圧電体のき裂エネルギー密度 CED* (定義と基本関係の導出)

南 秉 群^{*1}, 渡 邊 勝 彦^{*1}

Crack Energy Density for Piezoelectric Body (Definition and Derivation of Fundamental Relations)

Byeung-Gun NAM^{*2} and Katsuhiko WATANABE

^{*2} Institute of Industrial Science, The University of Tokyo,
4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8505 Japan

Crack Energy Density (CED) is the parameter that enables a unified description of crack behavior without any restriction on constitutive equation and its applicability has been shown for ordinary materials. In this paper, the concept of CED is extended to piezoelectric body and its fundamental matters are studied. The definitions of CED and its mechanical and electrical parts are given first and their path independent expressions are derived through the energy conservation law. Subsequently, the loading path dependence of mechanical and electrical parts even for reversible process is made clear. Moreover, some quantities related to CED are defined and their path independent expressions are given.

Key Words: Fracture, Piezoelectric Material, Crack Energy Density (CED), Conservation Law, Path Independent Integral, Fracture Parameter

1. 結 言

圧電材料は、その特性である電気-力学的連成挙動の故、様々な分野で幅広く用いられ、その強度的信頼性への要求も高まっていることから、近年、破壊力学的立場からの強度評価研究も活発に行われて来ている^{①-③}。通常材料を対象に成功した応力拡大係数やエネルギー解放率、 J 積分等のパラメータの圧電材料への拡張が試みられ^{④-⑥}、それらパラメータを用いて破壊現象を説明することが試みられて来た。しかし、応力拡大係数には電界の強さの影響は現れず^⑦、また、エネルギー的考察から導かれて圧電材料における一般化 J 積分とされ、エネルギー解放率の意味を持つとされる量には電界の影響がその値の正負によらず同等に現れて来るので^⑧、それらパラメータは電界の強さ、値の正負に依存する実験結果^⑨を説明できない。そこで Park らは対象とする破壊は力学的なものであるのでエネルギー解放率のうち、力学的寄与分のみを用いる力学的ひずみエネルギー解放率(mechanical strain energy release rate)を圧電体の破壊パラメータとして用いることを提案し、実験結果と比較してその有効性を主張した^⑩。しかし、全体エネルギー解放率のうち、力学的寄与分のみを取り出す理由に関する適切な説明がなされなかったの

で、反論を呼び起したこともある^⑪。このように、圧電材料はぜい性材料であるにもかかわらず線形破壊力学的な方法論の拡張は成功していない。この原因の一つと考えられるものとして電気的挙動においては非線形性が早く現れるということがあり、Gao^⑫らはこれを評価する最も簡単なモデルとして従来の Dugdale モデル^⑬と類似なき裂前方面内の電気的降伏を考えるモデルを提案し、局所エネルギー解放率(local energy release rate)に基づく破壊基準を提案した。なお、Fang ら^⑭によって分極反転(domain switching)を考慮したエネルギー平衡に基づく破壊基準も発表されている。また最近では、上述の非線形挙動を考慮に入れるものではないが、Shi^⑮によって提案されたひずみエネルギー密度理論を圧電体に対して拡張したものを破壊パラメータとして用いる試みも多い^⑯。

以上のように、数多い様々な試みにもかかわらず、圧電体の破壊挙動を評価するためのパラメータとして何を用いるべきか、破壊基準はどのように表されるのか、といった基本的問題に関する議論が続いており、一致した結論に至っている点は多くない。

ところで、これまでに、通常材料を対象としてであるがき裂パラメータが特定の構成則の下でのみ定義されていることから来る制約が、き裂エネルギー密度 CED の概念を導入することにより打破され、構成則に関係なく統一的に取り扱うことが可能となることが示されている^{⑰-⑱}。本研究は前記圧電材料における現状の一

* 原稿受付 2005 年 5 月 19 日。

^{*1} 正員、東京大学生産技術研究所 (〒153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1)。

