3次元 MPS 法弾性体解析へのシンプレクティックスキームの適用*

近藤 雅裕^{*1}, 越塚 誠一^{*2}, 鈴木 幸人^{*3}Application of Symplectic Scheme
to Three-Dimensional Elastic Analysis using MPS MethodMasahiro KONDO^{*4}, Seiichi KOSHIZUKA and Yukihiro SUZUKI^{**} Department of Quantum Engineering and System Science, School of Engineering, The University of Tokyo,
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656 Japan

A calculation method for three-dimensional elastic solid analysis is proposed using the Moving Particle Semi-implicit method (MPS). The angular velocities and the rotation angles of each particle are implicitly calculated from the velocities and coordinates of the neighbor particles respectively. Large deformation accompanied by rigid rotation can be analyzed with keeping the total energy by employing a symplectic scheme. By introducing a viscosity term, the total energy can be decreased without loss of angular momentum.

Key Words: Structure Analysis, MPS Method, Elasticity, Dynamic Analysis, Large Deformation

1. 序 論

固体解析において、有限要素法などのメッシュを用いる計算手法では大変形解析や破壊解析などの際に煩雑なメッシュの再生成を繰り返す必要がある。粒子法ではメッシュが不要であるため、大変形解析や破壊解析に適していると期待され研究されている。MPS法^①は粒子法の1つとして、固体解析では筋肉^②および頭部損傷^③などに応用されている。

従来のMPS法固体解析^④では、粒子に慣性モーメントと回転の自由度を与え、角運動量を保存するように角速度と回転角を独立変数として陽的に計算していた。しかし、3次元計算^⑤では主に回転計算が原因でエネルギー保存性があまり良くなかった。

保存系において数値計算上もエネルギー保存が成立することは重要である。エネルギー保存精度のよい動的解析の方法としてシンプレクティックスキーム^⑥が近年注目されている。全エネルギーをハミルトニアンとして記述し、そこから得られた正準方程式が運動方程式と一致する場合に、シンプレクティックスキーム

を適用することができる。つまり、ハミルトンの正準方程式が運動方程式と一致するハミルトニアンを記述できれば、エネルギー保存精度のよい解析ができるのである。

これまでMPS法において、非圧縮性完全流体モデル^⑦および2次元弾性体モデル^⑧ではハミルトニアンが記述されエネルギー保存に優れていた。しかし、3次元弾性体モデルでは回転角の変数が非線形であるためにハミルトニアンを記述することができなかった^⑨。

本研究では、角速度と回転角をそれぞれ近傍粒子の速度と座標の従属変数として陰的に計算するアルゴリズムを提案する。本アルゴリズムでは、角速度と回転角をそれぞれベクトルとクォータニオン^⑩で表現する。クォータニオンは剛体計算ですでに用いられており^{⑪⑫}、回転角をあらわすのに有用であることが知られている。

また、粘性項のない場合のエネルギー保存系で、正準方程式が本アルゴリズムの運動方程式と一致するハミルトニアンが記述できることを示す。さらに、時間積分にシンプレクティックスキームを適用した場合のエネルギー保存性について従来法と比較する。

2. 離散化方法

2-1 支配方程式 粘性項を導入した弾性体の支配方程式は、次式のようにあらわされる。

* 原稿受付 2005年8月3日。

^{*1} 東京大学大学院工学系研究科(〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1)。^{*2} 正員、東京大学大学院工学系研究科。^{*3} 科学技術振興機構(〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1)。

E-mail: kondo@mps.q.t.u.-tokyo.ac.jp

$$\rho \frac{\partial v_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} [\lambda \delta_{st} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{st} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_{st}] \quad (1)$$

