疲労き裂発生・進展に基づく確率論的寿命分布評価に関する研究*

中井啓晶^{*1}, 倉敷哲生^{*2}, 座古 勝^{*2}Evaluation on Distribution of Fatigue Life with
Crack Initiation and Propagation Based on Probability TheoryHiroaki NAKAI, Tetsusei KURASHIKI and Masaru ZAKO^{*3}^{*3} Department of Materials and Manufacturing Science, Osaka University,
2-1 Yamadaoka, Suita-shi, Osaka, 565-0871 Japan

It is very important for the damage tolerance design of a structure to reveal the behavior of fatigue cracks of the used material. They have some uncertainties, the random applied loads or the residual strength caused by manufacturing process and so on. It is difficult to evaluate the behaviors of real fatigue cracks. In this paper, an evaluation method for fatigue life based on fatigue crack length has been proposed. Fokker-Planck equation, which can describe fatigue crack propagation under random load and random propagation resistance, has been proposed. The distribution of fatigue life has been analyzed by combining both of the distribution of crack initiation life and the distribution of propagation life.

Key Words: Fatigue, Probabilistic Method, Crack Propagation, Crack Initiation, Markov Process, Fokker-Planck Equation, Failure Probability

1. 結 言

航空機器, 発電プラント部品等における損傷許容設計では応力解析に加えて, 効果的な点検間隔の設定と補修を行うために, 疲労き裂に関する種々の性質の把握が最重要課題である。しかし, 損傷許容設計の実用化を考える際, き裂発生・進展過程には, 作用する荷重の不規則性や, 残留強度等の材料の不均質性など, さまざまな不確定要素が伴うため, 疲労き裂発生・進展の的確な評価は困難であるのが現状である。

そこで, そのようなばらつきによる不確定性を伴う疲労現象を確率論的に取り扱う研究が行われている。疲労寿命を疲労き裂発生寿命と疲労き裂進展寿命に分けて考えると, き裂発生寿命に関しては幾つかの解析的モデル化が行われているが, 未だその決定的な解明には至っていない。例えば, 井原らは繰り返し応力が負荷されるごとに材料に蓄えられる累積エネルギーが限界値を超えたときに, 結晶粒寸法程度の疲労き裂が

発生するという確率モデルを提案している^①。一方, き裂進展寿命に関しては, 確率微分方程式を用いた解析が行われている^②。き裂進展過程は, 部材に加わる外力の不規則性, 部材の材質の不均質性, 内包するき裂の数量, 寸法, 形状等の不確定性の影響を受ける。そこで, 疲労き裂の進展過程を, き裂長さや残留強度のような材料の特性値の確率分布が時間の経過につれて変化する確率過程と考える。そして, き裂の安定成長で成り立つ Paris 則に基づき, 材料強度のばらつき及び不規則荷重を考慮して疲労き裂進展過程を記述した確率微分方程式を用いたき裂長解析が行なわれている。鶴井, 石川らは疲労き裂進展過程をマルコフ過程として確率微分方程式でのモデル化を行っている^③。しかし, それも初期き裂寸法がある確率分布特性を有する場合の残存寿命を評価することに留まり, 疲労寿命の推定までには至っていない。

本研究では材料・構造物の疲労寿命推定法を確立することを目的に, 疲労試験により得たき裂発生寿命の分布特性評価, 不確定性要因を伴う疲労き裂進展について確率論を用いてモデル化を行い, き裂発生・進展寿命の各分布を考慮し, このモデルに基づく疲労寿

* 原稿受付 2005 年 2 月 9 日。

^{*1} 大阪大学大学院工学研究科 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)。^{*2} 正員, 大阪大学大学院工学研究科 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)。

