圧電体のエネルギー解放率*

南 秉 群^{*1}, 渡 邊 勝 彦^{*1}

Energy Release Rate for Piezoelectric Body

Byeung-Gun NAM^{*2} and Katsuhiko WATANABE^{*2} Institute of Industrial Science, The University of Tokyo,
4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8505 Japan

Crack Energy Density (CED), that is, the parameter that enables a unified description of crack behavior without any restriction on constitutive equation and its applicability had been shown for ordinary materials was extended to piezoelectric body in the previous paper. Taking into consideration this new knowledge about CED, in this paper, the energy release rate for piezoelectric body is discussed and the fundamental matters such as the relations of energy release rate with CED, its derivatives and J integral are elicited. A crack is modeled by a notch with a sufficiently small root radius and a sharp crack is treated as the limit when root radius approaches zero. Energy release rate is derived through two different procedures and it is shown that energy release rate is equal to the electric enthalpy area density, that is, the difference between mechanical CED and complementary electrical CED. Moreover, how mechanical and electrical contributions of energy release rate are given is also discussed.

Key Words: Fracture, Piezoelectric Material, Energy Release Rate, Crack Energy Density (CED), Path Independent Integral

1. 結 言

この十数年, 圧電材料の破壊力学に関する研究が活発に行われている⁽¹⁾⁻⁽³⁾. しかし, 現在に至るも, き裂パラメータとして何を用いるかといった基本的問題も含め, 多くの同意を得る形での方向性が打ち出せず, 方法論についての模索が続いている. そこで著者らは先に, この状況の一因に, 通常材料において, その導入によって構成則によらず問題の統一的取り扱いが可能となることが示されているき裂エネルギー密度(Crack Energy Density, CED)⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾の欠如があるのではないかと考え, 圧電体に CED の概念を拡張導入し, その経路独立積分表示等, 圧電体 CED に関わる基本的な関係を導いた⁽⁷⁾. 本研究はその新たな知識を踏まえ, 圧電体におけるエネルギー解放率について論じるものである.

エネルギー解放率は早くから圧電体に拡張され⁽⁸⁾, 同じく圧電体に拡張された J 積分⁽⁹⁾とともに破壊パラメータ候補の中心的扱いを受けてきている. そしてこれらは, 圧電体中の欠陥を電気的含有物(electrical inclusion)と見なす場合には欠陥表面での電気的エネルギーの寄与により両者は一致しなくなるといった議論もあるが^(10,11), 基本となるき裂面での電気的不浸透性

条件(impermeable condition)の下では, 通常の材料における事実もあつたか, 詳細な検討は必ずしも行われることなく, 両者は一致するものとして混然と用いられているようなところがある. 特に, エネルギー解放率が何故そのように与えられるに至るかの導出過程について明確に示している研究は見当たらない.

こうしたことから, 本研究では, 基本となる不浸透性条件の下での圧電体のエネルギー解放率を, その定義から出発して検討する. 始めにエネルギー解放率を論じその意味を把握するにあたって必要かつ有用となる, 先の研究で得られた CED およびそれに関連する諸量についての事項⁽⁷⁾をまとめる. 続いてこれらを踏まえ, 圧電体のエネルギー解放率がどのように与えられるか導き, エネルギー解放率と CED およびその関連量, さらに J 積分と呼ばれる量との関係等, エネルギー解放率に関わる基本的事項を明らかにする.

2 圧電体における CED と関連諸量⁽¹²⁾

エネルギー解放率は, 通常, 材料の可逆な挙動を前提として論じられている. そこでここでは, エネルギー解放率との関係, 対応を考える立場から, 可逆な挙動を考える場合における圧電体の CED およびその関連量に関する事項をまとめる. 静的な場を考えており, 体積力と体積電荷の存在は考えていない. また, き裂面では電気的不浸透性条件を考えている.

* 原稿受付 2005年7月20日.

^{*1} 正員, 東京大学生産技術研究所(〒153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1).

E-mail: nam@ced.iis.u-tokyo.ac.jp

Fig. 1 Piezoelectric body with a notch

き裂を図1に示すような圧電連続体中の十分小さな曲率半径 ρ を有する切欠きでモデル化するものとし、通常用いられる鋭いき裂モデルは $\rho \rightarrow 0$ の極限として位置づける。このとき、 $\mathcal{E}$ を CED, $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{E}^E$ をそれぞれその力学的寄与分、電気的寄与分、すなわち力学的 CED, 電気的 CED として、それらは

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{\Gamma_0} W dX_2 \\ &= \int_{\Gamma} (W n_1 - T_i u_{i,1} - \phi q_{s,1}) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \phi q_{s,1} d\Gamma \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^M &= \int_{\Gamma_0} W^M dX_2 \\ &= \int_{\Gamma} (W^M n_1 - T_i u_{i,1}) d\Gamma - \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij}) dA \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^E &= \int_{\Gamma_0} W^E dX_2 = \int_{\Gamma_0} \phi q_{s,1} d\Gamma + \int_{\Gamma} (W^E n_1 - \phi q_{s,1}) d\Gamma \\ &\quad - \int_A \int_0^t (E_{j,1} dD_j - D_{j,1} dE_j) dA \end{aligned} \quad (3)$$

