高次せん断変形理論に基づく板曲げ要素*

加 鳥 裕 明^{*1}, 岡 田 智 之^{*2}

Plate Element Based on a Higher-Order Shear Deformation Theory

Hiroaki KATORI^{*3} and Tomoyuki OKADA^{*3} Department of Vehicle System Engineering, Meijo University,
1-501 Shiogamaguchi, Tempaku-ku, Nagoya-shi, Aichi, 468-8502 Japan

The finite element models of the Kirchhoff (classical thin) plate theory and Mindlin plate theory are now standard. The Mindlin plate theory includes the effect of transverse shear deformation. This theory is called the first-order shear deformation theory. The first author developed a beam element based on a displacement formulation of Mindlin plate theory. The objective of this paper is to present a formulation for plate element based on the refined plate theory of Shimpi. The refined plate theory of Shimpi uses higher-order polynomials in the expansion of the displacement components through the thickness of plate. Furthermore, the transverse displacement w is given by $w = w_b + w_s$, where w_b and w_s are its components due to bending and shear, respectively. Several numerical experiments are performed and show that the present element gives excellent results for both thin and thick plates.

Key Words: Finite Element Method, Structural Analysis, Numerical Analysis, Plate Theory, Higher-Order Shear Deformation Theory

1. 結 言

平板の曲げ問題を有限要素法によって解析する場合, Kirchhoff の仮定に基づく平板理論が板曲げ要素の定式化に広く用いられている⁽¹⁾. この理論は平板が十分に薄い場合に良好な結果を与える. しかし, 厚板の場合や面外せん断剛性が曲げ剛性に比べて極めて小さい場合には, 面外せん断変形の影響が無視できなくなり, Kirchhoff の薄板理論が適用できなくなる. せん断変形の影響を考慮した理論として, Reissner⁽²⁾⁽³⁾ や Mindlin⁽⁴⁾ の平板理論がある. Clough, Felippa⁽⁵⁾ は Mindlin の平板理論に基づきせん断変形の影響を考慮する際に, 断面回転角とたわみが互いに独立であるとした. ところが, 板厚が次第に小さくなると要素剛性が真の値より大きく評価される, いわゆるロッキング現象を生じる傾向があった. この問題を解決するため Zienkiewicz ら⁽⁶⁾ は低減積分法を用いた. また, Hughes ら⁽⁷⁾ は Heterosis-Mindlin 平板要素を提案し

ている. この平板要素は, アイソパラメトリック 9 節点四辺形曲線要素であって, 要素内の節点には 2 自由度, 角および辺上の節点には 3 自由度を考え, 曲げに関する剛性マトリックスは 3×3 ガウス積分により, せん断に関する剛性マトリックスは 2×2 ガウス積分により計算している.

Mindlin の平板理論に代表される一次せん断変形理論における面内変位は, 断面回転角と板厚方向の座標 (例えば z) との積で与えられる. この場合, 断面での面外せん断応力分布が一様でないことを考慮するため, せん断補正係数の導入が必要となる. それに対して近年, 面内変位を厚さ方向の座標 z の多項式で仮定する高次せん断変形理論の検討が進み, 複合材料板などを対象として研究がなされている^{(8)~(12)}. そして 3 次の項までとるとせん断補正係数を導入しなくても精度の高い解が得られることが示されている. 著者の一人も高次せん断変形理論に基づくはり要素を提案している⁽¹³⁾.

本論文では, 板曲げ問題の解析に対してせん断変形の影響を考慮した実用性の高い剛性マトリックスを求め, その有効性について検討した. ここでは, Shimpi⁽¹²⁾ によって提案された高次せん断変形理論に基づいて定式化を行った. この高次せん断変形理論で

* 原稿受付 2005 年 8 月 3 日.

^{*1} 正員, 名城大学理工学部 (〒468-8502 名古屋市天白区塩釜 1-501).^{*2} 名城大学大学院理工学研究科 [現: ミツミ電機(株) (〒206-8567 多摩市鶴牧 2-11-2)].