ただし、 λ および μ はラメの定数である。粘性は、流体における粘性と同様に速度差に比例して働くとして仮定している。 μ' はそのときの係数である。

2.2 重み関数と粒子数密度 MPS法では、偏微分方程式であらわされた支配方程式の各項に対応する粒子間相互作用を与えることで離散化を行う。その際、ある粒子*i*が近傍の粒子*j*と相互作用をする範囲を影響半径 r_e と呼ぶ。粒子間の距離 $|\vec{r}_{ij}|$ の関数としての重み関数 W を次式のように定義して近くにある粒子ほど相互作用が大きくなるように重み付けをおこなう。

$$W(|\vec{r}_{ij}|) = \begin{cases} \frac{r_e}{|\vec{r}_{ij}|} - 1 & (|\vec{r}_{ij}| \leq r_e) \\ 0 & (|\vec{r}_{ij}| > r_e) \end{cases} \quad (2)$$

影響半径 r_e を大きくするほど、近傍粒子数が増加し計算精度が良くなるが、計算時間も増加する。このため、影響半径には適切な値を選択する必要がある。本研究では影響半径として、初期配置での近接粒子との距離の21倍を採用した。

また、式(2)の重み関数で加重平均をするために粒子数密度 n_0 を

$$n_0 = \sum_{j \neq i} W(|\vec{r}_{ij}|) \quad (3)$$

と定義する。

2.3 角速度と回転角の計算法 従来のMPS法のアルゴリズムでは、粒子に独立変数として回転角を与えていた。そして、粒子間相互作用のせん断成分により発生するトルクを打ち消すトルクを粒子に与え、粒子の回転角と角速度を独立変数として陽的に計算していた。この際、系全体としてトルクは発生しないため角運動量保存を実現していた。本研究のアルゴリズムでは、粒子の回転角を独立変数とせず、近傍粒子の座標の従属変数として陰的に計算する。また、角速度も近傍粒子の速度の従属変数として陰的に計算する。この際、2.4節の式(14)(16)(21)で与えられる離散的な計算において発生するトルクがつりあうように回転角と角速度を計算するので、系全体としてトルクは発生せず、従来のアルゴリズムと同様に角運動量が保存する。

図1は、従来法(左)と本手法(右)のアルゴリズムで粒子位置 $\vec{x}_i$ 、粒子速度 $\vec{v}_i$ 、ひずみ $\vec{\varepsilon}_{ij}$ 、回転角 R_i の1回のタイムステップでの更新順序をあらわしている。

Fig.1 Calculation Order

角速度 $\vec{\omega}_i$ は粘性項から発生する粒子間トルクのつり合い条件である次式を陰的に解くことで計算する。

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \times \frac{\vec{v}_j - (\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^2} W(|\vec{r}_{ij}|) \right] = \vec{0} \quad (4)$$

ただし、 $\vec{r}_{ij}$ は次式で定義される相対位置ベクトルである。

$$\vec{r}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i \quad (5)$$

回転角は弾性項から発生する粒子間トルクのつり合い条件である次式より計算する。

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \times \frac{R_j \vec{r}_{ij} - \text{int}}{|\vec{r}_{ij}|^2} W(|\vec{r}_{ij}|) \right] = \vec{0} \quad (6)$$

回転行列 R_i はクォータニオンの成分を用いて

$$R_i = \begin{bmatrix} q_1^2 + z^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_3z & 2q_3q_1 + 2q_2z \\ 2q_1q_2 + 2q_3z & q_1^2 + z^2 - q_3^2 - q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_1z \\ 2q_3q_1 - 2q_2z & 2q_2q_3 + 2q_1z & q_3^2 + z^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + z^2 = 1 \quad (8)$$

と書ける。ただし、式(8)はクォータニオンの規格化条件式である。式(6)~(8)をクォータニオンの成分についてニュートン法を用いて解くことで回転行列 R_i が得られる。

回転角をあらわすのに、回転行列は9変数と6個の拘束条件を必要とするが、クォータニオン⁽¹¹⁾は4変数 (q_1, q_2, q_3, z) と1個の規格化条件式と少ない変数と