E-mail: zako@mit.eng.osaka-u.ac.jp

命の評価手法構築の研究を行ったのでその結果について報告する。

2 マルコフ過程を用いたき裂進展モデル

2.1 き裂進展モデル

疲労の安定き裂成長段階（疲労き裂進展のⅡb 段階）で成り立つ Paris 則を基に、無次元化を施すと式 (1) を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dn} &= \varepsilon \left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0} \sqrt{x} \cdot F(x) \right)^m \\ &= \varepsilon \cdot Z^{2(\lambda+1)} \cdot x^{\lambda+1} \cdot \{F(l_0 x)\}^{2(\lambda+1)} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $x=l/l_0$ は n 回の応力繰返し後のき裂長さ l を初期き裂長さ l_0 で無次元化したもので、 $\Delta\sigma$ は応力振幅、 $F(x)$ は応力拡大係数における形状等に関する項を無次元化した関数である。また、 $Z=\Delta\sigma/\Delta\sigma_0$ は無次元化応力振幅、 ε 、 m は材料定数であり、便宜上 $l=mx/2-1$ としている。上述したように、き裂の進展過程は外力の不規則性や材料強度の不均質性の影響を受ける。そこで、外力の不規則性については時々刻々と不規則に変動する応力振幅 Z_m 、材料強度の不均質性などの内因については不規則進展抵抗 C_n として定義すると、式 (1) は次のようになる。

$$\frac{dx}{dn} = \varepsilon \cdot C_n \cdot Z_n^{2(\lambda+1)} \cdot x^{\lambda+1} \cdot \{F(l_0 x)\}^{2(\lambda+1)} \quad (2)$$

この式は、き裂の進展とともに不規則に変動する C_n 、 Z_n を含むため、通常の微分方程式のように初期値 $x(0)$ が与えられても、方程式を積分して解を求めることは不可能である。しかし、き裂進展の不確定挙動を記述する確率微分方程式では、解そのものを求めるよりも平均値や分散といった解の確率的性質を知ることが重要となる。ここでは、確率過程 x が Markov 過程であると仮定し、1 次の確率密度関数と推移確率密度関数として表現する。

2.2 Markov 過程

Markov 性を仮定すれば、確率分布関数および密度関数は最後の時間における条件にのみ依存する。そして、初期長さ x_0 のき裂が、 n 回の応力繰返しの後にき裂長さ x 以下である確率分布関数を $W(x, n | x_0)$ 、その密度関数を $w(x, n | x_0)$ とすれば、次の Fokker-Planck 方程式が得られる²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, n | x_0)}{\partial n} &= -A(n) \frac{\partial}{\partial x} \{g(x) \cdot w(x, n | x_0)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} B(n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{dg(x)}{dx} g(x) \cdot w(x, n | x_0) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} B(n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{g^2(x) \cdot w(x, n | x_0)\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $A(n)$ 、 $B(n)$ は C_n 、 Z_n に依存する項で、それぞれ次式で表される。

$$A(n) = \varepsilon \cdot E[C_n \cdot Z_n^{2(\lambda+1)}] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B(n) &= 2\varepsilon^2 \int_0^\infty \{E[C_n \cdot Z_n^{2(\lambda+1)} C_{n+n'} \cdot Z_{n+n'}^{2(\lambda+1)}] \\ &\quad - E[C_n \cdot Z_n^{2(\lambda+1)}] \cdot E[C_{n+n'} \cdot Z_{n+n'}^{2(\lambda+1)}]\} dn' \end{aligned} \quad (5)$$

また、 $g(x)$ については次の通りである。

$$g(x) = x^{\lambda+1} \cdot \{F(l_0 x)\}^{2(\lambda+1)} \quad (6)$$

この式 (3) の方程式を解き、その解の密度関数 $w(x, n | x_0)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} w(x, n | x_0) &= \frac{1}{g(x) \sqrt{2\pi \int_0^n B(n') dn'}} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \frac{\left\{ \int_{x_0}^x \frac{dx'}{g(x')} - \int_0^n A(n') dn' \right\}^2}{2 \int_0^n B(n') dn'} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