E-mail: katori@ccmfs.meijo-u.ac.jp

は、板のたわみを曲げとせん断によるものの和として表し、さらに面内方向の変位を厚さ方向の座標の3次式で表す。このような扱いは簡明であって、有限要素の定式化が比較的容易に行えることに着目して、せん断変形の影響を考慮した修正剛性マトリックスを求めた。ここで提案した板曲げ要素を用いて板曲げ問題や振動問題を解析し、本要素の有効性を明らかにした。

2. 理 論

2.1 高次せん断変形理論 図1に示すように、平板の厚さは一様として h で表し、板厚中央面に座標 (x, y) を定め、それに垂直に座標 z を定める。ここで用いる Shimpi⁽¹²⁾ により提案された高次せん断変形理論は、板のたわみおよび面内方向の変位がそれぞれ曲げの成分とせん断の成分の和として表され、面内方向変位は厚さ方向の座標の3次式で書き表している。以下にその仮定を示す。

(1) たわみは微小とする。

(2) たわみ w は曲げの成分 w_b とせん断の成分 w_s の和とする。

$$w = w_b + w_s \quad \dots\dots\dots (1)$$

(3) 中央面に垂直な応力 σ_z は面内応力 σ_x, σ_y に比べて無視でき、応力 σ_x, σ_y とひずみ ϵ_x, ϵ_y の関係は下記の構成式による。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_x + \epsilon_y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比を表す。

(4) 曲げの作用による x, y 方向の変位 u_b, v_b は古典平板理論(CPT)により次式で与えられる。

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(5) せん断の作用による x, y 方向の変位 u_s, v_s は w_s により次式で与えられる。なお、 τ_{xz}, τ_{yz} あるいは対応するひずみ γ_{xz}, γ_{yz} は板厚方向に放物線分布を示し、 $z = \pm h/2$ において零となる。また、 u_s, v_s は曲

げモーメント、ねじりモーメント M_x, M_y, M_{xy} には寄与しないとする。

$$\begin{aligned} u_s &= h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v_s &= h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

上の仮定(2)、(4)、(5)より変位場は

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w_b}{\partial x} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w_b}{\partial y} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w &= w_b + w_s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式を用いて、直ひずみ、せん断ひずみ成分は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -z \left[2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right] \\ &\quad + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \left[2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right] \\ \gamma_{xz} &= \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(2)と $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$, $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$ で表される構成方程式を基に合モーメント、合せん断力を求めると次のように表される。

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ Q_x &= \frac{5}{6} Gh \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{5}{6} Gh \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

たわみのせん断の作用による成分 w_s は、板の平衡方程式と式(7)を基にして若干の計算を行うと次のように書き表される。

$$w_s = -\frac{D}{Gh} \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

2.2 仮想仕事の原理 せん断変形の影響を考慮した板曲げ要素の定式化を行う。最初に式(5)で表される変位場のもとで、運動方程式を導くために要素分割の後、要素に関する動的条件を含む仮想仕事の原理を書き表すと次のようになる。

$$\delta U = \delta W - \delta K \quad \dots\dots\dots (9)$$

Fig. 1 Geometry and coordinate system for a rectangular plate

ここに、 δU は仮想ひずみエネルギー、 δW および δK は外力および慣性力による仮想仕事である。これらに前述の関係式をそれぞれ代入し、整理すると次のように書き表される。

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{\Omega} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \cdots + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega} \left[\delta \mathbf{x}_b^T \mathbf{D} \mathbf{x}_b + \delta \mathbf{x}_s^T \frac{\mathbf{D}}{84} \mathbf{x}_s + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma} \right] dx dy\end{aligned}\quad \cdots \cdots (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_b &= \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_b / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_b / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_b / \partial x \partial y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_s = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_s / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_s / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_s / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \begin{Bmatrix} \partial w_s / \partial x \\ \partial w_s / \partial y \end{Bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & 1-\nu/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \frac{5}{6} \begin{pmatrix} Gh & 0 \\ 0 & Gh \end{pmatrix}\end{aligned}$$

なお、2・1節の仮定に基づき得られるひずみ成分および合応力の変位表示式からもわかるように、曲げとせん断の成分は互いに独立となり、直交性を示し式(10)の中には $\mathbf{x}_b$ と $\mathbf{x}_s$ の積の項が現れないこととなる。

$$\delta W = \int_V f \delta w dx dy dz + \int_A q \delta w dx dy \quad \cdots \cdots (11)$$

$$\delta K = \int_V \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dy dz \quad \cdots \cdots (12)$$

ここに、 f は物体力、 q は表面力、 ρ は密度である。

2・3 セン断変形を含む板曲げ要素 図2に示すような x, y 平面に一致する三角形板曲げ要素(1, 2, 3)を考える。この要素内の曲げの作用によるたわみ w_b を、文献(14)で示される非適合な3次多項式の形状関数を用いて次のように書き表す。

$$w_b = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) W_i = \mathbf{N} \mathbf{W} \quad \cdots \cdots (13)$$