E-mail: nam@ced.iis.u-tokyo.ac.jp

Fig. 1 Piezoelectric body with a notch

因にこの CED の概念の欠如があるのではと考え、CED の概念を圧電材料に拡張導入し、関連する基本的諸関係を導いて、CED を中心としての圧電材料破壊力学ともいべきものを展開するための基本を与えようとするものである。はじめに圧電材料における CED およびその力学的、電気的寄与分を定義し、さらに、電気力学的基本関係から導かれるエネルギー保存則に基づき、二次元圧電連続体におけるそれらの径路独立積分表示を与える。続いて CED の力学的、電気的寄与分の荷重履歴依存性について論じ、また CED に基づく圧電材料破壊力学を構成していく上で補助的な役割を果たすと思われる関連する幾つかの量を定義してそれらの径路独立積分表示を与えるとともに、その 1 つが圧電体の J 積分¹⁰⁾と呼ばれる量に一致することを示す。

2. 圧電材料における CED とその径路独立積分表示

2・1 CED の定義 き裂を図1に示すような圧電連続体中の十分小さな曲率半径 ρ を有する切欠きでモデル化するものとし、通常用いられる鋭いき裂モデルは $\rho \rightarrow 0$ の極限として位置づける。**CED**は、通常の物体に対し、「き裂端が初期の状態から現在までに担ってきたエネルギーを、き裂端前縁を含むき裂端前方の面内の単位面積あたりで表したもの」として定義されており、連続体モデルにおいては、ひずみ エネルギー面積密度とも呼ぶべき量である⁽¹⁹⁻²⁰⁾。なお定義において用いている面という語についてであるが、図1のき裂においてはき裂端 Γ_0 を含む厚さ 2ρ の薄い層を指し、完全な面となるのは $\rho \rightarrow 0$ の場合のみであるが、ここでは便宜的に面という語を用いている。圧電体においては力学的エネルギーに加え、電気的なエネルギーが存在する。そこで圧電連続体に対する**CED**を、通常材料に対するものの自然な拡張として、 Γ_0 を、図1中に示す、き裂端と見なす切欠き端の半円状の径路、座標軸

X_1, X_2 を図のようにとるものとして, 次のように定義する.

$$\mathcal{E} = \int_{\Gamma_0} W dX_2 \dots\dots\dots(1)$$

ここに W は拡張ひずみエネルギー密度とも呼ぶべき量であり(以後そう呼ぶ), σ_{ij} , ε_{ij} , D_i , E_i をそれぞれ応力, ひずみ, 電気変位(電束密度), 電界(電場)として

$$W^M = \int_0^t \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, W^E = \int_0^t E_i dD_i \dots\dots\dots(2)$$

$$W = W^M + W^E$$

によって与えられる, 単位体積あたりの力学的エネルギー(ひずみエネルギー密度) W^M と電気的エネルギー W^E の和であり, このようにするとき, $\mathcal{E}$ は拡張ひずみエネルギー・面積密度の意味を持つ. また式(1), (2)より明らかであるが, CED はその力学的寄与分と電気的寄与分に分離でき, それらの和として

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}^M + \mathcal{E}^E \\ \mathcal{E}^M &= \int_{\Gamma_+} W^M dX_2, \quad \mathcal{E}^E = \int_{\Gamma_-} W^E dX_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

と表すこともできる。以後、 $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{E}^E$ をそれぞれ力学
的 CED, 電氣的 CED と呼ぶことにする。なお式(2)の積
分は、初期状態の時刻 $\tau = 0$ から現在の時刻 $\tau = t$ まで
実際の履歴に沿って積分を行うことを意味しており、
以後同様である。

$\rho=0$ の鋭いき裂に対する CED は, 上のように定義された CED の $\rho \rightarrow 0$ における極限として次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(c)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{E} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} W dX_2 \\ \mathcal{E}^{M(c)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{E}^M = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} W^M dX_2 \dots\dots\dots(4) \\ \mathcal{E}^{E(c)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{E}^E = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} W^E dX_2\end{aligned}$$

ここで上付き(c)は鋭いき裂に対する量であることを示すものである.