この式を基に、初期き裂長さが確定値の場合と分布を有する場合の解を示す。なお、本論文では、負荷応力振幅の不規則性 Z_m を一定 (Z_0) とし、また形状に関する補正項 $F(x)$ による影響は無いものとして議論を行う。上述の条件および $E[C_n]$ が 1 となるように定数 ε を設定できることから、式 (4) の $A(n)$ は次のように表される。

$$A(n) = \varepsilon \cdot Z_0^{2(\lambda+1)} \quad (8)$$

2.2.1 初期き裂長さが確定値の場合

式 (7) の積分形は、

$$W(x, \tau | x_0) = \Phi \left[\frac{x_0^{-\lambda} - x^{-\lambda} - \lambda \tau}{\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda+1} \{x_0^{-(2\lambda+1)} - (\text{Max}\{0, x_0^{-\lambda} - \lambda \tau\})^{\frac{2\lambda+1}{\lambda}}\}}} \right] \quad (9)$$

ただし、

$$\tau = \varepsilon \cdot Z_0^{2(\lambda+1)} n \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{\xi_0 \{E[C_n^2] - (E[C_n])^2\}}{(E[C_n])^2} \quad (11)$$

また、 ξ_0 は比例定数である。この $W(x, \tau | x_0)$ は初期き裂長さ x_0 が応力繰返し数 n の後にそのき裂長さが x 以下である確率を意味する。この式を用いて行ったき裂長さ分布の推移解析例を図 1 に示す。図中、縦軸は確率密度を示し、横軸にき裂長さ x_c を取っている。この時、各値は $\varepsilon = 2.5 \times 10^6$, $\lambda = 0.5$, $\alpha = 2.2 \times 10^2$ とした。この結果より、応力繰返しに伴いき裂長さ分布の平均値、分散は共に増大していることがわかる。

Fig.1 The distribution of fatigue crack length with fixed initial crack length

2.2.2 初期き裂長さがワイブル分布の場合

初期き裂長さが形状母数 β , 尺度母数 x_0 , 位置母数 γ のワイブル分布に従う場合、式 (7) の積分形は、

$$\begin{aligned} W(x, \tau | \beta, x_0, \gamma) &= \int_0^\infty W(x, \tau | x_i) dG(x_i) \\ &= \int_0^\infty \Phi \left[\frac{x_i^{-\lambda} - x^{-\lambda} - \lambda \tau}{\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda+1} \{x_i^{-(2\lambda+1)} - (\text{Max}[0, x_i^{-\lambda} - \lambda \tau])^{\frac{2\lambda+1}{\lambda}}\}}} \right] \\ &\quad \times \frac{\beta}{x_0} \left(\frac{x_i - \gamma}{x_0} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x_i - \gamma}{x_0} \right)^\beta \right\} dx_i \end{aligned} \quad (12)$$

τ , α については、式 (10), (11) と同様である。初期き裂長さが $\beta = 10.0$, $x_0 = 1.0$, $\gamma = 0.0$ のワイブル分布に従うとした場合のき裂長さの推移評価例を図 2 に示す。き裂進展パラメータの値は図 1 と同様である。結果は、図 1 に示した初期き裂長さが確定値の場合

と同様の傾向を示したが、両図の同繰返し数におけるき裂長さを比較すると、繰返し数が増加しても両図のばらつきは明確であり、初期におけるき裂長さのばらつきがき裂進展後、つまりは疲労寿命分布にも大きく影響することが確認できた。

Fig.2 The distribution of fatigue crack length with weibull distribution of initial crack length

3. き裂発生寿命を考慮した疲労寿命評価

3.1 き裂発生寿命分布の推定

疲労き裂発生は、材料の種類やその結晶に大きく左右される。また、同じ材料でも、試験片が平滑材の場合は特に、き裂発生寿命は長くなり、そのばらつきも大きなものとなる。よって、疲労き裂発生寿命を、その結晶学的、力学的観点から解析することは困難である。そこで、疲労き裂発生寿命を、実験的に求め、そのばらつきを確率的に評価する事が重要となる。疲労き裂の発生を厳密に決定することは困難であるため、通常、あるき裂長さに達したときの応力繰返し数をもってき裂発生寿命と定義される。したがって、実際には定義されたき裂長さに達するまでのき裂進展寿命を含んだ寿命となる。本研究においても、き裂長さがある長さに達した時の応力繰返し数をき裂発生寿命と定義する。ここでは、それが 3 母数ワイブル分布に従うとして、ばらつき評価、分布推定を試みる。