によって与えられる量であり、また、 $\mathcal{E}_c$ をコンプリメンタリーな CED, $\mathcal{E}_c^M$, $\mathcal{E}_c^E$ を、それぞれ、その力学的寄与分、電気的寄与分として、これらの量は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \int_{\Gamma_0} W_c dX_2 = \int_{\Gamma} (W_c n_1 - u_i T_{i,1} - q_s \phi_{s,1}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} u_i T_{i,1} d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^M &= \int_{\Gamma_0} W_c^M dX_2 = \int_{\Gamma} (W_c^M n_1 - u_i T_{i,1}) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} u_i T_{i,1} d\Gamma \\ &\quad + \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij}) dA \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^E &= \int_{\Gamma_0} W_c^E dX_2 = \int_{\Gamma} (W_c^E n_1 - q_s \phi_{s,1}) d\Gamma \\ &\quad + \int_A \int_0^t (E_{j,1} dD_j - D_{j,1} dE_j) dA \end{aligned} \quad (6)$$

によって与えられる。ここで、 W , W^M , W^E は、それぞれ

$$\begin{aligned} W &= W^M + W^E \\ W^M &= \int_0^t \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, W^E = \int_0^t E_i dD_i \end{aligned} \quad (7)$$

で定義される拡張ひずみエネルギー密度、その力学的寄与分、電気的寄与分、 W_c , W_c^M , W_c^E は、それぞれ

$$\begin{aligned} W_c &= W_c^M + W_c^E \\ W_c^M &= \int_0^t \epsilon_{ij} d\sigma_{ij}, W_c^E = \int_0^t D_i dE_i \end{aligned} \quad (8)$$

によって定義される拡張コンプリメンタリー・エネルギー密度、その力学的寄与分、電気的寄与分である。また、 σ_{ij} , ϵ_{ij} , u_i , T_i はそれぞれ応力、ひずみ、変位、表面力、 D_i , E_i , ϕ , q_s はそれぞれ電気変位、電界、電位、表面電荷であり、0 から t の積分は初期状態の時刻 0 から現在の時刻 t まで実際の履歴に沿って行うことを意味する。さらに Γ_0 , Γ はそれぞれ切欠き端の半円状の径路、切欠きを囲む任意の径路、 A は Γ_u , Γ_d をそれぞれ切欠き上面、下面の径路として閉曲線 $\Gamma + \Gamma_u - \Gamma_0 + \Gamma_d$ によって囲まれる領域の面積であり、 n_i はこの閉曲線上の外向き単位法線ベクトルである。式(1)-(6)において、最初の等号で結ばれた関係がそれぞれ各量の定義を与えるもので、き裂端が担う各エネルギーあるいは各コンプリメンタリー・エネルギーのき裂直進方向面内の面積密度の意味を持つものとなっており、最右辺はそれらの径路独立積分表示となっている。

さらに関連する量として、 H を

$$H = W^M - W_c^E \quad (9)$$

によって定義される量として、式(2), (6)より、 H の面積密度の意味を持つ $\mathcal{E}^H$ の定義式およびその径路独立積分表示が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^H &= \mathcal{E}^M - \mathcal{E}_c^E = \int_{\Gamma_0} H dX_2 \\ &= \int_{\Gamma} (H n_1 - T_i u_{i,1} + q_s \phi_{s,1}) d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、式(2), (6)の径路独立積分表示には A に関する面積分が存在するが、可逆な挙動においては

$$\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij,1} d\sigma_{ij} + E_{i,1} dD_i - D_{i,1} dE_i = 0 \quad (11)$$

が成り立つので、式(10)では面積分が消去されることになる。この間の事情は、式(2), (3) の和である式(1)において、また、式(5), (6) の和である式(4)において面積分が現れないのと同様である。圧電体の構成則は応力、ひずみ、電界、電気変位の間の関係として与えられ、温度やエントロピーの影響は小さいとしてそれらは無視した形で扱われるのが普通である。このとき、 W や W_c は状態量と見なせるので、式(1), (4), (10)の $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_c$, $\mathcal{E}^H$ は現在の状態のみで定まる量となり、上述の面積分が消去

されることに対応する。しかし、 W や W_c を分離した W^M , W^E および W_c^M , W_c^E は状態量ではないのでこれらに対応する $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{E}^E$ および $\mathcal{E}_c^M$, $\mathcal{E}_c^E$ は履歴に依存し、式(2), (3)および式(5), (6)には面積分項が存在することになる。 H は等温過程において電気エンタルピー密度の意味を持つ量であるが、温度やエントロピーについて考えないとき、やはり電気エンタルピー密度と呼んでよいであろう。従って、このとき $\mathcal{E}^H$ は電気エンタルピー一面積密度の意味を持つ量となる。

以上はき裂を切欠きでモデル化する場合に対する結果であるが、通常用いられる鋭いき裂モデルに対する量は $\rho \rightarrow 0$ の極限として与えられるものを考えればよく、CED およびその力学的寄与分、電気的寄与分について具体的に与えると

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(c)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{E} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} W dX_2 \\ \mathcal{E}^{M(c)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{E}^M = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} W^M dX_2 \dots\dots\dots(12) \\ \mathcal{E}^{E(c)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{E}^E = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} W^E dX_2\end{aligned}$$

