料定数の設定

6 章では, Desrues らが行った平面ひずみ圧縮実験を参照し, 降伏曲線 (図 6) と硬化特性 (図 7) を同定した. これに基づいて平面ひずみ圧縮における変形経過を求めた. そこで算出された N , μ の経過を図 A1 に, τ , σ の経過を図 A2 に示す. 解の多価性は降伏曲線の膨脹限界 $\theta / \theta_c = 1$ に対応し⁽⁶⁾, そこでせん断帯の発生が予測されることから, せん断帯発生議論には膨脹限界における値を採用するのが適切である. そこで, せん断帯の発生評価に関して図 A1, 図 A2 を参照して材料定数は,

$$\mu = \zeta = 0.2, \quad N = -0.06 \quad \dots\dots (A-1)$$

$$\tau = 0.06 \text{MPa}, \quad \sigma = -1.0 \text{MPa}$$

とした. 弾性変形に関する材料定数については, おおまかに

$$K = 100 \text{MPa}, \quad \nu = 0.3 \quad \dots\dots (A-2)$$

と置いた.

Fig.A1 Dependence of material constants on radius angle ratio

Fig.A2 Dependence of equivalent stress and hydrostatic stress on radius angle ratio