分布の母数推定法については、モーメント法や最尤法などがあるが、簡便で最もよく用いられている方法は、確率紙を用いる方法である。ここでは特に、確率紙に目視で直線を引く代わりに計算で直線を当てはめる。この場合、2 母数ワイブル分布の形状母数 α , 尺度母数 β の推定値 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ については、次式で計算される⁹⁾。

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y^2 - (\sum Y)^2 / n}{\sum XY - \sum X \sum Y / n}$$

$$\hat{\beta} = \exp\left(\frac{\sum X}{n} - \frac{\sum Y}{n\hat{\alpha}}\right)$$

ここで、 X 、 Y は次式で表される。

$$X = \ln(x - \gamma)$$

$$Y = \ln\{-\ln(1 - F)\}$$

上式を3母数ワイブル分布に適用する場合、位置母数 γ を直接推定することはできないため、最尤法や最小二乗法、相関係数法などが用いられる。酒井らはこれらの母数推定に関して、モンテカルロ法を用いた推定精度の検証を行い、ワイブル確率紙を用いた母数推定では相関係数法が最も適切であると報告している(4),(5)。

また、疲労試験では打ち切りデータを含む場合が少なくないが、このような場合の取り扱いとして、Johnsonの方法やNelsonの方法を用いて順位数のあてはめが必要である。本手法では、少数の試験本数を対象としていることから、サンプルサイズの小さい場合にも使えるJohnson法を用いる。

3.2 疲労寿命分布の推定

疲労寿命 n_f は一般に、き裂発生寿命 n_i とき裂進展寿命 n_p の和として表される。本研究においても、疲労現象をき裂発生過程とき裂進展過程に分けて取り扱うものとする。

き裂発生寿命とき裂進展寿命、それぞれの確率密度関数を $f(n)$ 、 $f_p(n)$ とし、それぞれの過程が互いに独立であるとする、疲労寿命の確率密度関数 $f(n_f)$ は次式で表される。

$$f(n_f) = \frac{\int_0^{n_f} A \, dn_i}{\int_0^\infty \left(\int_0^n A \, dn_i \right) dn} \quad (13)$$

ここで、 A は次式で表される関数である

$$A = \int_{n_i}^{n_i+dn_i} f_i(n_i) \cdot dn_i \cdot \int_{n_i}^{n_i+dn_i} f_p(n_f - n_i) \, dn_i \quad (14)$$

上式は畳み込み積分の一種であるため、数式的に解を得ることは困難であるので、数値積分により解を求める。その際の手順は以下に示す通りである。

①き裂発生寿命 n_i を固定し、 $f(n_i)$ 、 $f_p(n_f - n_i)$ を求める。

② $f(n_i)$ 、 $f_p(n_f - n_i)$ それぞれに Δn_i を乗じ、その発生確率の積 $P_i = \{f(n_i) \cdot \Delta n_i\} \cdot \{f_p(n_f - n_i) \cdot \Delta n_i\}$ を計算する。

③ n_i を $[0, n_f]$ で変化させて①、②の計算を行い、 $P(n_f) = \sum P_i$ を求める。

④ n_f を十分に大きな範囲で次々と変化させ、 $P(n_f)$ の分布を得る。

⑤ $P(n)$ を全体が1となる様に正規化し、疲労寿命の確率密度分布 $f(n_f) = P(n_f) / \int P(n) \, dn$ を決定する。

この手順においてき裂発生寿命分布 $f(n_i)$ 、き裂進展寿命分布 $f_p(n)$ はそれぞれ3.1節および式(9)により推定した密度関数である。

Fig.3 The distribution of fatigue life considering the distributions of initiation life and propagation life

