混合モード円形き裂の一般解とその応用について*

西岡 俊久^{*1}, 周 廣 勤^{*2}, 藤本 岳 洋^{*3}On the General Solutions for Mixed-Mode Penny-Ohaped Crack
and Their ApplicationsToshihisa NISHIOKA^{**}, Guangqin ZHOU and Takehiro FUJIMOTO^{**} Faculty of Maritime Sciences, Kobe University,
5-1-1 Fukaeminamimachi, Higashinada-ku, Kobe-shi, Hyogo, 658-0022 Japan

The general solutions for a penny-shaped crack in an infinite solid, subjected to arbitrary tractions on the crack surfaces were derived. The applicability was demonstrated deriving the closed-form solutions for a penny-shaped crack subjected to the lower-order loading such as constant tension, shear, bending, and torsion. Furthermore, we consider a circular crack subjected to cubic-order normal stresses. It is shown that the stress intensity factor distribution derived from the general solution exactly agree with the analytical solutions derived by Shah-Kobayashi.

Key Words: Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Penny-shaped Crack, Residual Stress, Mixed-Mode, VNA Solution

1. 緒言

破壊力学は現在, 様々な機器・構造物の安全設計に盛んに用いられ, その有効性は多くの分野で認識されている。一般に, 三次元構造物中の実際のき裂は円形き裂, あるいはだ円き裂で近似されることが多い。このため, 三次元円形き裂の研究は多くなされてきた。

任意の次数の多項式で表される垂直及びせん断荷重を受けるだ円き裂一般解の導出の試みが, VijayaKumar・Athuri⁽¹⁾によってなされた。その後完全な解の導出が Nishioka・Athuri⁽²⁾⁽³⁾によって行われた。この解は簡便のため, VNA (VijayaKumar・Nishioka・Athuri) 解と呼ばれている⁽⁴⁾。VNA 解は一般だ円積分, 任意のポテンシャル関数の任意次数の微分などを含め, 極めて任

意のき裂面の荷重について有用である。

だ円き裂の一般解はあくまでもだ円き裂のものである。円形き裂の場合, き裂のアスペクト比 $k = a_2 / a_1$ 及び関連比 $k' = 1 - k^2$ はそれぞれ $k = 1$, $k' = 0$ となり, これらの値をだ円き裂の一般解に用いると, 分母がゼロとなる項が各所に現れる。円形き裂の解は工学的に極めて重要であるので, 上記の数学的困難を克服し, 一般解を導出する意義は非常に大きいと考えられる。本研究では VNA 解を基に任意の次数の多項式で表される荷重が表面に作用する無限体中の円形き裂の一般解を導出した。この円形き裂の一般解は, 任意の点における変位・応力分布を導出可能であり, さらには破壊力学パラメータを評価できる。この解を用いて低次の引っ張り, せん断, 曲げ及びねじり荷重分布に対して, この円形き裂の一般解によって容易に閉じた解が導けることを示し, これらの解が他の文献⁽⁵⁾の解と完全に一致することを示す。そして, 本論文において, 円形き裂の一般解を用いて円形き裂面における直線的に変化するせん断荷重分布に対して, 導出した各モードの応力拡大係数を示した。

* 原稿受付 2005 年 7 月 7 日。

^{*1} フェロー, 神戸大学海事科学部(〒658-0022 神戸市東灘区深江南町 5-1-1)。^{*2} 学生員, 神戸大学大学院自然科学研究科。^{*3} 正員, 神戸大学海事科学部。

E-mail: nishioka@maritime.kobe-u.ac.jp

さらに、この円形き裂一般解と開発したプログラムの有効性を調べるため、解析例として、き裂面に2次及び3次の荷重分布を受ける無限弾性体内に存在する円形き裂の場合を解析した。この数値解析解の信頼性を調べるために Shah・Kobayashi¹⁰⁾ による解析解と比較して、両者が完全に一致することにより、この円形き裂の一般解の妥当性を検証した。