ここに、 N は面積座標 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ を用いて

Fig. 2 Three-node triangular element

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_2 \zeta_3, \zeta_3 \zeta_1, \zeta_1 \zeta_2, \\ &\quad \zeta_2 \zeta_3 (\zeta_2 - \zeta_3), \zeta_3 \zeta_1 (\zeta_3 - \zeta_1), \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1 - \zeta_2)\} \\ &\cdots \cdots (14)\end{aligned}$$

と表される行列であり、 $\mathbf{W}$ は未定係数 B, C などとなる次のような行列である。

$$\mathbf{W}^T = \{w_1 \ w_2 \ w_3 \ B_1 \ B_2 \ B_3 \ C_1 \ C_2 \ C_3\} \quad \cdots \cdots (15)$$

上式の中の B_{1-3}, C_{1-3} は、Reissner-Mindlin 要素の開発などで示されるせん断ひずみ仮定に辺要素を利用して変位場を構成する方法⁽¹⁵⁾、MITC 法⁽¹⁶⁾などで用いられている方法を用いて求める。例えば頂点2で辺23に沿う微分を $(\partial w_b / \partial s_1)_{s_1=1} = \theta_{23}$ 、頂点3で辺32に沿う微分を $-(\partial w_b / \partial s_1)_{s_1=1} = \theta_{32}$ などと表して、

$$\theta_{23} l_1 = w_3 - w_2 + B_1 + C_1$$

$$\theta_{32} l_1 = w_2 - w_3 + B_1 - C_1$$

などが得られ、上式より

$$B_1 = \frac{l_1}{2} (\theta_{23} + \theta_{32})$$

$$C_1 = w_2 - w_3 + \frac{l_1}{2} (\theta_{23} - \theta_{32})$$

$\cdots \cdots (16)$

等と表される。

曲率 $\mathbf{x}_b$ は式(13)を用いて次のように表される。

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{N}_b \begin{Bmatrix} B_{1-3} \\ C_{1-3} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_b \begin{Bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots (17)$$

せん断ひずみ成分 $\boldsymbol{\gamma}$ は

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{D}{Gh} \frac{6}{5} \begin{pmatrix} Q_{x1} & Q_{x2} & Q_{x3} \\ Q_{y1} & Q_{y2} & Q_{y3} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \mathbf{C} \quad \cdots \cdots (18)$$

となる。

以上の表現を用いて式(10)の仮想ひずみエネルギーを書き直すと次のように書き表される。

$$\delta U = \delta \begin{Bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix}^T (\mathbf{k}_b + \mathbf{k}_s) \begin{Bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots (19)$$

ここに、

$$\mathbf{k}_b = \int_{\Omega} \mathbf{N}_b^T \mathbf{D} \mathbf{N}_b dx dy = \begin{pmatrix} k_{11}^b & k_{12}^b \\ \text{sym.} & k_{22}^b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_s = \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T \mathbf{G} \mathbf{Q} dx dy = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^s \end{pmatrix}$$

なお、式(10)の右辺第2項($\mathbf{x}_s$ の項)は第1項($\mathbf{x}_b$ の項)に比べ1/84倍と小さくなることから省略することとした[ただし、本要素においては式(8)、(13)と式(14)を考慮すると $\mathbf{x}_s$ は零となり結果的になくなる]。

係数 B_{1-3} , C_{1-3} は式(16)で示される関係を基に要素節点変位ベクトル $\mathbf{w}_e$ と関係づけると次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{w}_e \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$\mathbf{w}_e^T = \{w_1 \quad \phi_{x1} \quad \phi_{y1} \quad w_2 \quad \phi_{x2} \quad \phi_{y2} \quad w_3 \quad \phi_{x3} \quad \phi_{y3}\}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{32} & y_{32} & 0 & x_{23} & y_{23} \\ 0 & x_{31} & y_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{13} & y_{13} \\ 0 & x_{21} & y_{21} & 0 & x_{12} & y_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x_{32} & y_{32} & -2 & x_{32} & y_{32} \\ -2 & x_{13} & y_{13} & 0 & 0 & 0 & 2 & x_{13} & y_{13} \\ 2 & x_{21} & y_{21} & -2 & x_{21} & y_{21} & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

