利用に便利なだ円孔周辺の応力分布の閉じた解析解とその応用*

金 崎 俊 彦^{*1}, 永 田 晃 市^{*2}, 村 上 敬 宜^{*3}New Closed-form Solution by Cartesian Coordinate for Stress
Distribution around Elliptic Hole and Its ApplicationsToshihiko KANEZAKI, Koichi NAGATA and Yukitaka MURAKAMI^{*4}^{**} Department of Mechanical Science and Engineering, Kyushu University,
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 819-0395 Japan

In existing literature, the closed-form solution for stress distribution around an elliptic hole has been expressed in the elliptic coordinate in textbooks of theory of elasticity. However, these conventional solutions are inconvenient for application to strength analysis. In the present paper, a new concise closed-form solution for the stress distribution around an elliptic hole under remote uniform stress, σ_x , σ_y , and τ_{xy} is given in Cartesian coordinate. The analysis of crack propagation path from the elliptic hole under pure shear stress is carried out with combination of FEM analysis. The contradiction between the crack propagation angle from an elliptic hole and that from a crack under pure shear is made clear by the numerical analysis.

Key Words: Stress Concentration, Elasticity, Stress Function, FEM, Elliptic Hole, Crack Propagation Path Analysis, Crack Propagation Direction

1. 緒 言

一般に、弾性論のテキストで示されているだ円孔周辺の応力場の厳密解⁽¹⁾はだ円座標などで表現されており、強度解析を行う実験的研究者には使い難い。

本研究では、だ円孔を有する無限板が遠方で様な引張応力 $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$, せん断応力 $\tau_{xy\infty}$ を受ける場合の解を使いやすい閉じた形で与える。それを利用し、2軸応力場におけるだ円近傍の最大せん断応力の分布の解析を行う。さらに、せん断応力場におけるだ円孔からのき裂発生点の決定とき裂伝は経路解析を有限要素法と組み合わせて行った結果を示す。

2. 複素応力関数によるだ円孔の応力解析

2.1 基礎式 図1のような長軸 a , 短軸 b のだ円孔を持つ無限平板に遠方で様な応力 $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$, $\tau_{xy\infty}$ が作用するとき、森口の鏡像原理より複素応力関数 $\Phi(\zeta)$, $X(\zeta)$ を求めると次式(1)で表せる。

$$\begin{cases} \Phi(\zeta) = \frac{1}{2}Ac\zeta - (A + 2R^2\bar{B})\frac{c}{2\zeta} \\ X(\zeta) = \left(\frac{A}{2R^2} + B\right)c\zeta - \frac{1}{2}Ac\frac{R^2}{\zeta} \end{cases} \quad (1)$$

$$z = Z(\zeta) = \frac{c}{2}(\zeta + 1/\zeta), \quad z = x + iy \quad (2)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (3)$$

ただし、 A , B は次の形で表される。

$$A = \frac{\sigma_{x\infty} + \sigma_{y\infty}}{4}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{y\infty} - \sigma_{x\infty}}{2} + i\tau_{xy\infty} \right) \quad (4)$$

複素応力関数により σ_x , σ_y , τ_{xy} を表すと次の式^{(1),(2)}になる。

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[\Phi^1(\zeta)] - \operatorname{Re}[\overline{Z(\zeta)}\Phi^{\text{II}}(\zeta) + \Psi^{\text{II}}(\zeta)] \quad (5)$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}[\Phi^1(\zeta)] + \operatorname{Re}[\overline{Z(\zeta)}\Phi^{\text{II}}(\zeta) + \Psi^{\text{II}}(\zeta)] \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im}[\overline{Z(\zeta)}\Phi^{\text{II}}(\zeta) + \Psi^{\text{II}}(\zeta)] \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} X(\zeta) &= \overline{Z(\zeta)}\Phi^1(\zeta) + \Psi^1(\zeta) \\ \Phi^1(\zeta) &= \Phi'(\zeta)/Z'(\zeta) \\ \Phi^{\text{II}}(\zeta) &= \Phi''(\zeta)/Z'(\zeta)^2 - \Phi'(\zeta)Z''(\zeta)/Z'(\zeta)^3 \\ \Psi^1(\zeta) &= Z'(\zeta)\psi^1(\zeta) \\ \Psi^{\text{II}}(\zeta) &= \Psi''(\zeta)/Z'(\zeta)^2 - \Psi'(\zeta)Z''(\zeta)/Z'(\zeta)^3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

* 原稿受付 2005年1月14日。

^{*1} 学生員, 九州大学大学院工学府(☎ 819-0395 福岡市西区元岡744)。^{*2} 九州大学大学院工学府。^{*3} 正員, 九州大学大学院工学研究院。