である。ここで上付きの (c) は鋭いき裂に対する量であることを示すものであり、以後同様に用いる。なお式(10)最右辺は、形において、鋭いき裂を対象に得られている圧電材料の J 積分¹⁰⁾の定義式と同じであるので

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{H(c)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} H dX_2 \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (Hn_1 - T_i u_{i,1} + q_i \phi_{,1}) d\Gamma \dots\dots\dots(13) \\ &= \int_{\Gamma} (Hn_1 - T_i u_{i,1} + q_i \phi_{,1})^{(c)} d\Gamma = J\end{aligned}$$

なる関係が成り立ち、圧電材料の J 積分は鋭いき裂に対する電気エンタルピー一面積密度の意味を持つ。

3. エネルギー解放率の導出と CED 等との関係

3・1 エネルギー解放率の導出 通常の材料においては、弾性問題であれば、もちろんそれらの意味は異なるが、エネルギー解放率は値において CED に等しくなることが示されている¹⁰⁾。ここでは、構成則が応力、ひずみ、電界、電気変位の間の可逆な関係として与えられる圧電体を考え、そのエネルギー解放率を導き、前章にまとめた CED および CED 関連量との関係を明らかにしてその意味を明確にする。なおここでも、簡単のため、体積力と体積電荷の存在は考えないものとする。

図 2 に切欠き状き裂端近傍の様子のみを示すが、外境界で力学的、電気的外力を受けている圧電体における切欠き状き裂の進展を考え、鋭いき裂に対する諸量は、ここでも、得られる結果の $\rho \rightarrow 0$ における極限とし

Fig. 2 Crack extension

て与える。き裂進展前の圧電体の体積を V として、切欠き状き裂の進展は、図 2(a)のき裂進展直前の状態(状態 1; 時刻 t_1)から、進展量 Δa に対応する切欠き端前方の体積 ΔV を取り去り、この結果現れる新表面 ΔS 上の表面力をゼロ、さらに本研究では切欠き面で不浸透性条件を考えるので、表面電荷についてもそれをゼロにすることによって実現され、図 2(b)の状態(状態 2; 時刻 t_2)になる。この変化の間、一般的には外境界での力学的、電気的外力も仕事をするのでこの外力仕事を ΔL とするとき、き裂の進展に伴って解放されるエネルギー $-\Delta E$ は

$$-\Delta E = \Delta L - (U_2 - U_1) \dots\dots\dots(14)$$

となる。ここで U は圧電体全体の拡張ひずみエネルギーであり、下付き 1, 2 はそれぞれ状態 1, 状態 2 に対する量であることを表し、以後同様に用いる。状態 1, 2 に対する全拡張ひずみエネルギーの差は

$$\begin{aligned}-\Delta U &= U_1 - U_2 = \int_V W_1 dV - \int_{V-\Delta V} W_2 dV \\ &= \int_{\Delta V} W_1 dV - \int_{V-\Delta V} (W_2 - W_1) dV \dots\dots\dots(15)\end{aligned}$$

と表せる。そしてこの式の最右辺の第 1 項および第 2 項の負号を除いた量は、それぞれ、外力を受けていない初期の状態(状態 0; 時刻 0)から状態 1, また、状態 1 から状態 2 の間に、それぞれ、 ΔV , $V - \Delta V$ 部分にそれらの境界面を介して力学的、電気的になされる仕事に等

しいことを考えると、式(15)の全拡張ひずみエネルギーの差は、さらに

$$\begin{aligned} -\Delta U = & - \int_{\Delta S} \int_0^{\epsilon_1} (T_i^{\Delta V} du_i + \phi dq_s^{\Delta V}) dS \\ & - \{ \int_{\Delta S} \int_1^2 (T_i^{V-\Delta V} du_i + \phi dq_s^{V-\Delta V}) dS + \Delta L \} \end{aligned} \quad (16)$$

と表せる。ここで、上付き ΔV 、 $V - \Delta V$ は、それぞれ ΔS 上で、体積 ΔV 側に作用するものであるか、あるいは、体積 $V - \Delta V$ 側に作用するものであるかを区別するために付したものであり、また、式(16)の第 1 項に負号が付くのは、体積 $V - \Delta V$ の境界面での外向き単位法線ベクトルを考えていることからくる。式(16)を式(14)に適用すると

$$\begin{aligned} -\Delta E = & - \int_{\Delta S} \int_0^{\epsilon_1} (T_i^{\Delta V} du_i + \phi dq_s^{\Delta V}) dS \\ & - \int_{\Delta S} \int_1^2 (T_i^{V-\Delta V} du_i + \phi dq_s^{V-\Delta V}) dS \end{aligned} \quad (17)$$

