日鑿一竅，七日而渾沌死*

北 川 浩^{*1}So Every Day they Bored One Hole, And on the Seventh Day,
Chaos (Hun Tun) DiedHiroshi KITAGAWA^{*2}^{*2} Department Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Doshisha University,
1-3 Tatara-Miyakodani, Kyotanabe-shi, Kyoto, 610-0394 Japan**Key Words:** Continuum Mechanics, Continuous Model, Discrete Model, Multi-scale Analysis,
Constitutive Equation, Real Number, Microstructure

螺旋状の階段を上りつつ一巡すると出発点の階に戻ってしまうという構図—無限階段—を描いた、エッシャーのよく知られただまし絵がある。研究・教育に携わる仕事から退いて、これまで懸命に努力を積み重ねてきたはずの来し方を少し離れた立場から顧みてみると、エッシャーのこの絵は、錯覚ではなく真実を言い当てているのではないかと思われてくることが多々あることに気付く。

序

大学に入学して最初に受けた数学の講義は実数の定義から始まった。そしてその内容は、数直線上に隙間なく並んでいるという説明からそれまでもっていた実数のイメージ、静的で平らな存在、を完全に打ち砕くものであった。端的に言えば‘奈落の底’の開示、いかにして無限に接近するかについて問い、一定の方法を取ることを要請(強要?)した上で、(隙間のないはずの)有理数間の隙間にすら恐ろしい深淵が存在するという認識を迫るものであった。そのときに同時に学んだ ε - δ 論法との間に奇妙な感覚のずれを感じたことを思い出す。 ε も δ も有限の大きさの平らな量である。ところが例えば、実数の連続性は無限小の極限に移行する過程として定義されたはずなのに、 ε - δ 論法では有限の空間(時間)認識の下でとらえられるとしている? どうもここらあたりで生じた勘違い(錯覚?)

が、以後、連続体力学を学びその応用研究を進めるにあたって決定的な影響をもってしまったらしい。

ここで問題としたいのは、「連続体モデルと離散モデルのいずれが物質の微細構造をとらえるのに適しているか」ということである。最近、頼に耳目を集めるようになった‘マルチスケール解析’の分野で、研究者の基本的スタンスとかかわって問われる問題である。‘離散モデル’とは、分子動力学法で扱われるような、物質を原子・分子の集合体ととらえるモデルを一つの代表例としておき、それにかかわらずさまざまな粒子モデルのどのようなものを想像していただいてもよい。

この問いに対して返って来るまっとうな答えは、“連続体モデルは、微視的な不均質構造が十分に多く集まった状態についての平均的な特性を表現するものであるから、あくまで実際の物質系の近似モデル、あるいは有効モデルに過ぎない。したがって当然、(適切にマイクロ構造(のダイナミクス)が反映された)離散モデルである”というものであろう。マルチスケール解析分野の研究論文のまがきには、必ずといってよいほどこの趣旨の文章とともに、(マクロスケール解析に精度・効率がよい)連続体モデルとミクロスケール特性が的確に捉えられる離散モデルをいかにして整合・連成させて解析を進めるかについての主張がなされている。このような認識は果たして正しいのであろうか。

離散モデルは、有限個の点の(運動の)集合の上に力学法則を乗せたものである。一方、実数の集合と同一視される連続体の自由度は、当然、連続濃度 ∞ をもち、その内には実に恐ろしい世界を伴っているはずである。実数の集合によって力学法則を表現した連続体モ

* 原稿受付 2005 年 6 月 20 日。

*¹ 正員、フェロー、同志社大学工学部(☎ 610-0394 京田辺市 多々羅都谷 1-3)。

[著者略歴] 1940 年生まれ。主として、材料力学・計算力学、特に、弾・塑性体の有限変形理論とその応用、材料の破壊強度を律する原子レベル構造ダイナミクスの解明などの研究に従事、2004 年まで大阪大学大学院工学研究科、現在は同志社大学工学部に勤務。

デルがとらえている構造ダイナミクスと、離散モデルのそれを比較して、後者のほうがより詳細な情報を与えるというのが前述の主張である。単純に考えるとこのような問題を設定することすらナンセンスと思われるのに、比較を行った上で逆の判断がなされている。この主張はどこがおかしい。50 年程も前に数学の講義で受けた衝撃が蘇ってくる。どこかに連続体の自由度を有限に制限してしまつて縦しとする錯覚が入り込んでいるのではないか。無限小に移行する操作を含意した ε や δ を、原子が数百個集まった物質の広がりとか、有限要素の最小メッシュサイズに対応させてしまふ如き錯覚!?