条件式であらわすことができる。このため本研究では回転角をクォータニオンであらわしている。

2.4 支配方程式の離散化 支配方程式(式(1))の右辺第1項と第2項の弾性項は、図2に示すような粒子間相対変位を用いて離散化を行う。

Fig.2 Inter-particle Relative Position Model

$\vec{r}_{ij0}$ は、初期配置での相対位置ベクトル $\vec{r}_{ij_init}$ を式(6)で計算される回転行列 R_i で回転させたベクトルである。

$$\vec{r}_{ij0} = R_i \vec{r}_{ij_init} \quad (9)$$

$\vec{r}_{ij0}$ は粒子iから粒子jへのひずみがない場合の相対位置ベクトルをあらわしている。粒子iを基準とした粒子jの変位 $\vec{u}_{ij}$ ベクトルを

$$\vec{u}_{ij} = \vec{r}_{ij} - \vec{r}_{ij0} \quad (10)$$

とし、ひずみ $\vec{\varepsilon}_{ij}$ ベクトルを

$$\vec{\varepsilon}_{ij} = \frac{\vec{u}_{ij}}{|\vec{r}_{ij0}|} \quad (11)$$

とする。

支配方程式の第1項を離散化するために、 ε_{kk} に相当する体積ひずみを次式で計算する。

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_i^{vol} = \frac{d}{n_0} \sum_{j \neq i} \left[\vec{\varepsilon}_{ij} \cdot \frac{\vec{r}_{ij0}}{|\vec{r}_{ij0}|} W(|\vec{r}_{ij0}|) \right] \quad (12)$$

ただし、 d は次元である。さらに、圧力を

$$p_i = -\lambda \varepsilon_i^{vol} \quad (13)$$

とする。圧力 p_i に比例した力が $\vec{r}_{ij0}$ 方向に働くとして、近傍粒子との間の圧力勾配の加重平均をとることで次式のように粒子間相互作用を与える。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \delta_{st} \varepsilon_{kk}) \\ &= - \sum_{j \neq i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2d}{n_0} \frac{p_i \vec{r}_{ij0}}{|\vec{r}_{ij0}|^2} - \frac{2d}{n_0} \frac{p_j \vec{r}_{ji0}}{|\vec{r}_{ji0}|^2} \right) W(|\vec{r}_{ij0}|) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

次に支配方程式の第2項を離散化する。応力ベクトルを

$$\vec{\sigma}_{ij} = 2\mu \vec{\varepsilon}_{ij} \quad (15)$$

とする。ただし、ここでの応力ベクトルは、式(1)右辺第2項より生じる単位面積あたりの力と定義する。さらに、粒子間におけるベクトルの加重平均をとることで、次式のように粒子間相互作用を与える。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} (2\mu \varepsilon_{st}) \\ &= \sum_{j \neq i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2d}{n_0} \frac{\vec{\sigma}_{ij}}{|\vec{r}_{ij0}|} - \frac{2d}{n_0} \frac{\vec{\sigma}_{ji}}{|\vec{r}_{ji0}|} \right) W(|\vec{r}_{ij0}|) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

支配方程式の第3項の粘性項は、図3に示すような粒子間相対速度を用いて離散化を行う。

Fig.3 Inter-particle Relative Velocity Model

$\vec{\omega}_i$ は式(4)において計算される角速度である。粒子iの周りで剛体回転しているとした場合に、粒子iの速度 $\vec{v}_i$ と角速度 $\vec{\omega}_i$ から計算される粒子jの速度 $\vec{v}_{j0}$ を

$$\vec{v}_{j0} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ij} \quad (17)$$

とする。粒子iを基準とした速度差ベクトル $\vec{v}_{ij}$ を

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_{j0} \quad (18)$$

とし、ひずみ速度ベクトル $\dot{\vec{\varepsilon}}_{ij}$ を

$$\dot{\vec{\varepsilon}}_{ij} = \frac{\vec{v}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} \quad (19)$$

とする。ひずみ速度より働く応力ベクトルを

$$\bar{\sigma}'_{ij} = 2\mu' \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (20)$$

とし、粒子間におけるベクトルの加重平均をとることで次式のように粒子間相互作用を与える。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} (2\mu' \dot{\varepsilon}_{st}) \\ &= \sum_{j \neq i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2d}{n_0} \frac{\bar{\sigma}'_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} - \frac{2d}{n_0} \frac{\bar{\sigma}'_{ji}}{|\bar{r}_{ji}|} \right) W(|\bar{r}_{ji0}|) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