2・2 CEDの径路独立積分表示

2・2・1 エネルギー保存則 ここでは、通常の材料を対象に考えた場合に倣い¹⁰⁸⁾、まず、経路独立積分表示を導入にあたっての基礎となる圧電材料の電気・力学的エネルギー保存則を導いておく。

時刻 0 における初期の自然状態より任意の履歴を受け、時刻 t において図 2 に示すような状態にある圧電連続体を考える。 S と V はそれぞれ圧電体内の任意の閉曲面及びそれによって囲まれる部分の体積であり、

Fig. 2 Piezoelectric body under electromechanical loadings

このとき V 内と S 上の各点で

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad D_{i,i} - q_b = 0 \\ \varepsilon_{ij} &= 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i} \quad \text{in } V \quad \dots\dots\dots(5) \\ T_i &= \sigma_{ij}n_j, \quad q_s = -D_{i,i}n_i \quad \text{on } S \end{aligned}$$

のような電気-力学的関係が成り立つ。ここで、 u_i , f_i , T_i はそれぞれ変位、体積力、表面力であり、 ϕ , q_b , q_s はそれぞれ電気ポテンシャル、体積電荷、表面電荷、 n_i は S 上にとった外向き単位法線ベクトルである。これらの関係は、各点で、負荷に伴う変化の間にも常に成り立つのであるから、 $d\tau$ 時間の変化に対応して次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \int_V \{(\sigma_{ij,j} + f_i)du_i - \phi d(D_{i,i} - q_b)\} dV \\ + \int_S \{(T_i - \sigma_{ij}n_j)du_i + \phi d(D_{i,i}n_i + q_s)\} dS = 0 \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

これを、Gauss の定理と部分積分などを利用して整理すると

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i) dV \\ = \int_S (T_i du_i + \phi dq_s) dS + \int_V (f_i du_i + \phi dq_b) dV \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

が得られ、式(2)も考慮して、時刻 0 より t の間の変化に対するエネルギー保存則が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \int_V W dV = \int_S \int_0^t (T_i du_i + \phi dq_s) dS \\ + \int_V \int_0^t (f_i du_i + \phi dq_b) dV \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

次に上式の場所に対する勾配をとると

$$\begin{aligned} \int_V W_{,k} dV = \int_S \int_0^t (T_i du_i + \phi dq_s)_{,k} dS \\ + \int_V \int_0^t (f_i du_i + \phi dq_b)_{,k} dV \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

であり、これに Gauss の定理を適用し、右辺の項を移項して与えられる表示を w_k と表すとき

$$\begin{aligned} w_k = \int_S [Wn_k - \int_0^t \{(T_i du_i + \phi dq_s)_{,k} \\ + (f_i du_i + \phi dq_b)_{,k}\} dS = 0 \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。これは式(8)のエネルギー保存則の場所に対する勾配、すなわち図 2 に示すような領域 V と合同な ΔX_k ($k=1,2,3$) だけ平行にずれた位置にある領域を考えると、この二つの領域に対する保存則の差を単位のもの当たりで表したものの意味を持つ。なお、上式は種々の表現が可能であり、式(5)の関係と Gauss の定理、部分積分などを利用して次のように変形できる。

$$\begin{aligned} w_k = \int_S (Wn_k - T_i u_{i,k} - \phi q_{s,k}) dS - \int_V \{(f_i u_{i,k} + \phi q_{b,k}) \\ + \int_0^t (\sigma_{ij,k} d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij,k} d\sigma_{ij} + E_{j,k} dD_j - D_{j,k} dE_j)\} dV = 0 \quad \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

ところで、以上においては全体のエネルギーについて考えたが、式(6)において、それぞれ力学的部分のみあるいは電気的部分のみを取り出した

$$\int_V \{(\sigma_{ij,j} + f_i)du_i\} dV + \int_S \{(T_i - \sigma_{ij}n_j)du_i\} dS = 0 \quad (12)$$

$$\int_V \{-\phi d(D_{i,i} - q_b)\} dV + \int_S \{\phi d(D_{i,i}n_i + q_s)\} dS = 0 \quad (13)$$

も成り立つことは明らかであり、式(7)から式(11)までと同様の議論により次の関係が導ける。

$$\begin{aligned} w_k^M = \int_S (W^M n_k - T_i u_{i,k}) dS \\ - \int_V \{f_i u_{i,k} + \int_0^t (\sigma_{ij,k} d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij,k} d\sigma_{ij})\} dV = 0 \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_k^E = \int_S (W^E n_k - \phi q_{s,k}) dS \\ - \int_V \{\phi q_{b,k} + \int_0^t (E_{j,k} dD_j - D_{j,k} dE_j)\} dV = 0 \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