E-mail: ymura@mech.kyushu-u.ac.jp

Fig. 1 Elliptic hole in an infinite plate

2.2 応力 $\sigma_{y\infty}$ のみが働くときの x 軸上の応力分布

図 2(a)のように、だ円孔($a \geq b$)をもつ無限板が遠方で一様な y 軸方向応力 $\sigma_{y\infty}$ を受けるときの x 軸上の応力分布を求める。

x 軸上では式(2)において $z=x$ より次の関係が常に成り立つ。

$$z = \bar{z}, \quad \zeta = \bar{\zeta} = \frac{x + \sqrt{x^2 - c^2}}{c} \quad (9)$$

式(4)より定数 A, B は次の形になる。

$z \rightarrow \infty$ で $\sigma_x = 0, \sigma_y = \sigma_{y\infty}, \tau_{xy} = 0$ より

$$A = \frac{1}{4}\sigma_{x\infty}, \quad B = -\frac{1}{4}\sigma_{x\infty} \quad (10)$$

ここで、だ円の形状係数 λ を次式で定義する。

$$\lambda = \frac{a}{b} \quad (11)$$

よって、式(1), (5), (8), (10), (11)より x 軸上での σ_x は次の形になる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_{y\infty}} &= \frac{1}{\zeta^2 - 1} \cdot \frac{2\lambda + 1}{\lambda - 1} \\ &+ \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} - \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \right) \zeta^2 - \frac{\lambda + 1}{(\lambda - 1)^2} \right\} \\ &+ \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{1}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{1}{\lambda - 1} \right) \frac{\lambda}{\lambda - 1} \end{aligned} \quad (12)$$

同様に、式(1), (6), (8), (10), (11)より x 軸上での σ_y は

次の形になる⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{\sigma_{y\infty}} &= \frac{1}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) \\ &- \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} - \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \right) \zeta^2 - \frac{\lambda + 1}{(\lambda - 1)^2} \right\} \\ &- \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{1}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{1}{\lambda - 1} \right) \frac{\lambda}{\lambda - 1} \end{aligned} \quad (13)$$

式(12), (13)から x 軸上での応力の第1不変量 $\sigma_x + \sigma_y$ は次の簡単な形になる。

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_{y\infty}} = \frac{1}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 + \frac{3\lambda + 1}{\lambda - 1} \right) \quad (14)$$

式(12), (13)から $x-y$ 平面で考えたときの x 軸上での最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は次の形になる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{y\infty}} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} / \sigma_{y\infty} \\ &= \frac{1}{2(\zeta^2 - 1)} \left(\zeta^2 - \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right) \\ &- \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} - \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \right) \zeta^2 - \frac{\lambda + 1}{(\lambda - 1)^2} \right\} \\ &- \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{1}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{1}{\lambda - 1} \right) \frac{\lambda}{\lambda - 1} \end{aligned} \quad (15)$$

3次元問題として考えれば $\tau_{\max}$ は $\tau_{\max} = \sigma_y/2$ であることはいうまでもない。

2.3 応力 $\sigma_{x\infty}$ のみが働くときの x 軸上の応力分布

図 2(b)のような無限板に、遠方で一様な x 軸方向の応力 $\sigma_{x\infty}$ を受けるときの x 軸上の応力分布を求める。

式(4)より定数 A, B は次の形になる。

$z \rightarrow \infty$ で $\sigma_x = \sigma_{x\infty}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ より

$$A = \frac{1}{4}\sigma_{x\infty}, \quad B = -\frac{1}{4}\sigma_{x\infty} \quad (16)$$

よって、式(1), (5), (8), (11), (16)から x 軸上での σ_x は次の形になる。

 (a) Stress distribution by the remote stress $\sigma_{y\infty}$ (b) Stress distribution by the remote stress $\sigma_{x\infty}$ (c) Stress distribution by the remote stress $\tau_{xy\infty}$

 Fig. 2 Stress distribution along x -axis produced by $\sigma_{y\infty}, \sigma_{x\infty}$ and $\tau_{xy\infty}$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_{x0}} &= \frac{1}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 - \frac{1}{\lambda - 1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(3 \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \zeta^2 - \frac{(\lambda + 1)\lambda}{(\lambda - 1)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} \right) \frac{1}{\lambda - 1} \quad (17) \end{aligned}$$

同様に、式(1)、(6)、(8)、(11)、(16)より x 軸上での σ_y は次の形になる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{\sigma_{x0}} &= -\frac{1}{\zeta^2 - 1} \cdot \frac{\lambda + 2}{\lambda - 1} \\ &\quad + \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(3 \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \zeta^2 - \frac{(\lambda + 1)\lambda}{(\lambda - 1)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} \right) \frac{1}{\lambda - 1} \quad (18) \end{aligned}$$