で w_i , ϕ_{xi} , ϕ_{yi} は節点 i におけるたわみおよび各軸回りの断面回転角を表し, $x_{ij} = x_i - x_j$ 等を表す。

以上の関係式より要素節点変位ベクトル $\mathbf{w}_e$ に関する要素剛性マトリックスが次のように求められる。

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T}^T \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{11}^b & \mathbf{k}_{12}^b \\ \text{sym.} & \mathbf{k}_{22}^b + \mathbf{k}_{22}^s \end{pmatrix} \mathbf{T} \dots\dots\dots (21)$$

ここに, $\mathbf{k}_{11}^b$, $\mathbf{k}_{12}^b$ はそれぞれ曲げとせん断に関する成分を表す。

要素内のたわみ w と加速度 $\ddot{w}$ は式(1), (8)と式(13)から要素節点変位ベクトル $\mathbf{w}_e$ とその加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{w}}_e$ によって次のように表される。

$$w = w_b + w_s = \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{w}_e$$

$$\ddot{w} = \tilde{\mathbf{N}} \ddot{\mathbf{w}}_e \dots\dots\dots (22)$$

ここに, w に対する形状関数は式(8)と式(13)から得られることとなるが, ここでは形式的に $\tilde{\mathbf{N}}$ と表すこととする。

式(22)を式(11)と式(12)に代入し, 外力および慣性

力による仮想仕事を書き直すと次式が得られる。

$$\delta W = \int_a \delta \mathbf{w}_e^T \tilde{\mathbf{N}}^T q dx dy = \delta \mathbf{w}_e^T \mathbf{f}_e$$

$$\delta K = \int_a \delta \mathbf{w}_e^T \tilde{\mathbf{N}}^T \rho \tilde{\mathbf{N}} \ddot{\mathbf{w}}_e dx dy dz = \delta \mathbf{w}_e^T \mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{w}}_e \dots\dots\dots (23)$$

ここに, $\mathbf{f}_e$ は要素等価節点力ベクトル, $\mathbf{m}_e$ は要素質量マトリックスであり, それぞれ次のように表される。

$$\mathbf{f}_e = \int_a \tilde{\mathbf{N}}^T q dx dy, \quad \mathbf{m}_e = \int_a \tilde{\mathbf{N}}^T \rho h \tilde{\mathbf{N}} dx dy \dots\dots (24)$$

なお, 厚板の動的問題を解析する場合, 慣性力を表すのに横荷重だけでなく回転慣性偶力を考慮することが望ましいが, ここでは計算を簡単にするため回転慣性の効果は考慮しないこととした。

以上の関係式により要素に関する運動方程式が得られ, さらに, 板全体に対して組立てることにより, 全体系に対する運動方程式が次のように得られる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{F} \dots\dots\dots (25)$$

3. 数値解析例

高次せん断変形理論に基づき定式化した板曲げ要素

Fig. 3 Convergence test for thin square plate

Table 1 Bending moment of thin square plate

Number of elements	Uniform load	
	M_x at $x=y=a/2$	M_{xy} at $x=y=0$
2	0.055316	-0.034926
4	0.049706	-0.033586
6	0.048613	-0.033080
8	0.048244	-0.032854
10	0.048083	-0.032736
Timoshenko ⁽¹⁷⁾	0.0479	-0.0325
Multiplier	$q a^2$	

の精度, 有効性を検討するため, いくつかの問題について解析を行った。

3・1 板曲げ問題 最初に要素分割数に対する解の収束性を明らかにするために, 等分布荷重 q を受ける周辺単純支持の正方形板 ($a=b$) の解析を行った。計算に用いた材料定数はヤング率 $E=10.92 \times 10^5$ MPa, ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。解析は対称性を考慮して $1/4$ 領域のみを考え, その領域を $n \times n$ に等分割し, この分割によって得られた四辺形を対角線によって分割する二通りの分割法の平均として, 剛性マトリックスを求めた。図3は, 板厚比が100の場合に

Table 2 Comparison of maximum deflection for simply supported square plate

Thickness ratio a/h	$w_{\max}/D/qa^4$			
	Salerno ⁽¹⁸⁾	Reddy ⁽¹⁹⁾	Pryor ⁽²⁰⁾	Present
5	0.00478	0.00490	0.00475	0.00485
10	0.00424	0.00428	0.00422	0.00426
20	0.00411	-----	0.00409	0.00411
100	0.00407	0.00407	0.00405	0.00407
Timoshenko ⁽¹⁷⁾		0.00406		