2・2・2 経路独立積分表示 図 1 において、 Γ をき裂(切欠き)端を囲む任意の閉曲線、 Γ_u , Γ_d をそれぞれき裂(切欠き)上面、下面での径路として閉曲線 $\Gamma + \Gamma_u - \Gamma_0 + \Gamma_d$ によって囲まれる領域を考え、その面積を A とする。このとき二次元問題を考えているので、 $k=1$ のときの式(12)に対応する関係として、体積力と体積電荷は簡単のために考えないものとして次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} w_1 = \int_{\Gamma + \Gamma_u - \Gamma_0 + \Gamma_d} (Wn_1 - T_i u_{i,1} - \phi q_{s,1}) d\Gamma \\ - \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij,1} d\sigma_{ij} + E_{j,1} dD_j - D_{j,1} dE_j) dA = 0 \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここでき裂面での境界条件についてであるが、電気的
 なものについては様々な議論がある¹⁰⁻¹³。この境界条
 件の影響については別途詳しく論じるものとして、本
 報では力学的自由表面の条件と共に取扱いが相対的に
 容易な電気的不浸透性条件(impermeable condition)¹⁰⁻¹⁴
 を適用する。すなわち $\Gamma_u, \Gamma_d, \Gamma_0$ 上で $T_i = 0$ 、また
 $q_s = 0$ とする。このとき Γ_u, Γ_d 上で $dX_2 = 0$ であるこ
 とも考慮すると、式(1)、(16)より

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \int_{\Gamma_0} W dX_2 \\
 &= \int_{\Gamma_0} \phi q_{s,1} d\Gamma + \int_{\Gamma} (W n_1 - T_i u_{i,1} - \phi q_{s,1}) d\Gamma \quad \dots (17) \\
 &\quad - \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij} + E_{j,1} dD_j - D_{j,1} dE_j) dA
 \end{aligned}$$

なる関係が得られる。また、以上ではき裂端での拡張ひ
 ずみエネルギー W に注目し、式(11)の関係をを用いて論
 を進めたが、同様に力学的エネルギー W^M と電気的エ
 ネルギー W^E に対しても、式(14)と式(15)の関係および
 式(3)から

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^M &= \int_{\Gamma_0} W^M dX_2 \\
 &= \int_{\Gamma} (W^M n_1 - T_i u_{i,1}) d\Gamma - \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij}) dA \quad \dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^E &= \int_{\Gamma_0} W^E dX_2 = \int_{\Gamma_0} \phi q_{s,1} d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma} (W^E n_1 - \phi q_{s,1}) d\Gamma - \int_A \int_0^t (E_{j,1} dD_j - D_{j,1} dE_j) dA \quad \dots (19)
 \end{aligned}$$

なる関係が導ける。式(17)~(19)において、 Γ はき裂を囲
 む任意の径路であるので、 Γ のとり方に依存しないとい
 う意味で、最右辺の積分はすべて径路独立な積分とな
 っており、それぞれ CED、力学的 CED、電気的 CED
 を評価するものとなっていることがわかる。

さて、以上は構成式にはならん制約なく成立する議
 論であるが、ここで材料が可逆な挙動をするものとす
 るとき、 T を絶対温度、 s をエントロピーとして

$$dU = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + E_i dD_i + T ds, \quad U = \int_0^t dU \quad \dots (20)$$

で与えられる内部エネルギー密度 U は状態量である
 ので、履歴に依存しない、現在のひずみ、電気変位、エ
 ントロピーのみの関数となり、

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad E_i = \frac{\partial U}{\partial D_i}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s} \quad \dots (21)$$

が成り立つ。このとき

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{mn}} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{mn}} \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{mn}} \right) = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \dots (22.a)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial D_m} = \frac{\partial}{\partial D_m} \left(\frac{\partial U}{\partial D_i} \right) = \frac{\partial}{\partial D_i} \left(\frac{\partial U}{\partial D_m} \right) = \frac{\partial E_m}{\partial D_i} \quad \dots (22.b)$$