式(17)、(18)から x 軸上での応力の第 1 不変量 $\sigma_x + \sigma_y$ は次の簡単な形になる。

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_{x0}} = \frac{1}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 - \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \right) \quad (19)$$

式(17)、(18)から x - y 平面で考えたときの x 軸上での最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は次の形になる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{x0}} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} / \sigma_{x0} \\ &= -\frac{1}{2(\zeta^2 - 1)} \left(\zeta^2 + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(3 \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \zeta^2 - \frac{(\lambda + 1)\lambda}{(\lambda - 1)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} \right) \frac{1}{\lambda - 1} \quad (20) \end{aligned}$$

3次元問題として考えたときの $\tau_{\max}$ は $\tau_{\max} = -\sigma_y/2$ である。

2.4 せん断応力 τ_{xy} のみが働くときの x 軸上の応力分布 図 2(c) のような無限板に、遠方で一様なせん断応力 $\tau_{xy\infty}$ を受けるときの x 軸上の応力分布を求める。式(4)より定数 A 、 B は次の形になる。

$z \rightarrow \infty$ で $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{xy\infty}$ より

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2} \tau_{xy\infty} i \quad (21)$$

よって、式(1)、(7)、(8)、(11)、(21)から x 軸上のせん断応力 τ_{xy} は次の形になる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy\infty}} &= \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} + \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{3\lambda + 1}{\lambda - 1} \zeta^2 - \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{2\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left\{ \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} \right\} \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad (22) \end{aligned}$$

また、式(22)から

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy\infty}} \right) = \zeta^4 - 2 \frac{\lambda^2 + 5}{\lambda^2 - 1} \zeta^2 + 1 = 0 \quad (23)$$

これより、 x 軸上で τ_{xy} が最大になるときの ζ の値 ζ^* は、 $x > a$ のとき $\zeta > 1$ より、次のようになる。

$$\zeta^{*2} = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \{ \lambda^2 + 5 + \sqrt{12(\lambda^2 + 2)} \} \quad (24)$$

式(3)、(9)、(11)、(24)より x 軸上で τ_{xy} が最大になるときの x の値 x^* は次式から求めることができる。

$$(x^{*2} + \sqrt{x^{*2} - c^2})^2 = \frac{a^2}{\lambda^2} \{ \lambda^2 + 5 + \sqrt{12(\lambda^2 + 2)} \} \quad (25)$$

式(25)から円孔の場合、 $x = \sqrt{3}a \approx 1.732a$ で τ_{xy} が最大となる。式(22)、(24)より x 軸上における最大せん断応力 $\tau_{xy\max}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy\max}}{\tau_{xy\infty}} &= \frac{\zeta^{*2}}{\zeta^{*2} - 1} + \frac{1}{(\zeta^{*2} - 1)^2} \left\{ \frac{3\lambda + 1}{\lambda - 1} \zeta^{*2} - \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{2\zeta^{*2}}{(\zeta^{*2} - 1)^3} \left\{ \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \zeta^{*2} - \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1} \right\} \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad (26) \end{aligned}$$

また、式(26)で求められる最大せん断応力 $\tau_{xy\max}$ は x - y 平面全体においても最大のせん断応力となる。阿部ら⁽⁴⁾によつて、図 3 に示すように軸方向に対して 0° および 90° 方向において微小穴から離れた位置でき裂が発生することが報告されている。軸方向に対して 0° および 90° 方向の 4 つのせん断型き裂は微小穴中心から微小穴半径 a の 1.6 ~ 1.9 倍の位置で発生しており、2次元弾性解析解 $x = \sqrt{3}a \approx 1.732a$ とほぼ一致している。

Fig. 3 Eight cracks initiated in the vicinity of an artificial hole in a maraging steel under cyclic torsion. Artificial hole diameter: 100 μm , Hole depth: 100 μm , $\Delta\gamma = 0.0302$ ⁽⁴⁾

これは、 x 軸上、 y 軸上で生じる最大せん断応力 $\tau_{xy \max}$ によるものであり、き裂の発生を評価する場合に最大せん断応力 $\tau_{xy \max}$ の値が有用となる。

2・5 2軸応力場 σ_{xx} , σ_{yy} での x 軸上の応力分布

x 軸上での最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は式(15), (20)の和を求めることにより得られる。同様に、 x 軸上での応力の第1不変量 $\sigma_x + \sigma_y$ は式(14), (19)の和を求めることで得られ、次式となる。

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\sigma_{yy}}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 + \frac{3\lambda + 1}{\lambda - 1} \right) + \frac{\sigma_{xx}}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 - \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \right) \quad (27)$$