2. 無限体中単数円形き裂の一般解

2.1 調和応力関数

図1に示すような無限体中の半径 a の円形き裂を考える。直交デカルト座標 (x_1, x_2, x_3) の原点を円形き裂の中心にとると、円形き裂縁は次式で表される。

$$(x_1/a)^2 + (x_2/a)^2 = 1 \quad (1)$$

Fig 1 Apenny-shaped crack in an infinite solid

円形き裂の解析においては、図2に示すだ円体ボイドから $a_3 = 0$ 、 $a_1 = a_2 = a$ とすることによって容易に円形き裂のモデルができるので、だ円体座標を用いたほうが便利である。

Fig 2 An ellipsoidal Void which expresses axis length

だ円体座標 ξ_α は次式で与えられる3次方程式の根として与えられる。

$$\omega(s) = 1 - \left(\frac{x_1^2}{a^2 + s} \right) - \left(\frac{x_2^2}{a^2 + s} \right) - \left(\frac{x_3^2}{s} \right) = 0 \quad (2)$$

したがって、円形き裂の解析においては、だ円体座標 ξ_α ($\alpha = 1, 2, 3$)の値は次式で簡単に計算できる。

$$\xi_1 = -a^2 \quad (3a)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left[r^2 - a^2 - \sqrt{(r^2 - a^2)^2 + 4a^2 x_3^2} \right] \quad (3b)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} \left[r^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 - a^2)^2 + 4a^2 x_3^2} \right] \quad (3c)$$

$$\text{ここで,} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (3d)$$

$$-a^2 = \xi_1 \leq \xi_2 \leq 0 \leq \xi_3 < \infty \quad ; (x_3 = 0) \quad (3e)$$

このだ円体座標を用いると $x_3 = 0$ 平面で、き裂内部は $\xi_3 = 0$ 、き裂外部は $\xi_2 = 0$ 、そしてき裂縁は $\xi_2 = \xi_3 = 0$ で表すことができる。式(2)は書き換えると次式のようになる。

$$\omega(s) = P(s)/Q(s) \quad (4)$$

ここに

$$P(s) = (s - \xi_1)(s - \xi_2)(s - \xi_3) \quad (5a)$$

$$Q(s) = s(s + a^2)(s + a^2) \quad (5b)$$

変位で表した弾性体の基礎方程式は

$$u_{\beta, \beta\alpha} + (1 - 2\nu)u_{\beta, \beta\beta} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (6)$$

ここに ν はポアソン比を表す。また $(\cdot)_{,\alpha}$ は $\partial(\cdot)/\partial x_\alpha$ を意味する。

式(6)は三つの調和応力関数 f_α ($\alpha = 1, 2, 3$)によって満足される。

$$f_\alpha = \sum_k \sum_l C_{\alpha, k, l} F_{kl} \quad (7)$$

ここに $C_{\alpha, k, l}$ は未定係数でコンマは添え字の区別のため便宜上用いられ、 F_{kl} はポテンシャル関数である¹²⁾。

$$F_{kl} = \int_{\xi_3}^{\infty} \partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} \partial_3^{m_1} \omega(s)^{k+l+1} \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}} \quad (8a)$$

$$\text{ここに} \quad k_1 = k; l_1 = l; m_1 = 0 \quad (8b)$$

ここに ∂'_α は x_α に関する j 階の偏微分を表す。

式(7)をマトリックス表示すると、下の式で表される。

$$f_\alpha = \{F\}^T \{C\} \quad (9)$$

変位 u_i および応力 σ_{ij} は調和応力関数 f_α を用いて次のように表すことができる。

$$u_1 = (1-2\nu)(f_{1,3} + f_{3,1}) - (3-4\nu)f_{1,3} + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,1} \quad (10a)$$

$$u_2 = (1-2\nu)(f_{2,3} + f_{3,2}) - (3-4\nu)f_{2,3} + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,2} \quad (10b)$$

$$u_3 = (1-2\nu)(f_{1,1} + f_{2,2}) - 2(1-\nu)f_{3,3} + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,3} \quad (10c)$$