であるので、式(17)の面積分部分における被積分項の前
 半部分と後半部分はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 &\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij} \\
 &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{mn}} \epsilon_{mn,1} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m} D_{m,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{mn}} d\epsilon_{mn} \quad \dots (23.a) \\
 &\quad - \epsilon_{ij,1} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m} dD_m = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m} D_{m,1} d\epsilon_{ij} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m} \epsilon_{ij,1} dD_m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &E_{i,1} dD_i - D_{i,1} dE_i \\
 &= \frac{\partial E_i}{\partial \epsilon_{mn}} \epsilon_{mn,1} dD_i + \frac{\partial E_i}{\partial D_m} D_{m,1} dD_i - D_{i,1} \frac{\partial E_i}{\partial \epsilon_{mn}} d\epsilon_{mn} \quad \dots (23.b) \\
 &\quad - D_{i,1} \frac{\partial E_i}{\partial D_m} dD_m = \frac{\partial E_i}{\partial \epsilon_{mn}} \epsilon_{mn,1} dD_i - D_{i,1} \frac{\partial E_i}{\partial \epsilon_{mn}} d\epsilon_{mn}
 \end{aligned}$$

と変形でき、さらに式(21)より

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_m} = \frac{\partial}{\partial D_m} \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left(\frac{\partial U}{\partial D_m} \right) = \frac{\partial E_m}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \dots (24)$$

でもあるので、式(23.a)と式(23.b)は絶対値が等しく符
 号が逆の値をとることになり、

$$\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij} + E_{i,1} dD_i - D_{i,1} dE_i = 0 \quad \dots (25)$$

である。すなわち、材料が可逆な挙動をする場合には
 式(17)の最右辺の面積分項は消え、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \int_{\Gamma_0} W dX_2 \\
 &= \int_{\Gamma} (W n_1 - T_i u_{i,1} - \phi q_{s,1}) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \phi q_{s,1} d\Gamma \quad \dots (26)
 \end{aligned}$$

となる。しかし、このように全体の CED に対する式(17)
 の面積分項は消えるが、それを分離した $\mathcal{E}^M$ と $\mathcal{E}^E$ に対
 する式(18)、(19)の面積分項は、材料が可逆な挙動をする
 場合であっても消えないことに注意したい。

**2・2・3 力学的 CED と電気的 CED の荷重履歴依存
 性** ここでは、前節までに与えられた圧電材料 CED の、
 その注意すべき基本的性質として、力学的 CED と電気
 的 CED の現在の荷重状態に至るまでの荷重履歴への
 依存性について述べる。

材料が可逆な挙動をする場合、 W は、等エントロピー
 (断熱過程であれば、式(2)、(20)から分かるようには内部
 エネルギー U と等しくなる。等温過程であれば、
 $F (= U - Ts)$ を Helmholtz の自由エネルギーとして、式
 (20)を用いると

$$dF = dU - Tds = dW \quad \text{.....(27)}$$

であるので、 W は Helmholtz の自由エネルギーと等しくなる。従って、これらの場合、 W は現在のひずみと電気変位の状態のみで定まる量となる。一般的過程においては厳密にはこのような W は存在しないが、エントロピーや温度の影響は小さいとしてこれらの影響は無視し、現在のひずみと電気変位の状態のみで定まるポテンシャルとしての W の存在を仮定し、応力、ひずみ、電界、電気変位の間の可逆な構成関係を与え、問題を扱うのが普通である²⁰⁾。

こうして可逆な挙動をする場合 W は現在の状態のみで定まる状態量と見なせ、式(1)で定義される ε も履歴に関係なく現在の状態のみで定まる量となる。しかし W を分離した W^M と W^E は現在の状態のみで定まる量とはならず、現在に至る電気力学的荷重履歴に依存する量であり、従って、式(3)で定義される ε^M と ε^E も荷重履歴に依存する量となる。そしてこのことが、径路独立積分表示において、 ε については式(17)において面積分項が消え、現在の各量の値のみから式(26)で評価されるのに対し、 ε^M と ε^E については、式(18)と式(19)の履歴に沿った面積分項の評価が必要となることに対応する。この間の事情をより明確にするため、次に、応力、ひずみ、電界、電気変位の間に線形関係が成り立つ場合について具体的に検討する。