特に $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0$ の場合には x - y 平面で考えた x 軸上の最大せん断応力 $\tau_{\max}$ 、応力の第1不変量 $\sigma_x + \sigma_y$ は次の形に整理できる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\max}}{\sigma_0} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sigma_0} = -\frac{1}{\zeta^2 - 1} \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \\ &\quad + \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ 2 \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \zeta^2 - \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right\} \\ &\quad - \frac{8\zeta^3}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \zeta^2 - \frac{1}{\lambda - 1} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_0} = \frac{2(\zeta^2 + 1)}{\zeta^2 - 1} \quad (29)$$

3次元問題として考えたときの $\tau_{\max}$ は $\tau_{\max} = \sigma_y/2$ である。

2・2節から2・5節で示した式において $a = b$ ($\lambda = 1$) とすることで円孔周辺における応力分布、 $b \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) とすることによりき裂周辺における応力分布を求めることができる。ただし $a = b$ ($\lambda = 1$) の場合、 $\lambda = ab$ を各式に代入し、 $(a - b) \rightarrow 0$ での極限値を計算する必要がある。

3. せん断応力場においてだ円孔縁から発生するき裂の位置決定およびき裂伝ば経路解析

材料中には圧延加工により引き延ばされた介在物や欠陥、構造用部品における長穴加工された部分などが存在する。応力解析を行う場合、介在物や欠陥、長穴加工された部分をだ円孔と近似して考えることができる。実際の構造物ではねじり負荷を受ける場合の応力場がせん断応力場の代表例となる。そこで、せん断応力場においてだ円孔縁からのき裂の発生位置決定およびき裂の伝ば経路解析が、介在物や欠陥、長穴加工された部分からのき裂発生・伝ばを考える上で有用となる。

だ円孔を持つ無限平板が遠方でせん断応力 $\tau_{xy\infty}$ を受けるとき、だ円孔縁から発生するき裂の位置の決定およびき裂伝ば解析を有限要素法(FEM)と組み合わせて行う。だ円孔縁から発生するき裂の位置は2章で導い

ただ円孔の解を用いることで容易に求めることができる。本解析ではまず、だ円孔の解(式(1), (5), (6))を利用することによりき裂発生位置を正確に決定し、次にFEMを用いてき裂伝播経路解析を行った。FEMによるき裂伝ば解析では、 $a = 1$, $b = 0.5$ および $a = 1$, $b = 0.2$ のだ円孔の解析を行った。

3・1 き裂発生点の決定 き裂発生位置は原子やすべり帯程度のミクロのレベルで議論すれば材料によって多少の違いはあるかもしれないが、巨視的にはき裂はだ円孔縁においてだ円孔接線方向最大応力が働く位置で発生すると考えることができる。そこで、き裂はだ円孔縁において最大のだ円孔接線方向応力が働く位置で発生すると仮定する。

そこで、だ円孔接線方向応力が最大となる位置とその応力を求める。だ円孔境界において法線方向を ξ 軸、接線方向を η 軸と表す。応力の第1不変量、および式(1), (5), (6), (21)より次式の関係が求まる。

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re}[\Phi^I(\zeta)] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{2R^2 \bar{B}}{\zeta^2 - 1} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{-R^2}{\zeta^2 - 1} \tau_{xy\infty} i \right] \end{aligned} \quad (30)$$

だ円孔縁では、 $\sigma_\xi = 0$, $|\zeta| = R$ より $\zeta = Re^{i\theta}$ とおくと式(30)は次のように整理できる。

$$\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{\tau_{xy\infty}} = \frac{\sigma_\eta}{\tau_{xy\infty}} = \frac{4R^4 \sin 2\theta}{2R^2 \cos 2\theta - R^4 - 1} \quad (31)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sigma_\eta}{\tau_{xy\infty}} \right) = \frac{16R^6 - 8R^4(R^4 + 1)\cos 2\theta}{(2R^2 \cos 2\theta - R^4 - 1)^2} = 0 \quad (32)$$

$$\cos 2\theta = \frac{2R^2}{R^4 + 1} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} \quad (33)$$

$\zeta = Re^{i\theta}$ および式(2), (3), (31), (33)より σ_η が最大、最小となる位置とその大きさは $x > 0$ において次のようになる。

$$z = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a^2 + ib^2) \text{ のとき最小となり}$$

$$\frac{\sigma_{\eta \min}}{\tau_{xy\infty}} = -\frac{(a+b)^2}{ab} \quad (34)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a^2 - ib^2) \text{ のとき最大となり}$$

$$\frac{\sigma_{\eta \max}}{\tau_{xy\infty}} = \frac{(a+b)^2}{ab} \quad (35)$$

最大・最小応力が働く点における接線を求めると次のようになる。

$$x \pm y = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (36)$$

式(35)より、最大または最小となる円孔接線方向応力の向きは、純せん断応力場における主応力方向と一致することがわかる。すなわち、だ円の形状によらず、 $\pm 45^\circ$ 方向の直線とだ円の接点が最大・最小応力の発生点であるという単純な結論が得られた。