となり、結果として、き裂の進展により解放されるエネルギーに外力仕事は関係しなくなる。

ここで式(17)の各項の意味を明確にするため図で考えてみよう。図 3 (a), (b) は、それぞれ、図 2 において ΔS の $X_2 \geq 0$ の部分上の表面力と変位および電位と電荷の間の関係を、簡単のため、圧電体は線形挙動をするものとして模式的に描き、き裂進展に伴う力学的エネルギー、電気的エネルギーの変化を示したものである。一般性は失われないので、き裂端の $(X_1, X_2) = (p, 0)$ 点での変位と回転および電位をゼロとする支持条件の下、当該位置の応力、ひずみ、電界、電気変位が正となるような外力の下での関係を考えている。図(a)においては、 u_i 軸を挟んで上側は ΔV から見た、下側は $V - \Delta V$ から見た、また図(b)においては、 ϕ 軸を挟んで左側は ΔV から見た、右側は $V - \Delta V$ から見た挙動を示しており、何れの図においても、O 点は状態 0 に、C, C' 点はそれぞれ ΔV 、 $V - \Delta V$ から見た状態 1 に、D 点は $V - \Delta V$ から見た状態 2 に、O' 点は O 点に一致する点であるが、 ΔV から見た状態 2 に対応する C, C' 点は同じ位置の表面力あるいは電荷を ΔV から見たか、 $V - \Delta V$ から見たかの違いであるので、図(a)では u_i 軸に関し、図(b)では ϕ 軸に関し対称の位置にある点であり、その意味は次に説明されるが、A, A' 点, B, B' 点についても同様である。先に論じたように、初期の状態 0 から外力を受けてき裂進展直前の状態 1 に至る変化、いまの場合、O から C あるいは O から C' への変化はたとえ線形挙動をする場合であっても外力の履歴に依存する。すなわち、線形挙動をする場合、例えば、力学的外力と電気的外力が一定の割合を保ちつつ加えられる比例

(a) Relation between traction force and displacement

(b) Relation between electric potential and surface charge
Fig. 3 Energy variation with crack extension

負荷の場合を考えると、図中 O から C (C') に直線状に変化するが、力学的外力を加え終わってから電気的外力を加える、あるいは逆に、電気的外力を加え終わってから力学的外力を加える場合を考えると、それぞれ、O-A-C (O-A'-C'), O-B-C (O-B'-C') と二直線で表される変化をするというように、C (C') 点の位置は変わらないがそれに至る経路は履歴に依存する。ここで力学的外力のみ、あるいは、電気的外力のみを増しているときの直線的変化の傾きはそれぞれ一定であるべきなので、四辺形 OACB, OA'C'B' は平行四辺形である。また C 点に至るまでに ΔV 部分になされる全仕事は状態 1 の状態のみで定まり、それに至る経路に依存するものではないので、常に図(a)の三角形 OCE と図(b)の三角形 OCF の面積の和として与えられる性質のものであり、従って、図(a), (b)の三角形 OAC (OBC) の面積は等しくなり、 $V - \Delta V$ から見ても同様で、図(a), (b)の三角形 OA'C' (OB'C') の面積は等しくなる。

次に状態 1 から状態 2 へのき裂進展に伴う変化であるが、進展に伴って ΔS が自由表面になることによる ΔS 上での力学的、電気的外力の除荷は ΔV 、 $V - \Delta V$ 何れの側でも比例的に起こると考えるのが自然である

ので、 ΔV の側では図上CからO'の直線変化で表され、 $V - \Delta V$ の側ではC'からDへのやはり直線変化で示されることになる。こうして、いま、先ず力学的外力が加わってから電気的外力が加わる場合を例にして考えると、状態0から状態1を経て状態2に至る変化は、図中矢印で示すように、 ΔV 側ではO-A-C-O'、 $V - \Delta V$ 側ではO-A'-C'-Dで表される。従って、各項についている負号も含めて考えて、式(17)第1項中の第1項が図(a)の面積OACEに第2項が図(b)の面積OACFに対応し、また、第2項中の第1項が図(a)の面積C'DEに第2項についてはその絶対値が図(b)の面積C'DOF'に対応する。結局、き裂進展に伴って解放されるエネルギーは、図(a)の薄墨を施した部分の面積から図(b)の薄墨を施した部分の面積を引いたものが対応することが分かる。なお圧電体が非線形挙動をする場合であっても、その場合は図上の直線が曲線状となり、また、解の一意性が保証されないので、C(C')点やD、O'点の位置が履歴に依存する(O'点はO点に一致しない)といったことも考えられるが、上述と同じ解放されるエネルギーと図上の面積との対応が成り立つことは明らかである。

さて以後厚さ方向については単位厚さあたりを考えることにしよう。このとき式(17)右辺の ΔS 上の積分は、第1項と第2項共、次のように分解することができる。

$$-\int_{\Delta S} (T_i du_i + \phi dq_s) dS = -\left\{ \int_0^{\Delta u} (T_i du_i + \phi dq_s)^d dX_1 + \int_{\Gamma(\Delta u)} (T_i du_i + \phi dq_s) d\Gamma + \int_0^0 (T_i du_i + \phi dq_s)^u (-dX_1) \right\} \quad (18)$$

ここで上付きの u, d は、図2において、それぞれ、面 ΔS の X_1 軸に平行な部分の上と下に対するものであることを意味しており、以後同様に用いる。

i) エネルギー解放率1 ここで $\Delta a \rightarrow 0$ とする場合を考える。このとき式(18)における上下面での寄与は消え、その右辺は

$$-\int_{\Delta S} (T_i du_i + \phi dq_s) dS = -\int_{\Gamma(\Delta a)} (T_i du_i + \phi dq_s) d\Gamma \quad \cdots (19)$$