図3, 4は、現在の荷重状態に至るまでに、(I) 始めに力学的荷重をかけてから電気的荷重を加える場合、(II) その逆の場合、(III) 両荷重を同時に加えて行く比例負荷の場合、の3つの荷重履歴を例に、それぞれ、荷重履歴によって W^M と W^E がどのように違ってくるかを簡単のため一軸的に示したものである。これらの図において、 $\overline{OAC}$ 、 $\overline{OBC}$ 、 $\overline{OC}$ はそれぞれ上の3つの荷重履歴に対する応力-ひずみ、電界-電気変位の間の変化を表し、線形問題であるので最終状態のC点はそれに至る履歴に依存することなく一意に定まることに留意したい。これら $\overline{OAC}$ 、 $\overline{OBC}$ 、 $\overline{OC}$ の下の面積(図中うすずみで(I)の場合が示してある)がそれぞれの場合の W^M と W^E に対応する。 $\overline{OA}$ 、 $\overline{BC}$ は平行で、力学的荷重を加えた場合の変化を、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{AC}$ はやはり平行で、電気的荷重を加えた場合の変化を表している。力学的荷重、電気的荷重、あるいは両方同時に加える比例負荷といった荷重の種類によって変化の傾きが異なることに注意したい。このことによって W^M 、 W^E は荷重履歴に依存することになり、それらは、例えば、(I)の場合の W^M と W^E をそれぞれ $W^M(M \rightarrow E)$ 、 $W^E(M \rightarrow E)$ と表すと、

Fig. 3 History dependence of W^M Fig. 4 History dependence of W^E

$$W^M(M \rightarrow E) = \frac{1}{2} \sigma_M \varepsilon_M + \frac{1}{2} \sigma_E \varepsilon_E + \sigma_M \varepsilon_E \quad \text{.....(28.a)}$$

$$W^E(M \rightarrow E) = \frac{1}{2} E_M D_M + \frac{1}{2} E_E D_E + E_M D_E \quad \text{.....(28.b)}$$

のように計算される。ここで、諸量における下付きの M と E はそれぞれ力学的荷重、電気的荷重のみを加えたとき生じる諸量を表している。同様に(II)の場合はその W^M と W^E をそれぞれ $W^M(E \rightarrow M)$ 、 $W^E(E \rightarrow M)$ と表して

$$W^M(E \rightarrow M) = \frac{1}{2} \sigma_E \varepsilon_E + \frac{1}{2} \sigma_M \varepsilon_M + \sigma_E \varepsilon_M \quad \text{.....(29.a)}$$

$$W^E(E \rightarrow M) = \frac{1}{2} E_E D_E + \frac{1}{2} E_M D_M + E_E D_M \quad \text{.....(29.b)}$$

(III)の場合はやはりその W^M 、 W^E をそれぞれ $W^M(M, E)$ 、 $W^E(M, E)$ で表して

$$W^M(M, E) = \frac{1}{2} (\sigma_M + \sigma_E)(\varepsilon_M + \varepsilon_E) \quad \text{.....(30.a)}$$

$$W^E(M, E) = \frac{1}{2} (E_M + E_E)(D_M + D_E) \quad \text{.....(30.b)}$$

のように計算され、 W^M と W^E は各場合で異なったものとなる。しかし、 W^M と W^E の和である W は履歴に依存しない最終状態のみで定まる量であるので、それぞれ式(28a)と式(28b)、式(29a)と式(29b)、式(30a)と式(30b)の和として与えられる $W(M \rightarrow E)$ 、 $W(E \rightarrow M)$ 、 $W(M, E)$ は等しい、すなわち

$$W(M \rightarrow E) = W(E \rightarrow M) = W(M, E) \quad (31)$$

でなければならない、図3と図4における三角形 OAC の面積、また三角形 OBC の面積は等しいものとなる。

こうして、一般的な構成関係を考える場合はもちろんであるが、たとえ線形挙動をする場合であっても、 $\mathcal{E}^M$ 、 $\mathcal{E}^E$ は荷重履歴に依存する量となることに注意したい。

3. CED 関連諸量とその径路独立積分表示

圧電体の破壊問題において、エネルギー面積密度の意味を持つ CED、とりわけ、き裂端でなされる力学的仕事の面積密度である力学的 CED が中心的役割を果たすのではと考えているが、それについては今後検討を進めるものとして、ここでは補助的なものとして CED に関連するいくつかの量を定義しそれらの径路独立積分表示を与える。