また,

$$\sigma_{11} = 2\mu[f_{3,11} + 2\nu f_{3,22} - 2f_{1,31} - 2\nu f_{2,32} + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,11}] \quad (11a)$$

$$\sigma_{22} = 2\mu[f_{3,22} + 2\nu f_{3,11} - 2f_{2,32} - 2\nu f_{1,31} + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,22}] \quad (11b)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu[(1-2\nu)f_{3,12} - (1-\nu)(f_{1,23} + f_{2,13}) + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,12}] \quad (11c)$$

$$\sigma_{33} = 2\mu[(f_{3,11} + f_{3,22}) + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,33}] \quad (11d)$$

$$\sigma_{31} = 2\mu[f_{1,11} - (1-\nu)f_{1,22} + \nu f_{2,21} + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,13}] \quad (11e)$$

$$\sigma_{32} = 2\mu[f_{2,22} - (1-\nu)f_{2,11} + \nu f_{1,12} + x_3(\nabla \cdot \hat{f})_{,23}] \quad (11f)$$

$$\text{ここで,} \quad \nabla \cdot \hat{f} = f_{1,1} + f_{2,2} + f_{3,3} \quad (12)$$

μ は横弾性係数を表す。

2.2 き裂面に作用する荷重分布

無限に広がる弾性体内に存在する円形き裂の面上に作用する任意の分布荷重 $\sigma_{3\alpha}^{(0)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) は次式のように級数展開できるものとする。

$$\sigma_{3\alpha}^{(0)} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^m A_{\alpha, m-n, n}^{(i, j)} x_1^{2m-2n+i} x_2^{2n+j} \quad (13)$$

上式をマトリックス表示すると、下の式で表される。

$$\sigma_{3\alpha}^{(0)} = \{L\}^T \{A\} \quad (14)$$

$A_{\alpha, m-n, n}^{(i, j)}$ は未定係数であり、 (i, j) はそれぞれ x_1 , x_2 軸に対する荷重の対称性を示している添字である。

M は任意の整数で、式(13)に対する完全多項式の次数 M_c との関係は $M_c = 2M + 1$ であり、また級数の項数と $N = (M + 1)(2M + 3)$ の関係がある。また、不完全多項式の次数と項数は M ばかりでなく、 (i, j) にも依存する。そして、 (i, j) の対称性を考慮して式(7)を書き直すと以下のようになる。

$$f_\alpha = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^k C_{\alpha, k-l, l}^{(i, j)} F_{2k-2l+i, 2l+j} \quad (15)$$

このとき、式(7)にある k, l はそれぞれ $(2k - 2l + i)$, $(2l + j)$ で置換された。き裂面上 ($x_3 = 0$) の境界条件は、 $\sigma_{3\alpha}^{(0)} = \sigma_{3\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) であるため、式(11)より調和応力関数を用いて次の式が得られる。

$$\sigma_{3\alpha}^{(0)} = 2\mu[(1-\nu)(f_{\alpha, 11} + f_{\alpha, 22}) + \nu(f_{1, 1\alpha} + f_{2, 2\alpha})]; (\alpha = 1, 2) \quad (16)$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = 2\mu(f_{3, 11} + f_{3, 22}) \quad (17)$$

ここで調和関数のもつ以下の関係が用いられる。

$$f_{\alpha, 33} = -(f_{\alpha, 11} + f_{\alpha, 22}); (\alpha = 1, 2, 3) \quad (18)$$