となる。 ΔV の右端の径路 $\Gamma(\Delta a)$ が限りなく切欠き状き裂の自由表面径路 Γ_0 に近づくことを念頭に、図3を参照しつつ、式(17)の右辺における各項のオーダーを比較することを考える。このとき、まず第1項は、 $-T_{ii}^{\Delta V} (= -T_{ii}^{V-\Delta V}) \rightarrow 0$ 、 $-q_{s1}^{\Delta V} (= -q_{s1}^{V-\Delta V}) \rightarrow 0$ であるが u_{i1} 、 ϕ_1 は有限であるので一次の微小量となる。一方、 $T_{i2}^{V-\Delta V} (= 0) - T_{i1}^{V-\Delta V} \rightarrow 0$ となることから、 $u_{i2} - u_{i1} \rightarrow 0$ であり、第2項中第1項は二次の微小量、しかし、第2項は $q_{s2}^{V-\Delta V} (= 0) - q_{s1}^{V-\Delta V} \rightarrow 0$ となつて $\phi_2 - \phi_1$

$\rightarrow 0$ であるが、 ϕ_1 は有限であるので、一次の微小量となる(図3b参照)。従って、式(17)は

$$-\Delta E = -\int_{\Delta S} \int_0^{\epsilon_1} (T_i^{\Delta V} du_i + \phi dq_s^{\Delta V}) dS - \int_{\Delta S} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} (\phi dq_s^{V-\Delta V}) dS \quad \cdots (20)$$

となり、図3b)中三角形C'DEの面積は二次の微小量、長方形OEC'F'の面積は長方形OECFの面積に等しいことも考慮すると、式(20)の関係は

$$-\Delta E = \int_{\Delta V} W_1 dV - \int_{\Delta V} (W_1^E + W_{c1}^E) dV = \int_{\Delta V} (W_1^M - W_{c1}^E) dV \quad \cdots (21)$$

と表せ、さらに $\Gamma(X_1)$ を図2(a)に示すき裂端前方の Γ_0 と同一形状の径路とすると

$$-\Delta E = \int_0^{\Delta u} \left[\int_{\Gamma(X_1)} \{W_1 - (W_1^E + W_{c1}^E)\} dX_2 \right] dX_1 = \int_0^{\Delta u} \left\{ \int_{\Gamma(X_1)} (W_1^M - W_{c1}^E) dX_2 \right\} dX_1 \quad \cdots (22)$$

とも表現できる。こうして、き裂が進展するときのエネルギー解放率 $\mathcal{G}$ は式(1), (2), (3), (6), (10), また W における下付き1による区別は不要となることも考慮して

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta E}{\Delta a} \right) = \int_{\Gamma_0} \{W - (W^E + W_c^E)\} dX_2 = \int_{\Gamma_0} (W^M - W_c^E) dX_2 = \mathcal{E} - (\mathcal{E}^E + \mathcal{E}_c^E) = \mathcal{E}^M - \mathcal{E}_c^E = \mathcal{E}^H \quad \cdots (23)$$

と得られる。

鋭いき裂を考える場合には $\rho \rightarrow 0$ とした極限を考えればよく、式(13)も考慮して

$$\mathcal{G}_0^{(c)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{G} = \mathcal{E}^{(c)} - (\mathcal{E}^{E(c)} + \mathcal{E}_c^{E(c)}) = \mathcal{E}^{M(c)} - \mathcal{E}_c^{E(c)} = \mathcal{E}^{H(c)} = J \quad \cdots (24)$$

と得られ、これまでいわれている J 積分はエネルギー解放率に等しいという結果に一致する。なお $\rho \rightarrow 0$ においてき裂端 Γ_0 は一点に近づくのであるから、極限においてき裂進展に際し体積を取り去ることとならないのはいうまでもなく、極限においても有限な値をとる面積密度の形でそこに蓄えられていたエネルギーのみが、すなわち、 $\mathcal{E}^{(c)}$ のみが取り去られることになる。

ii) エネルギー解放率2 i)においては鋭いき裂のエネルギー解放率を導くにあたり、式(17)において、 $\Delta a \rightarrow 0$ とした後に $\rho \rightarrow 0$ という操作を行ったが、ここでは、逆に $\rho \rightarrow 0$ とした後に $\Delta a \rightarrow 0$ とする場合を

考えて見る。面 ΔS の X_1 軸に平行な部分上の X_1 が等しい上下の位置の相対変位 $\Delta u_i = u_i^u - u_i^d$ 、電位差 $\Delta \phi = \phi^u - \phi^d$ を考え、図中括弧内に示すように、図 3(a) で u_i を Δu_i 、図 3(b) で ϕ を $\Delta \phi$ に置き換えるとき、これらの図は、状態 0 から状態 2 まで変化する間の、上面当該位置の表面力と相対変位、電位差と上面当該位置の表面電荷の関係を示しているとも見ることが出来る。 $\rho \rightarrow 0$ とするとき、式(18)において右辺の第 2 項の寄与は消え、さらに $T_i^u + T_i^d \rightarrow 0$ 、 $dq_s^u + dq_s^d \rightarrow 0$ であることを用いると

$$\begin{aligned} & - \int_{\Delta S} (T_i du_i + \phi dq_s) dS \\ &= - \int_0^{\Delta u} [(T_i du_i)^u + (T_i du_i)^d] + [(\phi dq_s)^u + (\phi dq_s)^d] dX_1 \\ &= - \int_0^{\Delta u} \{T_i^u d(\Delta u_i) + \Delta \phi dq_s^d\} dX_1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。従って、図 3 で括弧内の Δu_i 、 $\Delta \phi$ を用いるとき、図中の各面積は、 $\rho \rightarrow 0$ においては、対応する 2 点を一対のものとして、先の議論と同じ意味を持つものとなるので、図を参照しつつ $\rho \rightarrow 0$ とするときの式(17)の各項のオーダーを比較する。