図3はここで述べた手法を用いて疲労寿命解析を行った例である。き裂発生寿命分布として、形状母数 β 、尺度母数 x_0 、位置母数 γ がそれぞれ、 2.83 、 7.11×10^4 、 3.00×10^5 のワイブル分布を想定し、き裂進展解析では、2.2.1項と同様の条件で、初期き裂長さ $x_i = 1.0$ 、限界き裂長さ $x = 10.0$ として計算した。

この例では、き裂発生寿命、き裂進展寿命が共に 10^5 オーダーの分布を想定しており、その結果求めた疲労寿命分布は、双方の分布のばらつきを反映した分布形状となっている。

市川らは既に、き裂の発生とその伝ばを分離した疲労寿命の検討を行っているが⁶⁾、本研究では、き裂進展寿命分布を解析的に求めており、任意のき裂長さに対する寿命評価が可能であり、さらに後に述べるS-N線図へと展開しているところに特徴がある。また、市川らは疲労寿命分布の計算手法としてモンテカルロシミュレーションを用いているが、本研究では、数値積分を行うことによって、より実験結果に基づいた解を計算しているものとする。

3.3 実試験データへの適用例

次に、提案手法の実試験データへの適用を考える。

図4は市川が行ったA2024-T3アルミニウム合金試

試験片の疲労試験結果⁶⁾を基に、疲労寿命分布を推定した結果である。まず、き裂発生寿命データからそれが3母数ワイブル分布であると、その値を同定すると、図4に示すように $\beta=2.83$, $x_0=2.11 \times 10^4$, $\gamma=0.00$ となった。

Fig.4 The distribution of crack initiation and propagation life (weibull probability paper)

また、き裂進展寿命データからき裂進展に関する各パラメータの値を $\varepsilon=2.5 \times 10^6$, $\lambda=0.5$, $\alpha=22 \times 10^2$, 無次元限界き裂長さ $x=200$ とした。ここから提案手法により疲労寿命を推定すると、その分布は図5に示した通りとなり、実験による疲労寿命データから直接推定した分布とほぼ一致することが確認できた。

Fig.5 Example of application of the proposed method

4. き裂長さに基づく S-N 線図

4.1 作成手順

疲労寿命の評価は S-N 線図により行われ、応力振幅レベルと繰返し数の関係のみが示される。しかし、損傷許容設計の重要性が高まる一方で、その設計法が十分に確立されていないのが現状である。それは、S-N 線図が寿命と繰返し数という関係のみを表し、損傷度に関する情報を有していないためであると考え。そこで、先に行った疲労寿命評価を用いて、き裂長さ

を考慮した S-N 線図を提案し、その作成法について述べる。

手順は以下の通りである。

- ①疲労試験を実施し、同一応力振幅レベルのき裂発生寿命を試験片3本以上、2応力振幅レベル以上で観測。
- ②さらに同試験中のき裂進展結果からき裂進展パラメータを決定。
- ③各応力振幅レベルのき裂発生寿命を確率分布関数でモデル化。
- ④応力振幅レベル間でのき裂発生限界線を内挿。
- ⑤き裂進展寿命解析を実施。
- ⑥き裂発生寿命とき裂進展寿命の各分布から疲労寿命推定。

まず、疲労き裂の観察を目的とした疲労試験を実施する。き裂発生と定義するき裂長さや、観察するき裂長さは試験片寸法等により異なるが、き裂の観察方法としては、レプリカを用いた方法や試験片に発生するき裂を直接顕微鏡で観察する方法がある。観察により、き裂発生寿命とその後進展していくき裂の長さや進展速度を記録する。この試験を同一応力振幅レベルにおいて最低でも3本の試験片を用いて行い、それを異なる応力振幅レベルでも実施する。そして、試験結果からき裂進展パラメータを決定する。

次に、各応力振幅レベルでのき裂発生寿命を3母数ワイブル分布としてモデル化し、その分布パラメータを求める。これを、疲労試験を行ったそれぞれの応力振幅レベルで行う。応力振幅レベル間の寿命については、S-N 線図の傾斜部が、一般に片対数または両対数で直線となることから、安全側を考慮して次式を用いて、平均寿命 N_i で内挿する。

$$N_i = c \Delta \sigma^{-b} \quad (15)$$

ここで、 b, c は定数である。さらに、疲労試験により決定したき裂進展パラメータを用いて、所望の応力振幅レベルにおけるき裂進展解析を実施し、き裂進展寿命分布を推定する。