式(13)と式(15)を式(16), (17)に代入し、多項式の次数を比較することにより、次の代数方程式を得ることができる。モード I 型に対しては、

$$A_{3, m-n, n}^{(i, j)} = 2\mu \frac{(-1)^{m+i+j}}{(2m-2n+i)! (2n+j)!} \sum_{k=m}^M \sum_{l=0}^k (-1)^k \left[I_1^{(i, j)} J_{L_1+1, L_2, 0}(0) + I_2^{(i, j)} J_{L_1, L_2+1, 0}(0) \right] \cdot C_{3, k-l, l}^{(i, j)} \quad (19)$$

$$\text{ここで,} \quad \begin{cases} i = 0, 1, & j = 0, 1, & m = 0, 1, \dots, M \\ n = 0, 1, \dots, m \end{cases}$$

$$L_1 = m - n + k - l + i, \quad L_2 = n + l + j \text{ となる。}$$

モード II とモード III の混合モードでは、

$$\begin{aligned} A_{\alpha, m-n, n}^{(i, j)} = 2\mu \frac{(-1)^{m+i+j}}{(2m-2n+i)! (2n+j)!} & \left\langle \sum_{k=m}^M \sum_{l=0}^k (-1)^k \right. \\ & \left\{ (1-\nu) [I_1^{(i, j)} J_{L_1+1, L_2, 0}(0) + I_2^{(i, j)} J_{L_1, L_2+1, 0}(0)] \right. \\ & \left. + \nu I_1^{(i, j)} J_{L_1+\delta_{1\alpha}, L_2+\delta_{2\alpha}, 0}(0) \right\} \cdot C_{\alpha, k-l, l}^{(i, j)} \\ & + (-1)^{k+1-i-j} \sum_{k=m_2}^M \sum_{l=0}^k \nu I_{12}^{(1-i, 1-j)} J_{L_1+1-i, L_2+1-j, 0}(0) \\ & \left. \cdot C_{\beta, k-l, l}^{(1-i, 1-j)} \right\rangle \quad (20) \end{aligned}$$

$$(i = 0, 1, \quad j = 0, 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = 3 - \alpha,$$

$$M_1 = M - \delta_{ij} \delta_{11}, \quad M_2 = M - \delta_{ij},$$

$$m_2 = m + (-1)^{1+i} \delta_{ij}, \quad m = 0, 1, \dots, M_1,$$

$$n = 0, 1, \dots, m) \text{ となる。}$$

また、このとき以下の関係が成り立つことになる。

$$I_\alpha^{(i, j)} = \frac{(2k+i+j+1)! (2L_1+2\delta_{1\alpha})! (2L_2+2\delta_{2\alpha})!}{(k-m)! (L_1+\delta_{1\alpha})! (L_2+\delta_{2\alpha})!} \quad (21)$$

$$I_{12}^{(1-i, 1-j)} = \frac{(2k+3-i-j)! (2L_1+2-2i)! (2L_2+2-2j)!}{(k-m+1-i-j)! (L_1+1-i)! (L_2+1-j)!} \quad (22)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。式(19), (20)をマトリックスで表示すると、

$$\left\{ A_{3,m-n,n}^{(i,j)} \right\}_{N \times 1} = \left[B_{33} \right]_{N \times N} \left\{ C_{3,m-n,n}^{(i,j)} \right\}_{N \times 1} \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,m-n,n}^{(i,j)} \\ A_{2,m-n,n}^{(i,j)} \end{pmatrix}_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \begin{pmatrix} C_{1,k-l,l}^{(i,j)} \\ C_{2,k-l,l}^{(i,j)} \end{pmatrix}_{2N \times 1} \quad (24)$$

となる。ここに、 N は各応力成分 $\sigma_{3\alpha}^{(0)}$ ($\alpha=1,2,3$) に対し、式(13)で用いられた多項式の項数を示す。

また、式(19), (20)に示された $J_{p,q-r,r}$ は一般だ円積分と呼ばれ、次式で定義される⁹⁾。

$$J_{p,q-r,r}(\xi_3) = \int_{\xi_3}^{\infty} \frac{ds}{(s+a_1^2)^{p-q}(s+a_2^2)^{q-r}(s+a_3^2)^r \sqrt{Q(s)}} \quad (25)$$

ここで、 a_1, a_2, a_3 は図 2 に示すようにそれぞれだ円体の三つの軸長さを表す。円形き裂においては $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = 0$ が用いられる。