Table 3 Comparison of maximum deflection for circular plate ($\bar{w}=64Dw_{\max}/qR^4$)

R/h	Present	Analytical solution ⁽²¹⁾
	Simply supported	
5	4.3507	4.2598
50	4.1222	4.0787
R/h	Clamped	
5	1.1473	1.1828
50	1.0023	1.0018

Fig. 4 Influence of transverse shear on the maximum deflection of a square plate

分割数 n を2~10と変化させたときの, 板中心の最大たわみの無次元量(たわみ係数)を示したものである。また, そのときの曲げモーメントとねじりモーメントを表1に示す。正方形板の最大たわみの値を比較すると, 古典薄板理論との差は6分割で0.94%, 8分割で0.57%と良い収束性を示しており, 実用上十分な精度の解が得られている。また, 曲げおよびねじりモーメントについても, その精度, 収束性が良好であることがわかる。

次に, 等分布荷重を受ける周辺単純支持の正方形板において, 板厚比 a/h を種々変化させて解析を行った。その結果を図4と表2に示す。表2には, せん断変形の影響を無視した薄板理論⁽¹⁷⁾, ReissnerやMindlinの理論を解析的に解いたSalerno⁽¹⁸⁾やReddy⁽¹⁹⁾の結果, およびReissner理論に基づく定式化によって得られた, 長方形板曲げ要素によるせん断変形を考

Fig. 5 Finite element meshes for a circular plate

Fig. 6 Deflection along the centerline of a simply supported circular plate

慮した要素による解析を行った Pryor⁽²⁰⁾の結果も示してある。板厚比 a/h が約 50 の付近を境として、板厚比の減少によりせん断変形の影響が増していくことがわかる。また、他の解析解や有限要素解と比較して、薄板から厚板まで板厚比の広い範囲にわたり、ロックキング現象を生じることなく良好な結果が得られている。

次の解析モデルとして、等分布荷重を受ける周辺固定および周辺単純支持の円板を取上げた。図 5 に示すように対称性を考慮して 1/4 領域を解析の対称として、75 要素に分割して計算を行った。半径と板厚の比 R/h が 5 と 50 の場合についての最大たわみの無次元

量を表 3 に示す。また、周辺単純支持の円板の中心線上のたわみを図 6 に示す。表 3 には、式 (26) で示される解析解⁽²¹⁾も示してあるが、本解析結果は解析的な方法で得られた結果と良好な一致を示している。

周辺単純支持：

Fig. 7 Variation of frequency parameter with side-to-thickness ratio for a simply supported square plate

Table 4 Convergence of plate elements for frequencies

$n \times n$	$\lambda = \omega \frac{L^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$			
	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)
8×8	1.981	4.931	7.739	9.882
10×10	1.989	4.960	7.836	9.936
16×16	1.995	4.981	7.923	9.959
Classical	2	5	8	10

Table 5 Frequencies parameter of a thick plate ($a/h=10$)

$\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$							
$a/b = 1$				$a/b = 1/\sqrt{2}$			
Mode (n,m)	Thin plate	Wang ⁽²²⁾	Present	Mode (n,m)	Thin plate	Wang ⁽²²⁾	Present
(1,1)	19.74	19.08	18.89	(1,1)	26.61	28.84	28.68
(1,2)	49.35	45.54	43.97	(1,2)	59.22	56.31	55.53
(2,2)	78.96	69.91	65.44	(2,1)	88.83	82.55	79.73
(1,3)	98.70	85.21	78.79	(1,3)	108.6	99.45	96.77

Fig. 8 Mode shapes for a simply supported square

$$w(0) = \frac{qR^4}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} + \frac{8}{3\kappa(1-\nu)} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right]$$

周辺固定：

$$w(0) = \frac{qR^4}{64D} \left[1 + \frac{8}{3\kappa(1-\nu)} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right]$$

.....(26)