このようにして求めたき裂発生寿命、き裂進展寿命が互いに独立であると仮定し、それぞれの分布から疲労寿命分布を計算する。

4.2 提案手法による疲労寿命評価

本手法を適用した場合に得られる S-N 線図の模式図を図6に示す。ここでは、き裂発生寿命分布と疲労寿命のみを分布として示しているが、き裂発生後の寿命はばらつきを考慮して任意のき裂長さに対して解

析的に求めることができるため、き裂長さ $l=l_i$ に対する寿命も確率分布として評価可能である。

従来の S-N 線図との違いは、き裂長さに基づき寿命を評価しているため、き裂長さ毎の寿命を決定でき、さらに、疲労寿命を確率的に取り扱うことで、ばらつきを破壊確率として考慮できる点である。これは、実用性の面において重要となり、これまで繰返し数のみで行われていた疲労設計を、き裂長さという確認可能な数値で設計可能であり、損傷許容設計を行う上で損傷度の基準となる。また、提案手法では検査等により現在のき裂長さが明らかとなると、それを基準に疲労寿命を再計算し、修正可能である。これにより、常に最新情報を活用した残存寿命予測が行えることとなる。

Fig.6 Scheme of S-N diagram considering crack length

5. 結 言

重要性が高まる損傷許容設計のための疲労設計基準構築を目的として、き裂長さに基づく寿命評価手法の提案を行った。

き裂長さを確率変数としてき裂進展に関する確率微分方程式を解き、その解を Fokker-Planck 方程式として得た。これにより、初期き裂長さが確定値または分布を有する場合におけるき裂進展寿命分布が評価可能となった。き裂発生寿命に関しては、疲労き裂がある長さに達する寿命をき裂発生寿命として定義し、疲労試験におけるき裂観察から発生寿命分布を推定する。その分布については、これまでの統計的結果から3母数ワイブル分布がよく一致しており、そのパラメータ決定法について述べた。

また、一般に疲労寿命がき裂発生寿命とき裂進展寿命の和で表されることから、それらが互いに独立であると仮定して、各分布の和から疲労寿命を数値積分により計算できることを示した。解析例として行った計算では、き裂発生分布にき裂進展寿命のばらつきが作用し、疲労寿命分布はさらに分散の大きな分布となっており、実験による疲労寿命分布ともよく一致していた。

最後に、従来の S-N 線図に代わる設計基準として、き裂長さに基づく S-N 線図を提案し、その作成手順について述べた。提案手法では、疲労過程をき裂長さに対応付け、またばらつきを確率分布として取り扱うため、点検・検査等による情報から残存寿命を評価したり、破壊確率としてばらつきを定量的評価できるなどの利点を有している。また、最新の情報から寿命予測の修正ができ、取得した情報を十分に活用して高い精度の寿命評価が行える。

文 献

- (1) C.Ihara, A.Tsurui, Fatigue of Metals as Stochastic Phenomena, Trans. of ASME, J. Eng. Mate. Tech., 99 (1977), 26.
- (2) 石川 浩, 鶴井 明, 進展抵抗の不規則性を考慮した疲労き裂進展過程の確率モデル, 日本機械学会論文集 (A 編), 50, 1309, (1983).
- (3) 日本材料学会編, 機械・構造技術者のための実用信頼性工学, 養賢堂, (1987).
- (4) 田中道七, 酒井達雄, 3 母数ワイブル分布の母数推定について, 材料, 28, 609, (1989).
- (5) 酒井達雄, 田中道七, 3 母数ワイブル分布の母数推定について (続報), 材料, 29, 638, (1990).
- (6) 市川昌弘, 田倉隆行, 田中 栄, き裂の発生と伝ばを分離した疲労寿命の信頼性工学的研究, 材料, 31, 697, (1982).