式(25)はヤコビのだ円関数¹⁰⁾を用いて表すと、次の式に書き換えることができる⁹⁾。

$$\begin{aligned} J_{p,q-r,r} &= \frac{2}{a^{2p+1}} \int_0^{u_1} (sn^{2p}u)(nd^{2q-2r}u)(nc^{2r}u)du \\ &= \frac{2}{a^{2p+1}} L_{p,q-r,r} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{ここに} \quad sn^2u_1 = a^2/(a^2 + \xi_3) \quad (27)$$

ここにヤコビのだ円関数 u は下式で表されている。

$$u = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2(1-k^2t^2)}} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで,} \quad w &= snu \\ k^2 &= (a^2 - a'^2)/a^2 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

円形き裂の場合には、 $k=0$ なので、ヤコビのだ円関数に関しては下に示されている関係式を容易に導くことができる。

$$\begin{aligned} w &= snu = \sin u, & dnu &= \sqrt{1-k^2sn^2u} = 1, \\ ndu &= \frac{1}{dnu} = 1, & cnu &= \sqrt{1-sn^2u} = \cos u, \\ ncu &= \frac{1}{cnu} = \frac{1}{\cos u} \end{aligned}$$

また、式(26)に含まれた $L_{p,q-r,r}$ に対しては、上の関係式を用いてさらに部分積分により、次のように整理することができる。

$$\begin{aligned} L_{p,q-r,r} &= \int_0^{u_1} (sn^{2p}u)(nd^{2q-2r}u)(nc^{2r}u)du \\ &= \int_0^{u_1} (\sin^{2p}u)(\cos^{-2r}u)du \\ &= \frac{1}{2r-1} \left[\sin^{2p+1}u \cos^{-2r+1}u \Big|_0^{u_1} + 2(r-p-1)L_{p,q-r,r-1} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

したがって、任意のパラメータに対して $L_{p,q-r,r}$ はそれより次数の低い $L_{p,q-r,r-1}$ と上記の漸化式により次々に求めることができる。初期値として必要な最低次の積分は

$$\begin{aligned} L_{p,q-r,-1} &= \int_0^{u_1} (\sin^{2p}u)(\cos^2u)du \\ &= \int_0^{u_1} (\sin^{2p}u - \sin^{2p+2}u)du = I_p - I_{p+1} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^{u_1} \sin^{2p}u du \\ &= \frac{1}{2p} \left[-\sin^{2p-1}u \cos u \Big|_0^{u_1} + (2p-1)I_{p-1} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

漸化式(32)に用いる初期値は

$$I_0 = \int_0^{u_1} du = u_1 \quad (33)$$

円形き裂においては、式(27)により

$$u_1 = \sin^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \xi_3}} \quad (34)$$

となる。

したがって、上記の手順を用いて、任意のパラメータについてだ円積分の閉じた形の式を求めることが可能である。

特にき裂面上($\xi_3=0$)における $L_{p,q-r,r}$ についての計算は次の式で簡単に行われる。

$$L_{0,q,r-1} = \pi/4 \quad ; \quad (p=0) \quad (35)$$

$$L_{p,q,r-1} = \frac{\pi}{4(p+1)} \frac{(2p-1)!!}{2p!!} \quad ; \quad (p>0) \quad (36)$$

ここで、 $(2p-1)!! = (2p-1) \cdot (2p-3) \cdot \dots \cdot 1$

$$2p!! = 2p \cdot (2p-2) \cdot \dots \cdot 2$$

を意味する。

2.3 円形き裂縁での応力拡大係数

与えられた荷重に対して係数 $\{A\}$ が決まり、式(17)または式(18)を解くことにより係数 $\{C\}$ を決定することができる。そこで、各モードの応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} は係数 $\{C\}$ を用いて次のように表される。