3.2 有限要素法(FEM)によるき裂伝ば経路解析

だ円孔縁から発生するき裂の初期き裂長さ l_0 はだ円孔の曲率半径 ρ の $1/50$ とした。したがって、 $\rho = b^2/a$ より、例えば $a=1$, $b=0.5$ の場合 $l_0 = 5 \times 10^{-3}$, $a=1$, $b=0.2$ の場合 $l_0 = 0.8 \times 10^{-3}$ となる。実際の疲労き裂進展においては、微視的にき裂を観察すると材料組織の影響によりき裂は多くの場合ジグザグに進展しており、Mode I, Mode II が混在した状態となっている。しかし、多くの実験結果を参照すれば、巨視的にはき裂は Mode I により進展していると考えることができる。そこで FEM 解析では、き裂は Mode I により進展すると仮定した。すなわち、微小なき裂進展増分を与え、その新しいき裂先端の応力拡大係数 K_{II} が $K_{II} = 0$ となる方向にき裂が進展すると仮定した。実際の FEM 解析

Fig. 4 Definition of crack

Fig. 5 Model for FEM

では、き裂先端の向き θ を 45° 方向から 1° ずつ変化したモデルの解析を行い、解析により得られたき裂の応力拡大係数 K_{II} が最小となる方向 θ をき裂進展の向きとした。図 4 に示すように x 軸から 45° 傾いた軸へき裂を投影した長さをき裂長さ l とし、だ円孔を投影した長さを 2α とした。

FEM 解析では三角形 6 接点要素を用いた。図 5 に解析モデルの概略図を示す。14 モデル解析を行い、境界条件は辺 AB の x 軸方向変位、辺 DE の y 軸方向変位が 0 となるように変位拘束した。荷重は辺 BC, 辺 CD にせん断応力 $\tau_{xy} = \tau_0 = 1$ を負荷した。板の寸法 BC, CD はだ円孔の寸法に比べて十分大きくとり ($a/W = 0.01 \sim 0.1$)、無限板中のだ円孔の問題を近似した。板幅 W はき裂長さ ($l + \alpha$) と板幅 W の比が $(l + \alpha)/W = 0.04 \sim 0.1$ となるように決定した。荷重は辺 BC, 辺 CD にせん断応力 $\tau_{xy} = \tau_0 = 1$ を負荷した。図 6 にだ円孔周辺およびだ円孔縁から発生したき裂周辺の要素分割を示す。図 7 に示すように、要素分割はき裂先端からの距離 r/l が区間 $10^{-3} \leq r/l \leq 10^{-1}$ において応力分布の特異性が失われないように十分小さく要素分割した。その場合のき裂先端の接点間距離とき裂長さ l の比は 4.4×10^{-5} である。

図 8 にだ円孔から発生したき裂の進展経路を示す。図 8 より x 軸とき裂先端の成す角度 θ は、き裂発生時には 45° 方向であるが、き裂進展とともに角度 θ は増加し、再び 45° 方向に向きを変えて進展することがわかる。

図 9 に、だ円のアスペクト比 b/a と伝ば中のき裂先端が x 軸と成す最大の角度 $\theta_{\max}$ の関係を示す。円孔の場合には 45° 方向に発生したき裂はその後 45° 方向に進展するため $\theta_{\max} = 45^\circ$ である。

一方、き裂 ($b/a \rightarrow 0$) の場合には、F. Erdogan ら⁶⁾が示

(a) The vicinity of elliptic hole (b) Magnification of (A)
Fig. 6 Mesh division in the vicinity of elliptic hole and crack ($a=1$, $b=0.5$, $l=0.054$)

Fig. 7 Stress distributions in the vicinity of crack tip

Fig. 8 Crack propagation path from the edge of elliptic hole

 Fig. 9 Relationship between $\theta_{\max}$ and aspect ratio b/a for elliptic holes

 Fig. 10 Relationship between the crack length l/α at $\theta = \theta_{\max}$ and aspect ratio b/a for elliptic holes

しているように、き裂先端近傍で σ_θ が最大となる方向に進展すると考えると $K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$ の条件では、 $\theta_{\max} = 70.5^\circ$ である。つまり、アスペクト比 b/a が $1 \rightarrow 0$ と変化するにしたがって、だ円孔からのき裂伝ば方向の最大の角度 $\theta_{\max}$ は $45^\circ \rightarrow 70.5^\circ$ と変化する。また、だ円のアスペクト比 b/a が $1 \rightarrow 0$ と変化するにしたがってき裂先端と x 軸の成す最大角度 $\theta_{\max}$ におけるき裂長さ $l_{\theta_{\max}}/\alpha$ は $l_{\theta_{\max}}/\alpha \rightarrow 0$ となる (図 10)。