すなわち $\rho \rightarrow 0$ とするとき、 $-T_{i1}^{\Delta V} (= -T_{i1}^{V-\Delta V}) \rightarrow \infty$ 、 $\Delta u_{i1} \rightarrow 0$ 、また、 $-q_{s1}^{\Delta V} (= -q_{s1}^{V-\Delta V}) \rightarrow -\infty$ 、 $\Delta \phi_1 \rightarrow 0$ であるので、第 1 項目は $\infty \times 0$ のオーダーである。一方、 $T_{i2}^{V-\Delta V} (= 0) - T_{i1}^{V-\Delta V} \rightarrow \infty$ 、 $\Delta u_{i2} - \Delta u_{i1} (\rightarrow 0) \rightarrow$ 有限値、また、 $q_{s2}^{V-\Delta V} (= 0) - q_{s1}^{V-\Delta V} \rightarrow -\infty$ 、 $\Delta \phi_2 - \Delta \phi_1 (\rightarrow 0) \rightarrow$ (負の)有限値であるので、第 2 項目は $\infty \times$ 有限値のオーダーとなる。従って第 2 項目のみを考えればよいことになり、式(25)も考慮し、以後式中 $V - \Delta V$ は省略するが、 $V - \Delta V$ 側から見た表面力、表面電荷を用いるものとして、式(17)の関係は

$$-\Delta E = - \int_0^{\Delta u} \int_{l_1}^{l_2} \{T_i^u d(\Delta u_i) + \Delta \phi dq_s^d\} dX_1 \quad \dots\dots\dots (26)$$

で与えられ、さらにこれは $T_i^u = \sigma_{ij}^u n_j^u = -\sigma_{i2}^u$ 、 $q_s^d = -D_i^d n_i^d = D_2^d$ ($n_1 = 0$ 、 $n_2 = -1$) であること(ここでの下付き 2 はテンソル指標の値が 2 であることを意味する)、また $\rho \rightarrow 0$ においては $\sigma_{i2}^u = \sigma_{i2}^d$ 、 $D_2^u = D_2^d$ となって u 、 d を付けしての区別は不要となることも考慮して

$$-\Delta E = \int_0^{\Delta u} \int_{l_1}^{l_2} \{\sigma_{i2} d(\Delta u_i) - \Delta \phi dD_2\} dX_1 \quad \dots\dots\dots (27)$$

とも表現される。特に線形問題の場合には、図 3(b) において $\rho \rightarrow 0$ のとき C' 点は F' 点に一致して $q_s^{V-\Delta V}$ 軸上の点となり、状態 1 から状態 2 への変化は C' 点から

D 点への直線変化で表されるので、上式は、状態 1 での D_2 は正であるが、この変化に沿っての dD_2 は負となることも考慮して

$$\begin{aligned} -\Delta E &= \frac{1}{2} \int_0^{\Delta u} \{\sigma_{i2}(X_1) \Delta u_i (\Delta a - X_1) \\ &\quad + \Delta \phi (\Delta a - X_1) D_2(X_1)\} dX_1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

と書ける。ただし、 $\sigma_{i2}(X_1)$ 、 $D_2(X_1)$ は、それぞれ、状態 1 におけるき裂端前方の応力、電気変位の分布であり、 $\Delta u_i (\Delta a - X_1)$ 、 $\Delta \phi (\Delta a - X_1)$ は、それぞれ、状態 2 におけるき裂端後方き裂面上下の相対変位、電位差である。

エネルギー解放率は

$$\mathcal{G}_{ii}^{(c)} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(- \frac{\Delta E}{\Delta a} \right) \quad \dots\dots\dots (29)$$

に式(27)を代入することにより、特に線形問題の場合には式(28)を代入することによっても求まり、後者は従来圧電体のエネルギー解放率として具体的に論じられているものとなる。

3.2 考察

エネルギー解放率は「き裂端の一点が開くことにより解放されるエネルギーを単位面積あたりで表したもの」と定義されるが、このエネルギー解放率として $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ (式(24))と $\mathcal{G}_{ii}^{(e)}$ (式(29))の 2 通りのものが導かれた。まず式(24)の関係であるが、これは、エネルギー解放率が、き裂を含む面内のき裂端の一点に蓄えられ、その一点が開くことにより解放されるエネルギーに転じるエネルギー面積密度の意味を持つ $\mathcal{E}^{(c)}$ と、それに負号を付したものが進展前のき裂端の一点に存在していた $\mathcal{E}^{E(c)} + \mathcal{E}_e^{E(c)}$ の値に等しい、き裂端の一点が開くことにより生じる新たなき裂端を電気的自由表面にするために解放される電気的エネルギーを単位面積あたりで表したものと和として与えられることを意味している。そしてそれがさらに、値において進展前のき裂端の一点における $\mathcal{E}^{M(c)}$ と $\mathcal{E}_e^{E(c)}$ の差、すなわち、 $\mathcal{E}^{H(c)}$ 、ひいては J に等しいことを示している。 $\mathcal{E}^{H(c)}$ の意味はあくまで電気エンタルピー面積密度であって、その値にエネルギー解放率の値は等しいということであり、 J 積分とエネルギー解放率の関係についてもそのように捉えるのが正確であろうと思われる。