$$K_I = 8\mu\sqrt{\pi}a^{-5/2}H_3 \quad (37)$$

$$K_{II} = 8\mu\sqrt{\pi}a^{-5/2}[H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta] \quad (38)$$

$$K_{\text{III}} = 8\mu(1-\nu)\sqrt{\pi}a^{-5/2}[H_2 \cos \theta - H_1 \sin \theta] \quad (39)$$

$$H_\alpha = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k (-2)^{2k+i+j} (2k+i+j+1)! \cdot \left(\frac{\cos \theta}{a}\right)^{2k-2l+i} \left(\frac{\sin \theta}{a}\right)^{2l+j} \cdot C_{\alpha,k-l,l}^{(i,j)} \quad (40)$$

($\alpha = 1, 2, 3$)

ここに、 θ は x_1 軸より測られた角度である。これらの手順によって、き裂縁における応力拡大係数が求められる。

3. 低次荷重における単数円形き裂の解析

2章で示した解析解の正当性を見るために、あらかじめ解析解の分かっている次のような問題を取り上げた。無限体中単数円形き裂が次数の低い多項式で表される引っ張り、せん断、曲げ及びねじり荷重分布を受ける場合について考える。このとき、 $x_3 = 0$ 平面で考える。この章の最後において、直線的に変化するせん断荷重を受ける円形き裂問題に対する解析を示す。

3.1 一定引っ張り荷重を受ける場合

Fig 3 A penny-shaped crack under uniform tension

まず、図3に示されるように、 $\sigma_{33}^{(0)} = \sigma$ の様な荷重を受ける場合を考える。式(14)より係数 $\{A\}$ の値は

$$A_{3,0,0}^{(0,0)} = \sigma \quad (41)$$

次に、式(26)～(36)の評価方法に従って以下の関係を導いた。

$$J_{1,0,0}(0) = J_{0,1,0}(0) = \frac{\pi}{2a^3} \quad (42)$$

式(19)の係数 $\{A\}$ と係数 $\{C\}$ の関係より

$$A_{3,0,0}^{(0,0)} = 4\mu\{J_{1,0,0}(0) + J_{0,1,0}(0)\}C_{3,0,0}^{(0,0)} = \sigma \quad (43)$$

上式を係数 $\{C\}$ について解く。

$$C_{3,0,0}^{(0,0)} = \frac{a^3}{4\mu\pi}\sigma \quad (44)$$

また、式(37)、(40)によって応力拡大係数は係数 $\{C\}$ を用いて表すと

$$K_I = 8\mu\sqrt{\pi}a^{-5/2}C_{3,0,0}^{(0,0)} \quad (45)$$

式(44)を上式に代入すると次式が得られる。

$$K_I = \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a} \quad (46)$$

また、き裂面上にせん断荷重が作用していないので、式(13)、(20)より、 $A_{1,0,0}^{(0,0)} = A_{2,0,0}^{(0,0)} = 0$; $C_{1,0,0}^{(0,0)} = 0$; $C_{2,0,0}^{(0,0)} = 0$ となる。次に、式(40)より、 $H_1 = H_2 = 0$ となることが求められる。式(38)、(39)より

$$K_{\text{II}} = K_{\text{III}} = 0 \quad (47)$$

を求めることができる。

上記の各モードの応力拡大係数はSneddon[®]による解析解と完全に一致する。

3.2 一定せん断荷重を受ける場合

Fig 4 A penny-shaped crack under uniform shear

次に、図4に示すように、 $\sigma_{32}^{(0)} = \tau$ の様なせん断荷重を受ける場合を考える。式(13)より係数 $\{A\}$ の値は

$$A_{2,0,0}^{(0,0)} = \tau \quad (48)$$

式(20)の係数 $\{A\}$ と係数 $\{C\}$ の関係より、

$$A_{2,0,0}^{(0,0)} = 4\mu\{(1-\nu)J_{1,0,0}(0) + J_{0,1,0}(0)\}C_{2,0,0}^{(0,0)} = \tau \quad (49)$$