上記の考察から 3・1 節の結論をき裂に適用すると、 $b/a \rightarrow 0$ としたき裂の場合でも、き裂から新たにき裂が進展する方向は 45° 方向ということになる。しかし、き裂の場合には、実際には F. Erdogan ら⁶⁾ が示しているようにき裂先端近傍で σ_θ が最大となる 70.5° 方向に新たなき裂進展が起こる。この理由は以下のように説明できる。新たに発生するき裂の方向は 45° 方向であるが、き裂からき裂が発生する場合には無限小の長さのき裂の発生のもと 70.5° 方向へとき裂の伝ば方向が変わるので、事実上初期から 70.5° 方向にき裂伝ばが起こることになる。したがって、だ円孔からのき裂発生方向とき裂からの新しいき裂の発生、進展の方向の議論に矛盾はない。この問題はこれまで破壊力学において明確にされていなかったものである。

4. 結 言

だ円孔を有する無限板が遠方で一様な応力 σ_{yy} , σ_{xx} , τ_{xy} を受ける場合の解を使いやすい閉じた形で求めた。その解を利用し、せん断応力場におけるだ円孔からのき裂発生点の決定とき裂伝ば解析を FEM と組み合わせを行った。その結果、次のことを明らかにした。

(1) だ円孔を有する無限板が遠方で一様なせん断応力 τ_{xy} を受けるとき、最大または最小となるだ円孔接線方向応力は、だ円のアスペクト比によらず $\pm 45^\circ$ 方向の直線とだ円孔の接点において発生する。

(2) だ円孔を有する無限板が遠方で繰返しせん断応力 τ_{xy} を受けるとき、き裂先端と x 軸の成す角度 θ は、き裂発生時には 45° 方向であるが、き裂進展と共に角度 θ は増加し、再び 45° 方向に向きを変え進展する。

(3) 遠方での応力がせん断応力 τ_{xy} のみの場合、だ円孔縁からのき裂発生と伝ばは、だ円のアスペクト比 b/a が $1 \rightarrow 0$ と変化するにしたがって、き裂伝ば方向と x 軸の成す最大の角度 $\theta_{\max}$ は $45^\circ \rightarrow 70.5^\circ$ と変化する。

この最大角度 $\theta_{\max}$ に到達するき裂長さ $l_{\theta_{\max}}/\alpha$ は $bl\alpha = 1 \rightarrow 0$ にしたがって $l_{\theta_{\max}}/\alpha \rightarrow 0$ となる。

(4) 遠方での応力がせん断応力 $\tau_{xy\infty}$ のみの場合、き裂から新たにき裂が発生する方向は、理論上は 45° 方向であるが、き裂からき裂が発生する場合には無限小の長さのき裂の発生あと 70.5° 方向へとき裂の伝ば方向が変わるので、事実上初期から 70.5° 方向にき裂伝ばが起こると解釈することができる。

5. 付 録

複素応力関数の導出過程および応力を求めるときに必要な項の計算式をまとめて示す。

5.1 複素応力関数の導出 自由な円孔をもつ無限板が遠方で一様な x 軸方向応力 $\sigma_{x\infty}$ 、 y 軸方向応力 $\sigma_{y\infty}$ 、せん断応力 $\tau_{xy\infty}$ を受けるとする。このときの複素応力関数を求める。無限平板に一様な $\sigma_{x\infty}$ 、 $\sigma_{y\infty}$ 、 $\tau_{xy\infty}$ をそれぞれ負荷したときの複素応力関数は、 z が十分大きな値において次の形になる。

$$\begin{cases} \phi(z) = Az \\ \varphi(z) = Bz^2 \end{cases} \quad (37)$$

ただし、 A 、 B は次の形で表される。

$$\begin{cases} A = \frac{\sigma_{x\infty} + \sigma_{y\infty}}{4} \\ B = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{y\infty} - \sigma_{x\infty}}{2} + i\tau_{xy\infty} \right) \end{cases} \quad (4)$$

複素平面上で、だ円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ は式(2)により円 $|\zeta| = R$ に写像される。ただし、 c 、 R は次の形で表される。

$$z = Z(\zeta) = \frac{c}{2} \left(\zeta + 1/\zeta \right), \quad z = x + iy \quad (2)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (3)$$

$z \rightarrow \infty$ のとき $\zeta \rightarrow \infty$ より z が十分大きな値において ζ 面上では式(37)より次の形になる。

$$\Phi(\zeta) = \phi(Z(\zeta)) = A \cdot \frac{c}{2} \zeta = \frac{1}{2} Ac \zeta \quad (38)$$

$$\Phi^I(\zeta) = \phi'(Z(\zeta)) = A \quad (39)$$

$$\Psi^I(\zeta) = \psi'(Z(\zeta)) = 2B \cdot \frac{c}{2} \zeta = Bc \zeta \quad (40)$$