一方 $\mathcal{G}_{ii}^{(e)}$ は、式(27)を見れば分かるように、き裂端の一点が開いたとき新たに生じる新表面を自由表面にするために力学的および電気的に解放されるエネルギーをそれぞれ単位面積あたりで表したものの和となっており、通常エネルギー解放率の考え方に一致する。そしてこれまで行われているように⁹⁾、それらをそれぞれ力学的エネルギー解放率 $\mathcal{G}_{ii}^{M(c)}$ 、電気的エネルギー解

Fig. 4 Piezoelectric infinite medium with a central crack under electro-mechanical loadings

放率 $\mathcal{G}_{ii}^{E(c)}$ とすることができ、き裂端周りの特異場の解が与えられる線形問題の場合には、式(28), (29)にその特異解を適用することによりこれらのエネルギー解放率を具体的に与えることができる。ここでは例として図4に示すような X_2 軸に極方向が一致し、き裂面が直交する圧電無限板が、無限遠で力学的負荷と電気的負荷 ($\sigma_{11}^x, \sigma_{22}^x, \sigma_{12}^x, D_1^x, D_2^x$) を同時に受ける場合を考える。このとき、Sosa による特異場の解²⁾を用いることにより

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ii}^{M(c)} = & \frac{\pi a}{2} \left\{ -\text{Im} \sum_{k=1}^3 q_k \Lambda_{k1} (\sigma_{22}^x)^2 + \text{Im} \sum_{k=1}^3 p_k \Lambda_{k2} (\sigma_{12}^x)^2 \right. \\ & + \text{Im} \sum_{k=1}^3 (q_k \Lambda_{k2} - p_k \Lambda_{k1}) \sigma_{22}^x \sigma_{12}^x + \text{Im} \sum_{k=1}^3 p_k \Lambda_{k3} \sigma_{12}^x D_2^x \\ & \left. + \text{Im} \sum_{k=1}^3 q_k \Lambda_{k3} \sigma_{22}^x D_2^x \right\} \end{aligned} \quad (30.a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ii}^{E(c)} = & \frac{\pi a}{2} \left\{ \text{Im} \sum_{k=1}^3 r_k \Lambda_{k1} \sigma_{22}^x D_2^x - \text{Im} \sum_{k=1}^3 r_k \Lambda_{k2} \sigma_{12}^x D_2^x \right. \\ & \left. - \text{Im} \sum_{k=1}^3 r_k \Lambda_{k3} (D_2^x)^2 \right\} \end{aligned} \quad (30.b)$$

となり、 $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ がこれらの和であることはいうまでもない。ここで、式中の定数 $q_k, p_k, r_k, \Lambda_{ki}$ 等はすべて材料定数の関数であり、その具体的な表現については文献(2)を参照されたい。

さてここで、2つのエネルギー解放率 $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}, \mathcal{G}_{ii}^{E(c)}$ が一致するのか、 $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ は力学的寄与分と電気的寄与分に分けられたが、 $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ についてはどうかといったことを考えてみよう。まず両者が一致するかということであるが、式(13)において、その経路独立性から Γ としてき裂端に近い円状の経路を選択し、特異解を適用することにより、 $\mathcal{E}^{H(c)}$ (J 積分) を求めることができる。再び

Sosa の解を適用して調べたところ、この場合は $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ のように閉じた形での表現は与えにくい、**MATHEMATICA** を用いることにより、数値的に $\mathcal{E}^{H(c)}$ (J 積分) が $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ に一致することが確認された。2つのエネルギー解放率は一般に線形問題であれば一致するものと思われ、非線形問題においても、線形問題のような直接的証明は困難であるが、両者は一致する、すなわち

$$\mathcal{G}_{ii}^{(c)} = (\mathcal{E}^{H(c)} = J) = \mathcal{G}_{ii}^{(c)} = \mathcal{G}_{ii}^{M(c)} + \mathcal{G}_{ii}^{E(c)} \quad (31)$$

が成り立つものと考えてよいであろう。

次に $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ の力学的寄与分と電気的寄与分への分離についてであるが、一見式(24)において $\mathcal{E}^{M(c)}$ と $-\mathcal{E}^{E(c)}$ がそれらに対応するように見えるが、 $\mathcal{E}^{H(c)}$ とは異なってこれらは履歴に依存する量であり、意味はもちろん、数値的にも $\mathcal{G}_{ii}^{M(c)}, \mathcal{G}_{ii}^{E(c)}$ と異なることは明らかである。ここで Γ はき裂端を囲む任意の経路であるから、その経路として部分的に $\Gamma(\Delta a)$ を含む図2(a)の ΔS に沿った経路 Γ_p を考えて $\rho \rightarrow 0$ とするとき、 $\Gamma(\Delta a)$ 部分の寄与はなくなり、他の部分では $n_i = 0$ であるので、式(10)より