上式を係数 $\{C\}$ について解く。

$$C_{2,0,0}^{(0,0)} = \frac{a^3\tau}{2(2-\nu)\mu\pi} \quad (50)$$

また、応力拡大係数は係数 $\{C\}$ を用いて表すと次式となる。

$$K_{\text{II}} = 8\mu\sqrt{\pi}a^{-5/2}C_{2,0,0}^{(0,0)} \sin \theta \quad (51)$$

$$K_{\text{III}} = 8\mu(1-\nu)\sqrt{\pi}a^{-5/2}C_{2,0,0}^{(0,0)} \cos \theta \quad (52)$$

式(50)を上式に代入し、また式(40)より、 $H_1 = 0$ となるので、応力拡大係数が求めることができる。その結果を次式に示す。

$$K_I = 0 \quad (53)$$

$$K_{\text{II}} = \frac{4\tau\sqrt{a}\sin\theta}{(2-\nu)\sqrt{\pi}} \quad (54)$$

$$K_{\text{III}} = \frac{4\tau\sqrt{a}(1-\nu)\cos\theta}{(2-\nu)\sqrt{\pi}} \quad (55)$$

これらの円形き裂一般解を用いて求められたき裂縁における応力拡大係数は Kassir・Sih⁹⁾と一致することを確認した。

3.3 曲げモーメントを受ける場合

Fig 5 A penny-shaped crack under uniform bending

次に、図5に示すように、 $\sigma_{33}^{(0)} = \sigma x_1$ のような曲げ荷重を受ける場合について解析する。

式(13)により係数 $\{A\}$ の値は

$$A_{3,0,0}^{(1,0)} = \sigma \quad (56)$$

式(19)の係数 $\{A\}$ と係数 $\{C\}$ の関係によって

$$A_{3,0,0}^{(1,0)} = -2\mu[24J_{2,0,0}(0) + 8J_{1,1,0}(0)]C_{3,0,0}^{(1,0)} = \sigma \quad (57)$$

次に、式(26)～(36)により、以下の結果を求めた。

$$J_{2,0,0}(0) = J_{1,1,0}(0) = \frac{3\pi}{8a^5} \quad (58)$$

上式を式(57)に代入して係数 $\{C\}$ について解ける。

また、応力拡大係数は係数 $\{C\}$ を用いて表すと次式となる。

$$K_I = -32\mu\sqrt{\pi}a^{-7/2} \cos \theta \cdot C_{3,0,0}^{(1,0)} \quad (59)$$

結果として、次の式が得られる。

$$K_I = \frac{4\sqrt{\pi}a^3}{3\pi} \sigma \cos \theta \quad (60)$$

また、き裂面上にせん断荷重が作用していないので、式(13)、(20)より、 $A_{1,0,0}^{(0,0)} = A_{2,0,0}^{(0,0)} = 0$; $C_{1,0,0}^{(0,0)} = C_{2,0,0}^{(0,0)} = 0$ となり、さらに、式(40)より、 $H_1 = H_2 = 0$ となることが求められる、式(38)、(39)より

$$K_{\text{II}} = K_{\text{III}} = 0 \quad (61)$$

を求めることができる。

図5の問題に対する Shibuya¹⁰⁾の解を以下に示す。

$$K_I = \frac{4\sqrt{\pi}}{3\pi} k_y R^{3/2} \sin \theta' \quad (62)$$

上式の k_y 、 R 、 θ' は本論文で使用している σ 、 a 、 θ と以下

の関係をもつ。

$$k_y = \sigma \quad (63.a)$$

$$R = a \quad (63.b)$$

$$\theta' = \theta + \pi/2 \quad (63.c)$$

これらの関係式を式(62)に代入することにより、円形き裂の一般解を用いて求めた応力拡大係数の値、式(60) (61)は Shibuya¹⁰⁾の解と一致することが分かる。