式(4)(6)より計算される角速度 $\bar{\omega}_i$ および R_i について、

$$R_i \neq R_j, \bar{\omega}_i \neq \bar{\omega}_j \quad (22)$$

と各粒子で異なるので、 $\bar{\omega}_i$ および R_i より計算される $\bar{v}_{ij}$ および $\bar{u}_{ij}$ は、 $\bar{\omega}_j$ および R_j より計算される $\bar{v}_{ji}$ および $\bar{u}_{ji}$ と次式のように対称にならない。

$$\bar{v}_{ij} \neq -\bar{v}_{ji}, \bar{u}_{ij} \neq -\bar{u}_{ji} \quad (23)$$

このため式(14)(16)(21)で支配方程式の各項に対応する粒子間相互作用を与える際には、粒子 i を基準として計算される相互作用と粒子 j を基準として計算される相互作用との平均をとる。こうすることで支配方程式を粒子間相互作用として離散化でき、運動量を保存することができる。さらに、次に示すハミルトンの正準方程式とも整合する定式化が可能になる。

2.5 ハミルトニアンの記述 ハミルトンの正準方程式が粘性を除いた場合の本アルゴリズムの運動方程式と一致するハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H = & \sum_i \left[\frac{1}{2m} (mv_i)^2 \right] \\ & + \sum_i \left[\frac{md}{2\rho n_0} 2\mu \sum_{j \neq i} \left[\bar{\varepsilon}_{ij}^2 W(|\bar{r}_{ij0}|) \right] \right] \quad (24) \\ & + \sum_i \left[\frac{m}{2\rho} \lambda \{ \varepsilon_i^{vol} \}^2 \right] \end{aligned}$$

と記述できる。ただし、第1項が運動エネルギー、第2項および第3項が粒子間弾性ポテンシャルエネルギーである。回転による運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーに相当する項は、粒子を質点として扱っているため存在しない。式(24)中の $\bar{\varepsilon}_{ij}$ および ε_i^{vol} は、 $\bar{r}_{ij}$ と R_i から式(9)～(12)により計算されたものである。さらに $\bar{r}_{ij}$ および R_i は粒子座標の従属変数であるので

ハミルトニアン第2項および第3項は、粒子座標のみの関数である。

ハミルトニアン(式(24))に対する正準方程式は、

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = \frac{\partial H}{\partial (m\bar{v}_i)} \\ (m\dot{\bar{v}}_i) = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}_i} \end{cases} \quad (25)$$

となる。式(25)の下側の式が本アルゴリズムの運動方程式である式(14)(16)と一致することを示す。 R_i は、 $\bar{q}_i$ から式(7)より計算されていることに注意すると、ハミルトニアン粒子座標に対する偏微分は次のように書ける。

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial H}{\partial \bar{r}_{ij}} \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\partial H}{\partial R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{x}_i} \quad (26)$$

ここで、クォータニオン $\bar{q}_i$ の粒子位置 $\bar{x}_i$ に対する偏微分は非常に複雑である。そこで、クォータニオンの規格化条件式(8)を付帯条件とした場合に、

$$\frac{\partial H}{\partial R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \bar{q}_i} = \frac{\partial H}{\partial \bar{q}_i} = 0 \quad (27)$$

と式(6)が同値であることを利用する。(証明を付録に示す) 式(6)～(8)を陰的に解くことより回転行列 R_i を決めているので、式(27)は成立し、式(26)は、

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial H}{\partial \bar{r}_{ij}} \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{x}_i} \quad (28)$$

と簡略化できる。式(28)を使って式(25)の下側の式を計算すると、ハミルトニアン第2項および第3項から計算される式がそれぞれ式(14)および式(16)と一致する。つまり、ハミルトンの正準方程式が本アルゴリズムの運動方程式と一致するのである。この場合、

$$\begin{aligned} m\bar{v}_i^{k+1} &= m\bar{v}_i^k - \Delta t \left(\frac{\partial H(\bar{x}_i^k, \bar{v}_i^k)}{\partial \bar{x}_i} \right) \\ \bar{x}_i^{k+1} &= \bar{x}_i^k + \Delta t \left(\frac{\partial H(\bar{x}_i^k, \bar{v}_i^{k+1})}{\partial (m\bar{v}_i)} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