また、一般に次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} -P_y - iP_x &= \overline{\phi(z)} + \{\bar{Z}\phi'(z) + \psi'(z)\} \\ &= \overline{\Phi(\zeta)} + \{Z(\zeta)\Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta)\} \end{aligned} \quad (41)$$

そこで、 $X(\zeta) = \overline{Z(\zeta)}\Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta)$ とすると、 $\zeta \rightarrow \infty$ においては次の形になる。

$$X(\zeta) = \left[\frac{c}{2} \left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \right]_{\infty} \quad (42)$$

ζ 面上において $\bar{\zeta} = R/\zeta$ が成り立つので、式(38)～(40)、(42)より次式が成り立つ。

$$X(\zeta) = \left(\frac{Ac}{2R^2} + Bc \right) \zeta \quad (43)$$

だ円孔縁上 L において外力が働かないので

$$P_x = P_y = 0 \quad (44)$$

よって、式(41)は、式(44)より次の形になる。

$$\overline{\Phi(\zeta)} + X(\zeta) = 0 \quad (45)$$

鏡像原理より $|\zeta| > R$ の領域から L を越えて $|\zeta| > R$ に次の形の関数により解析接続できる。

$$\begin{cases} \Phi(\zeta) = -\overline{X(\bar{\zeta})} = -X(R^2/\zeta) \\ X(\zeta) = -\overline{\Phi(\bar{\zeta})} = -\Phi(R^2/\zeta) \end{cases} \quad (46)$$

$\Phi(\zeta)$ も $X(\zeta)$ も $|\zeta| > R$ の領域には特異点を持たないので、解析接続をおこなうと $\zeta = 0$ で特異点を持つ。その主要部は式(46)より次の形になる。

$$\begin{cases} \Phi(\zeta) = -\left(\frac{Ac}{2R^2} + \bar{B}c \right) \frac{R^2}{\zeta} \\ X(\zeta) = -\frac{1}{2} Ac \frac{R^2}{\zeta} \end{cases} \quad (47)$$

以上で全 ζ 面上に存在する2つの特異点での主要部が式(38)、(43)、(47)の形で求めたので、これらを重ね合わせると次の形になる。

$$\begin{cases} \Phi(\zeta) = \frac{1}{2} Ac \zeta - (A + 2R^2 \bar{B}) \frac{c}{2\zeta} \\ X(\zeta) = \left(\frac{A}{2R^2} + B \right) c \zeta - \frac{1}{2} Ac \frac{R^2}{\zeta} \end{cases} \quad (1)$$

5.2 計算式 応力を求める際に必要となる項をまとめて示す。

$$\begin{aligned} \Phi^I(\zeta) &= \Phi'(\zeta)/Z'(\zeta) \\ &= \frac{Ac\zeta^2 + (A + 2R^2 \bar{B})}{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Psi^I(\zeta) &= X(\zeta) - \overline{Z(\zeta)}\Phi^I(\zeta) \\ &= \left(\frac{A}{2R^2} + B \right) c \zeta - \frac{1}{2} Ac \frac{R^2}{\zeta} \\ &\quad - \frac{\{A\zeta^2 + (A + 2R^2 \bar{B})\}cR^2}{2\zeta(\zeta^2 - 1)} \\ &\quad - \frac{\{A\zeta^3 + (A + 2R^2 \bar{B})\}c}{2R^2(\zeta^2 - 1)} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}\Phi^{\text{II}}(\zeta) &= \Phi'(\zeta)/Z'(\zeta)^2 - \Phi'(\zeta)Z''(\zeta)/Z'(\zeta)^3 \\ &= -\frac{4(A+2R^2\bar{B})\zeta}{c(\zeta^2-1)^2} - \frac{4A\zeta^3+4(A+2R^2\bar{B})\zeta}{c(\zeta^2-1)^3} \quad (50)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi'(\zeta) &= Z'(\zeta)\Psi^{\text{I}}(\zeta) \\ &= \frac{\{R^2B\zeta^2 - (A+R^2B+R^2\bar{B})\}c^2}{2R^2\zeta} \\ &\quad - \frac{(A\zeta^2+R^2\bar{B})R^2c^2}{2\zeta^3} \quad (51)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi''(\zeta) &= \frac{\{R^2B\zeta^2 + (A+R^2B+R^2\bar{B})\}c^2}{2R^2\zeta^2} \\ &\quad + \frac{(A\zeta^2+3R^2\bar{B})R^2c^2}{2\zeta^4} \quad (52)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{\text{II}}(\zeta) &= \Psi''(\zeta)/Z'(\zeta)^2 - \Psi'(\zeta)Z''(\zeta)/Z'(\zeta)^3 \\ &= \frac{2R^2B\zeta^4 + 2(A+R^2B+R^2\bar{B})\zeta^2}{R^2(\zeta^2-1)^2} \\ &\quad + \frac{2(A\zeta^2+3R^2\bar{B})R^2}{(\zeta^2-1)^2} \\ &\quad - \frac{4R^2B\zeta^4 - 4(A+R^2B+R^2\bar{B})\zeta^2}{R^2(\zeta^2-1)^3} \\ &\quad + \frac{4(A\zeta^2+R^2\bar{B})R^2}{(\zeta^2-1)^3} \quad (53)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Z(\zeta)}{\bar{\zeta}}\Phi^{\text{II}}(\zeta) &= -\frac{2(A+2R^2\bar{B})(\bar{\zeta}^2+1)\zeta}{\bar{\zeta}(\zeta^2-1)^2} \\ &\quad - \frac{\{2A\zeta^2+2(A+2R^2\bar{B})\}(\bar{\zeta}^2+1)\zeta}{\bar{\zeta}(\zeta^2-1)^3} \quad (54)\end{aligned}$$