まず、力学的、電気的コンプリメンタリー・エネルギーの面積密度 $\mathcal{E}_c^M$ 、 $\mathcal{E}_c^E$ を

$$\mathcal{E}_c^M = \int_{\Gamma_0} W_c^M dX_2, \quad \mathcal{E}_c^E = \int_{\Gamma_0} W_c^E dX_2 \quad (32)$$

によって定義する。ここで、 W_c^M 、 W_c^E はそれぞれ

$$W_c^M = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad W_c^E = \int_0^{D_i} E_i dD_i \quad (33)$$

によって与えられる力学的コンプリメンタリー・エネルギー密度、電気的コンプリメンタリー・エネルギー密度である。

式(5)より、式(12)、(13)が成り立つのと同様に

$$\int_V \{u_i d(\sigma_{ij,j} + f_i)\} dV + \int_S \{u_i (T_i - \sigma_{ij} n_j)\} dS = 0 \quad (34)$$

$$\int_V \{-(D_{i,i} - q_s) d\phi\} dV + \int_S \{(D_i n_i + q_s) d\phi\} dS = 0 \quad (35)$$

なる関係が成り立つ。これらより、式(18)、(19)を導いたのと同様の導出過程により、ここでも簡単のために体積力と体積電荷は考えないものとして、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^M &= \int_{\Gamma_0} W_c^M dX_2 = \int_{\Gamma} (W_c^M n_i - u_i T_{i,1}) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} u_i T_{i,1} d\Gamma \\ &\quad + \int_A \int_0^{\epsilon_{ij}} (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij}) dA \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^E &= \int_{\Gamma_0} W_c^E dX_2 \\ &= \int_{\Gamma} (W_c^E n_i - q_s \phi_{,1}) d\Gamma + \int_A \int_0^{D_i} (E_{i,1} dD_i - D_{i,1} dE_i) dA \end{aligned} \quad (37)$$

なる関係が得られ、式(36)、(37)の最右辺は $\mathcal{E}_c^M$ 、 $\mathcal{E}_c^E$ の径路独立積分表示を与えるものとなっている。

続いて $\mathcal{E}^M$ 、 $\mathcal{E}^E$ 、 $\mathcal{E}_c^M$ 、 $\mathcal{E}_c^E$ を組み合わせることができる $\mathcal{E}_c$ 、 $\mathcal{E}^H$ 、 $\mathcal{E}_c^H$ を次のように定義する。

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c^M + \mathcal{E}_c^E \quad (38)$$

$$\mathcal{E}^H = \mathcal{E}^M - \mathcal{E}_c^E \quad (39)$$

$$\mathcal{E}_c^H = \mathcal{E}_c^M - \mathcal{E}^E \quad (40)$$

このとき、式(18)、(19)、(36)、(37)よりこれらの量の径路独立積分表示は直ちに求まり、特に材料が可逆な挙動をする場合には式(25)が成り立つので面積分は消え

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \int_{\Gamma} \{(W_c^M + W_c^E) n_i - u_i T_{i,1} - q_s \phi_{,1}\} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} u_i T_{i,1} d\Gamma \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^H &= \int_{\Gamma} \{(W^M - W_c^E) n_i - T_i u_{i,1} + q_s \phi_{,1}\} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} (H n_i - T_i u_{i,1} + q_s \phi_{,1}) d\Gamma \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^H &= \int_{\Gamma} \{(W_c^M - W_c^E) n_i - u_i T_{i,1} + \phi q_{s,1}\} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} (u_i T_{i,1} - \phi q_{s,1}) d\Gamma \end{aligned} \quad (43)$$

によって与えられる。ここで式(42)において $H = W^M - W_c^E = W - E_i D_i$ である。

可逆な問題を考え、 W を状態量と考えるとき、 $W_c = W_c^M + W_c^E = W - \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - E_i D_i$ は上に与えた通りであり、さらに $H_c = -(W - \sigma_{ij} \epsilon_{ij})$ であるので、これら W_c 、 H 、 H_c はいずれもやはり状態量となり、 $\mathcal{E}_c$ 、 $\mathcal{E}^H$ 、 $\mathcal{E}_c^H$ も $\mathcal{E}$ と同じく荷重履歴に依存しない量となる。しかし $\mathcal{E}_c^M$ 、 $\mathcal{E}_c^E$ は $\mathcal{E}^M$ 、 $\mathcal{E}^E$ と同じく、可逆であっても荷重履歴に依存する。なお H は電気エンタルピーと呼ばれる量であり、従って、 $\mathcal{E}^H$ は電気エンタルピー面積密度の意味を持つ量となる。また、式(42)の形より明らかであるが、鋭いき裂に対する $\mathcal{E}^{H(c)}$ は、圧電材料の J 積分²⁰⁾と呼ばれるものと一致するものとなっており、これより、この J 積分は電気エンタルピー面積密度の意味を持つことが分かる。