と時間積分を行うことでシンプレクティックスキーム⁶⁾を適用でき、エネルギー保存精度の良い動的解析を行うことができる。

3. 計算例

3.1 粘性を考えた剛体回転 図4に示すような、それぞれの辺を5個の粒子で表現した立方体のモデル

を考える。物性値としてラメの定数をそれぞれ、 $\lambda = 5.0 \times 10^5$ [Pa], $\mu = 3.0 \times 10^5$ [Pa], 粘性係数を $\mu' = 1.0 \times 10^4$ [Pa sec] と与えた。x軸方向, y軸方向, z軸方向をそれぞれ, 12倍, 1.1倍, 1.0倍する変形を与えた。回転については角速度 (10, 20, 30) [sec] で剛体回転しているときの速度を各粒子の初速度として与えた。時間刻み幅 Δt を 1.0×10^{-4} [sec] とし, 5000step 計算を行った。

初期条件として並進運動は与えていないこと, 粒子の運動が対称な粒子間相互作用として計算されることから, 運動量は常にゼロで保たれた。一方, 角運動量も初期値を精度よく保存した (図5)。

従来法でも角運動量は保存されていたが, 粘性項を導入し, 角速度と回転角の計算に新しい手法を適用した本手法でも, 角運動量は保存された。

全エネルギーについては, 粘性があるために減衰した。図6にエネルギー変化を示す。本計算手法では, 剛体の並進運動と回転運動を保存しつつ, 粘性による内部振動だけが減衰する。

3.2 粘性がない場合 粘性がある場合にエネルギーは減衰するが, 粘性がない場合ではエネルギーは保存しなければならない。本研究では時間積分に1次のシンプレクティクススキームを適用し, 従来手法と比較してエネルギー保存精度が改善されているか検討する。前節3.1で用いた各辺を5個の粒子であらわした立方体のモデルの粘性係数をゼロとして計算する。前節と同様の変形と回転を与え, 従来手法と本手法と比較した。時間刻み幅 Δt は 1.0×10^{-4} sec とし, 5000step 計算を行った。図7はそれぞれの手法でのエネルギー変化の様子である。

従来手法ではエネルギーが発散していくのに対して, 本手法ではエネルギーはほぼ一定となり安定して計算ができた。

Fig.4 Spinning Cubic Model (125 particles)

Fig.5 Conservation of Angular Momentum

Fig.6 Energy Decreasing

Fig.7 Conservation of Energy

4. 結 論

- 1) 3次元MPS法弾性体解析において, 粒子の角速度と回転角を近傍粒子の速度と位置から陰的に計算するアルゴリズムを提案した。
- 2) 角速度を考慮して粘性項を離散化する方法を提案した。
- 3) 粒子間の弾性ポテンシャルを用いたハミルトンの正準方程式が本手法の運動方程式と一致することを示した。
- 4) 本研究による粘性項の計算手法を用いて, 並進運動と回転運動を保存しつつ内部振動のみ減衰させることができた。

- 5) 時間積分に1次のシンプレクティックスキームを適用したところ、粘性がない場合に弾性体解析でのエネルギー保存精度が大きく改善された。

付 録

式(8)を付帯条件とする条件式(27)は、ラグランジュ未定乗数を Λ_i として I_i を

$$I_i = H + \Lambda_i (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + z^2 - 1) \quad (\text{A.1})$$

と定義すれば、

$$\frac{\partial I}{\partial q_1} = \frac{\partial I}{\partial q_2} = \frac{\partial I}{\partial q_3} = \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\partial I}{\partial \Lambda} = 0 \quad (\text{A.2})$$

と書きかえられる。式(A.2)を計算すると、以下の条件式(A.4-1)~(A.4-4)と付帯条件である式(8)が得られる。

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial q_1} \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] + q_1 \frac{\Lambda_i}{C_i} = 0 \quad (\text{A.4-1})$$