3.2 板の曲げ振動問題 ここでは、動的問題への応用として、自由振動の問題を解析する。板の密度 ρ は $a^2/\sqrt{\rho/Eh^2}=1$ として計算を行った。最初に、自由振動解析での要素分割数に対する解の収束性を検討するため、板厚比 a/h が 100 の周辺単純支持の正方形板において分割数 ($n \times n$) を 8~16 と変化させて計算を行い、固有振動数係数を古典的板曲げ理論に基づく解析結果と比較した。その結果を表 4 に示す。自由振動解析の場合においても曲げ解析と同様に良い収束性を示しており、少ない要素分割数でも実用上十分な精度の解が得られている。次に、周辺単純支持の正方形板において板厚比を 5 から 100 と変化させた場合の自由振動解析を行った。その結果のうち 1 次と 2 次の固有振動数係数の変化を図 7 に示す。図 7 中の縦軸は、古典的板曲げ理論による固有振動数係数との比を示している。板厚比 a/h が 40 以下でせん断変形の影響が現れていることがわかる。図 8 には、板厚比 a/h が 10 の正方形厚板の 1 次から 4 次までの振動モードを示してある。振動モードにはせん断変形の影響はほとんど現れてこないことがわかる。表 5 は、板厚比 a/h が 10 の正方形板と長方形板 ($b=\sqrt{2}a$) の固有振動数係数を示したものである。表 5 には Wang ら⁽²²⁾ の解析結果と薄板平板の理論による解析結果も示してある。本解析結果は Wang らの解析結果とおおむね良好な一致を示している。

4. 結 言

本研究では、高次せん断変形理論に基づくせん断変形の影響を考慮した板曲げ要素の提案を行った。さらに提案した板曲げ要素を用いて、板の曲げ問題や板の曲げ振動問題を対象として数値解析を行い、他の解析解や有限要素解との比較により本要素の有効性を検証した。その結果、次のような結論が得られた。

(1) 本要素は、板曲げの静的・動的問題の解析において、少ない要素分割で実用上十分な精度の解が得られ、良好な収束性も示している。

(2) 本要素は板厚比の広い範囲にわたり剛性を過大に評価することなく、すなわちロッキング現象を生じることなく、非常に良好な結果が得られた。

(3) 板曲げの静的・動的問題の解析を通して、正方形板において板厚比 40~50 以下でせん断変形の影響が現れてくることが示された。

文 献

- (1) Washizu, K. et al., *Handbook of Finite Element Method*, Vol. 1: Fundamentals, in Japanese, (1981), p. 256, Baifukan.
- (2) Reissner, E., *J. Appl. Mech.*, Vol. 12, No. 2 (1945), pp. 69-77.
- (3) Reissner, E., *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 11 (1975), pp. 569-573.
- (4) Mindlin, R. D., *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, No. 1 (1951), pp. 31-38.
- (5) Clough, R. W. and Felippa, C., Wright-Patterson Air Force Base, *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth in Struct. Mech.*, Ohio, (1968-9), pp. 399-439.
- (6) Zienkiewicz, O. C. et al., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 3 (1971), pp. 275-290.
- (7) Hughes, T. J. R. and Cohen, M., *Comput. & Struct.*, Vol. 9 (1978), pp. 445-450.
- (8) Murthy, M. V. V., *NASA Technical Paper 1903*, (1981).
- (9) Reddy, J. N., *J. Appl. Mech.*, Vol. 51 (1984), pp. 745-752.
- (10) Reddy, J. N. and Liu, C. F., *NASA Contractor Report 4056*, (1987).
- (11) Heyliger, P. R. and Reddy, J. N., *J. Sound Vib.*, Vol. 126, No. 2 (1988), pp. 309-326.
- (12) Shimpi, R. P., *AIAA J.*, Vol. 40, No. 1 (2002), pp. 137-146.
- (13) Katori, H. and Maeda, M., *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., Series A*, Vol. 69, No. 685 (2003), pp. 1374-1379.
- (14) Katori, H. and Nishimura, T., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 104, No. 2 (1993), pp. 173-186.
- (15) Kikuchi, F. et al., *Int. J. Computational Methods*, Vol. 2, No. 1 (2005), pp. 127-147.
- (16) Bathe, K. -J. and Dvorin, E. N., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 21 (1985), pp. 367-383.
- (17) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shell*, 2nd ed., (1959), p. 113, McGraw-Hill.
- (18) Salerno, V. L. and Goldberg, M. A., *Appl. Mech.*, Vol. 27 (1960), pp. 54-58.
- (19) Reddy, J. N., *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 20 (1984), pp. 881-896.
- (20) Pryor, Jr., C. W. et al., *Proc. ASCE*, Vol. 96 (1970-12), pp. 967-983.
- (21) Weissman, S. L. and Taylor, R. L., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 79 (1990), pp. 321-355.
- (22) Wang, C. M. et al., *Shear Deformable bams and plates*, (2000), p. 235, Elsevier.