破

連続体力学は、19 世紀のはじめに、古代ギリシャから受け継がれた観念的な原子論をミクロスケールモデルとして成立した。Euler, Navier, Cauchy, Poisson, ……といった人達によってなされた連続体場の力学理論の確立は、‘物質は無限に分割できるはずがない’/‘自然は真空を嫌う’というともに形而上学的な考え方の対立が、より適切に現象を説明する考え方を認めるという合理的な視点によって乗り越えられた、歴史的に最初の成果といえるかもしれない。Cauchy が行った弾性理論の研究の遍歴のなかに、弾性体を粒子系/連続媒質のいずれと捉えるべきであるのかについての悩み(迷い?)を見るにつけ、先の問題に対する答えの一つとして連続体モデルは成立したのであり、そこには有効(近似)モデルを立てるという視点はまったくなくない。

このようにして得られた連続体場の方程式は、微細構造の詳細に鈍感であることが早い時期から指摘されている。つまり連続体の点(物体点)には、微細構造は書き込まれていないのである。それは、逆に考えると、連続体モデルは多彩な構造を包含しているということであり、そこに微視的詳細をいかに乗せるのかは解析者の力量次第であるとも言える。Capriz の表現によれば、‘物体点は強いていえば混沌(Chaos)である’。ここで思い起こすのは、‘莊子’にある(天地創造にかかる)次の故事である。『日鑿一竅，七日而渾沌死』。つまり、‘目、耳、鼻、口という七つのセンサを取付け(るという余計なことをし)たら、混沌は死んでしまった’。混沌であるはずの物体点に浅はかな智慧(マクロ的な知見)を押しつけて連続体モデルを瀕死の状態に陥らせ、微細構造を扱うのに適さないなどと診断を下

してしまっているということではないのか。

完成度の高い連続体力学は物理としてよりも数学理論として書かれている。数学理論は演繹によって、本来包含できる真実をどんどん縮小し、本来柔軟性があったものを硬直化させてしまう方向で展開される性向がある。そこに物理(というよりも経験的知見)が持ち込まれ、実用解析に応用される段になると、さらに保守的になってしまい、‘物体とは(その位置が実数の三つの組と同値である)物体点を要素とする三次元微分多様体である(Truesdell)’といった出発点での考え方が、一次か二次の連続な区分多項式で表される変位場を求める問題に帰着させて処理される。ここでは、確かに物質モデルは微視的不均質性をぬりつぶしたのっぽりとした構造になっている。

そこで気が付くのは、混沌に七孔を穿つ差配をしているのは‘構成式の表式化論’であり、安定と効率を優先させる解析方法が引導を渡す役割を演じているということである。連続体力学における構成式の役割は、字義のとおり‘構成論的に現象を見る枠組みを与えること’であり、それに過度に頼ることは、‘あらかじめ予想をしたとおりの解を引き出す手続きを記述すること’を行っているにすぎないと思えるべきであろう。

急

本来、連続体モデルは、多様な微視構造を乗せることができる台であり、その上に現れる表徴は自然界の実在を記述する述語的なものとして捉えるべきものではなからうか。構成式を莊嚴に飾り立てることによって連続体モデルに強いて語らしめ、今度はそれを主語として語ったときに、混沌は死に、解析者の姿を忠実に写すだけの真っ平らな唯の鏡になってしまう。

さまざまな離散モデルが提案され、それらが実にリアルなマイクロ世界を描き出すことを示した多くの報告、連続場の方程式を差分近似(して離散化)して取扱うことによって初めてとらえられるカオス現象の報告などに接するに付け、‘連続体モデルには、(無限に)多様な微細構造(とそのダイナミクス)が繰り込まれている。それを引き出せるかどうかは(近似)解析の方法の問題である’との思いを強くする。

もう一巡、無限階段を上ったときには、何を考えているであろうか。もうそのような時は巡って来ないかもしれないが、