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial q_2} \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] + q_2 \frac{\Lambda_i}{C_i} = 0 \quad (\text{A.4-2})$$

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial q_3} \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] + q_3 \frac{\Lambda_i}{C_i} = 0 \quad (\text{A.4-3})$$

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial z} \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] + z \frac{\Lambda_i}{C_i} = 0 \quad (\text{A.4-4})$$

ただし、

$$C_i = \frac{md}{\rho n_0} (-2\mu + 2\lambda \varepsilon_i^{\text{vol}}) \quad (\text{A.5})$$

一方、条件式(6)を計算すると条件式(A.6-1)~(A.6-3)が得られる。

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \end{pmatrix}^T \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] = 0 \quad (\text{A.6-1})$$

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \begin{pmatrix} -\vec{e}_3 & \vec{0} & \vec{e}_1 \end{pmatrix}^T \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] = 0 \quad (\text{A.6-2})$$

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & \vec{0} \end{pmatrix}^T \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] = 0 \quad (\text{A.6-3})$$

ただし、 $\vec{e}_1 \sim \vec{e}_3$ は、

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix}^T = R_i \quad (\text{A.7})$$

より定義される R_i の一部をあらわすベクトルである。条件式(A.6-4)を

$$\sum_{j \neq i} \left[\vec{r}_{ij} \cdot R_i \vec{r}_{j0} \frac{W(|\vec{r}_{j0}|)}{|\vec{r}_{j0}|^2} \right] + \frac{\Lambda_i}{C_i} = 0 \quad (\text{A.6-4})$$

と定義すると、条件式(A.4-1)~(A.4-4)と条件式(A.6-1)~(A.6-4)の関係は、

$$\begin{pmatrix} \text{式(A.4-1)} \\ \text{式(A.4-2)} \\ \text{式(A.4-3)} \\ \text{式(A.4-4)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -z & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & -z & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & -z & q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{式(A.6-1)} \\ \text{式(A.6-2)} \\ \text{式(A.6-3)} \\ \text{式(A.6-4)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と書け、同値であることがわかる。よって、式(8)を付帯条件としたとき、条件式(27)と条件式(6)同値である。

参考文献

- (1) Koshizuka, S., Particle Method (in Japanese), Maruzen (2005)
- (2) Song, M., Metal Motion analysis of muscle by MPS method, *Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science*, vol.9, 129-130 (2004)
- (3) Song, M., Input damage analysis of brain and skull by particle method, *Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science*, vol.10, 441-442 (2005)
- (4) Song, M. et al., Dynamic analysis of elastic solids by MPS method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, 71, 16-22 (2005)
- (5) Koshizuka, S. et al., A three-dimensional numerical method for elastic analysis using MPS method, *Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science*, vol.9, 127-128 (2004)
- (6) Yoshida, H., symplectic numerical solution (in Japanese), *Mathematical Science*, No.384, 37-46 (1995)
- (7) Suzuki, Y. et al., Development of the Hamiltonian Moving Particle Semi-implicit method, *Transactions of JSCES*, No.20050016 (2005)
- (8) Suzuki, Y. et al., *Transactions of JSCES*, No.20050017 (2005)
- (9) Koshizuka, S., Oka, Y. et al., Application of symplectic schemes to a particle model for elastic structures, *Proceedings of the 12th Computational Mechanics Conference*, No.99-5, 725-726 (1999)
- (10) Kondo, M., Koshizuka, S., A calculation method for rotation angle and angular velocity in the MPS method for three-dimensional large

- deformation elastic analysis, *Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science*, vol.10, 443-444(2005)
- (11) Kanaya, I., Initiation of quaternion (in Japanese), Kogakusha(2004)
- (12) Simo, J.C., Wong K.K.: Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, *International journal for numerical methods in engineering* vol. 31, 1952(1991)
- (13) Baraff, D., An Introduction to Physically Based Modeling: Rigid Body Simulation, *SIGGRAPH 97 COURSE NOTES*
-