また、補足的な関係ではあるが、線形問題であって比例負荷に問題を限れば、

$$W^E = \int_0^E E_i dD_i = \int_0^D D_i dE_i = W_c^E \dots\dots\dots (44)$$

が数値的に成り立つので,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^E &= \mathcal{E}_c^E = \mathcal{E}^M - \mathcal{E}^H \\ &= \int_\Gamma (W^E n_1 - q_s \phi_{,1}) d\Gamma - \int_A \int_0^{\epsilon_{ij}} (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij}) dA \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}^M + \mathcal{E}^E = \int_\Gamma (W n_1 - T_i u_{i,1} - q_s \phi_{,1}) d\Gamma \\ &\quad - 2 \int_A \int_0^{\epsilon_{ij}} (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij}) dA \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (46)$$

が成り立ち, $\mathcal{E}^E$ と $\mathcal{E}$ においても, 式(19), (26)では存在した, 数値評価にあたって正確な評価が困難な切欠き端経路 Γ_0 の寄与を消すことができる.

4. 結 言

圧電体における CED および力学的 CED, 電氣的 CED を定義して, それらの評価において重要な役割を果たす経路独立積分表示を導き, CED を中心として圧電材料破壊力学を構成する上での基礎を与えた. また, 力学的 CED と電氣的 CED の電気力学的荷重経路依存性について論じ, さらに補助的役割を果たすと思われる CED に関連する諸量を定義し, それらの経路独立積分表示を与えた.

文 献

- (1) Pak, Y.E., J. appl. Mech., 112, (1990), 647-653.
- (2) Sosa, H., Int. J. Solids Struct., 29(1992), 2613-2622.

- (3) Suo, Z., Kuo, C.M., Barnett, D.M. & Willis, J.R., J. Mech. & Phys. Solids & Struct., 35(1992), 739-765.
- (4) Park, S.B. & Sun, C.T., J. Am. Ceram. Soc., 78, (1995), 1475-1480.
- (5) Gao, H., Zhang, T.Y. & Tong, P., J. Mech. Phys. Solids, 45, (1997), 491-510.
- (6) Fang, D.N., Liu, B. & Hwang, K.C., Int. J. Fract., 100, No.4(2000), 401-408.
- (7) Shen, S. & Nishioka, T., Theor. Appl. Fract. Mech., 33(2000), 57-65.
- (8) Zuo, J.Z. & Sih, G.C., Theor. Appl. Fract. Mech., 34(2000), 17-33.
- (9) Soh, A.K., Fang, D.N. & Lee, K.L., Int. J. Solids Struct., 38(2001), 8331-8344.
- (10) Dunn, M.L., Eng. Fract. Mech. 48(1994), 25-39.
- (11) Sosa, H.A., Khutoryansky, N., Int. J. Solids Struct. 33(1996), 3399-3414.
- (12) Zhang, T.-Y., Qian, C.-F., Tong, P., Int. J. Solids Struct. 35(1998), 2121-2149.
- (13) Gao, C.-F., Fan, W.-X., Int. J. Solids Struct., 36(1999), 2527-2540.
- (14) Dugdale, D.S., J. Mech. Phys. Solids 8 (1960), 100-104.
- (15) Sih, G.C., Mechanics of Fracture, vols.I-VII, Sihoff and Noordhoff, The Netherlands, 1973-1981.
- (16) 渡邊, 機論(A), 47-416(1981), 406-415.
- (17) 渡邊, 機論(A), 48-433(1982), 1226-1236.
- (18) 渡邊, 機論(A), 50-453(1984), 894-903.
- (19) 渡邊, 機論(A), 51-463(1985), 873-882.
- (20) 池田, 圧電材料の基礎, オーム社, 1984