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{H(c)} = & \mathcal{E}^{M(c)} - \mathcal{E}^{E(c)} \\ = & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_p} (-T_i u_{i,1}) d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_p} (q_i \phi_{i,1}) d\Gamma \end{aligned} \quad (32)$$

なる関係が得られる。そして $\mathcal{E}^{M(c)}, -\mathcal{E}^{E(c)}$ は履歴に依存するが、上式最右辺の第1項、第2項はそれぞれ現在の力学的量、電気的量のみに定まり、履歴には依存しない量となっているので、それらをそれぞれ $\mathcal{G}_{ii}^{M(c)}, \mathcal{G}_{ii}^{E(c)}$ で表し、 A_p を閉経路 $\Gamma_p - \Gamma_0$ で囲まれる部分の面積として、式(2), (6)も適用すると

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ii}^{M(c)} = & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_p} (-T_i u_{i,1}) d\Gamma \\ = & \mathcal{E}^{M(c)} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{A_p} \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij,1} d\sigma_{ij}) dA \end{aligned} \quad (33.a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ii}^{E(c)} = & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_p} (q_i \phi_{i,1}) d\Gamma \\ = & -\mathcal{E}^{E(c)} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{A_p} \int_0^t (E_{j,1} dD_j - D_{j,1} dE_j) dA \end{aligned} \quad (33.b)$$

であり、これらが $\mathcal{G}_{ii}^{(c)}$ の力学的寄与分、電気的寄与分を与えるものとなる。式(11)が成り立つので、これらの和をとるとき面積分の寄与分が相殺されるのはもちろんであり、式(31)であることも考えると、 $\mathcal{G}_{ii}^{M(c)}, \mathcal{G}_{ii}^{E(c)}$ はそれぞれ $\mathcal{G}_{ii}^{M(c)}, \mathcal{G}_{ii}^{E(c)}$ に値において一致するものと思われる。

4. 結 言

CED に関わる知識を踏まえて、き裂面電氣的不浸透条件の下での圧電体のエネルギー解放率について論じ、CED やその関連量、 J 積分と呼ばれる量との関係等、エネルギー解放率に関わる基本的事項を明らかにした。なお、本論では触れなかったが、圧電体のエネルギー解放率にはその電氣的寄与分が負となる(き裂進展に伴ってエネルギーを解放するのではなく逆に吸収する)というエネルギー・バランスの議論には不都合な事実がある⁴⁹⁾。著者らは大切なのは CED であり、エネルギー解放率は補助的なパラメータであると考えたものであるが、この問題には電氣的境界条件のあり方や微小変形理論下の連続体力学モデル自体の問題が関わってくると思われるので CED の観点からも重要であり、別途改めて論じる予定である。

文 献

- (1) Pak, Y.E., Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.112 (1992), pp.647-653.
- (2) Sosa, H., On the fracture mechanics of piezoelectric solids, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.29 (1992), pp.2613-2622.
- (3) Suo, Z. et al., Fracture mechanics for piezoelectric ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.35 (1992), pp.739-765.
- (4) Park, S.B., Sun, C.T., Fracture criteria for piezoelectric ceramics, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol.78 (1995), pp.1475-1480.
- (5) Gao, H. et al., Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.45 (1997), pp.491-510.
- (6) Fang, D.N. et al., Energy analysis on fracture of ferroelectric ceramics, *Int. J. Fract.*, Vol.100, No.4 (2000), pp.401-408.
- (7) Shen, S., Nishioka, T., Fracture of piezoelectric material: energy density criterion, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol.33 (2000), pp.57-65.
- (8) Zuo, J.Z., Sih, G.C., Energy density theory formulation and interpretation of cracking behavior for piezoelectric ceramics, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol.34 (2000), pp.17-33.
- (9) Soh, A.K. et al., Fracture analysis of piezoelectric materials with defects using energy density theory, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.38 (2001), pp.8331-8344.
- (10) McMeeking, R.M., The energy release rate for a Griffith crack in a piezoelectric material, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.71 (2004), pp.1149-1163.
- (11) Gao, C.F. et al., The energy release rate and the J integral of an electrically insulated crack in a piezoelectric material, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.42 (2004), pp.2175-2192.
- (12) Spyropoulos, C.P., Energy release rate and path independent integral study for piezoelectric material with crack, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.41 (2004), pp.907-921.
- (13) Watanabe, K., New proposal of crack energy density concept as a fundamental fracture mechanics parameter, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.47, No.416 (1981), pp.406-415.
- (14) Watanabe, K., Crack energy density and energy release rate for elasto-plastic crack, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.48, No.433 (1982), pp.1226-1236.
- (15) Watanabe, K., The conservation law related to path independent integral and expression of crack energy density by path independent integral, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.50, No.453 (1984), pp.894-903.
- (16) Watanabe, K., Fatigue crack growth from the standpoint of crack energy density, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.51, No.463 (1985), pp.873-882.
- (17) Nam, B.G., Watanabe, K., Crack energy density for piezoelectric body (Definition and derivation of fundamental relations), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.715 (2006), in printing.