5.3 だ円縁における接線方向応力 だ円孔を持つ無限平板に遠方で一様な応力 $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$, $\tau_{xy\infty}$ が作用するときの楕円孔縁における接線方向応力を求める。だ円孔境界において法線方向を ξ 軸, 接線方向を η 軸と表す。応力の第1不変量, および式(1), (4)~(7)より次式の関係が求まる。

$$\begin{aligned}\sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\Phi^{\text{I}}(\zeta)] \\ &= 4\text{Re}\left[\frac{A\zeta^2 + (A+2R^2\bar{B})}{\zeta^2-1}\right] \\ &= \text{Re}\left[\frac{(\sigma_{x\infty} + \sigma_{y\infty})(\zeta^2+1)}{\zeta^2-1}\right. \\ &\quad \left. + \frac{2R^2(\sigma_{y\infty} - \sigma_{x\infty} - 2i\tau_{xy\infty})}{\zeta^2-1}\right] \quad (55)\end{aligned}$$

楕円孔縁では, $\sigma_\xi = 0$, $|\zeta| = R$ より $\zeta = Re^{i\theta}$ とおくと式(55)より σ_η は次の形になる。

$$\begin{aligned}\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_\eta &= \frac{R^4(1-2\cos 2\theta) + 2R^2 - 1}{R^4 - 2R^2\cos 2\theta + 1}\sigma_{x\infty} \\ &\quad + \frac{R^4(1+2\cos 2\theta) - 2R^2 - 1}{R^4 - 2R^2\cos 2\theta + 1}\sigma_{y\infty} \\ &\quad - \frac{4R^4\sin 2\theta}{R^4 - 2R^2\cos 2\theta + 1}\tau_{xy\infty} \quad (56)\end{aligned}$$

σ_η の最大値または最小値を求めるために σ_η を θ で微分すると次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_\eta}{d\theta} &= \frac{4R^2\sigma_{x\infty}(R^6 - R^4 - R^2 + 1)\sin 2\theta}{(2R^2\cos 2\theta - R^4 - 1)^2} \\ &\quad - \frac{4R^2\sigma_{y\infty}(R^6 + R^4 - R^2 - 1)\sin 2\theta}{(2R^2\cos 2\theta - R^4 - 1)^2} \\ &\quad + \frac{8R^4\tau_{xy\infty}\{2R^2 - (R^4 + 1)\cos 2\theta\}}{(2R^2\cos 2\theta - R^4 - 1)^2} \quad (57)\end{aligned}$$

式(57)の右辺を0とすることで式(58)が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma_{x\infty}(R^6 - R^4 - R^2 + 1)\sin 2\theta \\ - \sigma_{y\infty}(R^6 + R^4 - R^2 - 1)\sin 2\theta \\ + 2\tau_{xy\infty}R^2\{2R^2 - (R^4 + 1)\cos 2\theta\} = 0 \quad (58)\end{aligned}$$

σ_η の最大値または最小値は式(58)より θ の値を求め式(56)に代入した値となる。式(55)から $\tau_{xy\infty} \neq 0$ のとき, σ_η が最大値となる位置は x 軸, y 軸上でないことがわかる。

文 献

- (1) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1970.
- (2) 森口繁一: 2次元弾性論, 生産技術センター, 1956.
- (3) 村上敬宜: 弾性力学, 養賢堂, 2002.
- (4) M. Abe, H. Ito and Y. Murakami, Proc. of 4th Int. Conf. on Fatigue '90, Vol. III(1990), eds. H. Kitagawa and T. Tanaka, pp. 1661-1666.
- (5) F. Erdogan and G. C. Sih, J. Basic. Engng. Trans. ASME, 85 (1963), pp. 519-527.