3.4 ねじりを受ける場合

Fig 6 A penny-shaped crack under torsional loading

次に、図6に示すように円形き裂はねじりモーメント T ($T = \pi\tau a^3/2$)のせん断荷重を受けるときについて述べる。座標変換により $\sigma_{31}^{(0)} = -(\tau/a)x_2$ 、 $\sigma_{32}^{(0)} = (\tau/a)x_1$ の関係式が得られる。式(13)より係数 $\{A\}$ を記述して次式を得ることができる。

$$\sigma_{31}^{(0)} = A_{1,0,0}^{(0,1)}x_2, \quad \sigma_{32}^{(0)} = A_{2,0,0}^{(0,1)}x_1 \quad (64)$$

係数 $\{A\}$ 、 $\{C\}$ の関係式より、次式が求まる。

$$A_{1,0,0}^{(0,1)} = -2\mu\{[8J_{1,1,0}(0) + 24(1-\nu)J_{0,2,0}(0)]C_{1,0,0}^{(0,1)} + 8\nu J_{1,1,0}(0)C_{2,0,0}^{(0,1)}\} = -\tau/a \quad (65)$$

$$A_{2,0,0}^{(1,0)} = -2\mu \left\{ [8J_{1,1,0}(0) + 24(1-\nu)J_{2,0,0}(0)]C_{2,0,0}^{(1,0)} + 8\nu J_{1,1,0}(0)C_{1,0,0}^{(0,1)} \right\} \\ = \tau / a \quad (66)$$

以上の連立方程式で解いた係数 $\{C\}$ を式(37)～(40)に代入して応力拡大係数が求められる。

$$K_{\parallel} = 2\tau\sqrt{\pi a}^{-9/2} \frac{\sin\theta \cos\theta}{\Delta} \left\{ (1+\nu)[J_{1,1,0}(0) - J_{1,1,0}(0)] \right. \\ \left. + 3(1-\nu)[J_{0,2,0}(0) - J_{0,2,0}(0)] \right\} = 0 \quad (67)$$

$$K_{\perp} = 2(1-\nu)\tau\sqrt{\pi a}^{-9/2} \frac{(1+\nu)J_{1,1,0} + 3(1-\nu)J_{0,2,0}}{\Delta} \\ = \frac{4\tau}{3} \sqrt{\frac{a}{\pi}} = \frac{8T}{3\pi^{3/2}a^{5/2}} \quad (68)$$

$$\Delta = (1-\nu) \left\{ (1+\nu)[J_{1,1,0}(0)]^2 + 3[J_{1,1,0}(0)J_{0,2,0}(0) \right. \\ \left. + J_{1,1,0}(0)J_{2,0,0}(0)] + 9(1-\nu)J_{0,2,0}(0)J_{2,0,0}(0) \right\}$$

ここに

$$J_{0,2,0}(0) = J_{1,1,0}(0) = J_{2,0,0}(0) = \frac{3\pi}{8a^5} \quad (69)$$

き裂面上に垂直荷重が作用していないので、式(13)、(19)より、 $A_{3,0,0}^{(0,0)} = 0$; $C_{3,0,0}^{(0,0)} = 0$ となる。式(40)より、 $H_3 = 0$ であることが求められる。また、式(37)より、 $K_1 = 0$ となる。

上記の応力拡大係数は Kassir・Sir¹⁰⁾の解と完全に一致する。

以上のように挙げた例題に求められた応力拡大係数の値は文献⁶⁾とも完全に一致する。このことから、混合モード条件下の無限体中の円形き裂問題の解析解を2章に示した一般解より、容易にしかも正しく求められることが確認できた。

3.5 直線的に変化するせん断荷重を受ける場合

Fig 7 A penny-shaped crack under symmetric shear loading

最後に、円形き裂の一般解の有効性を示すため、図7に示すように、 $\sigma_{11}^{(0)} = x_1\tau$ の x_1 方向にせん断荷重が直線的に変化する場合を考える。

式(13)により係数 $\{A\}$ の値は

$$A_{1,0,0}^{(1,0)} = \tau \quad (70)$$

となる。式(19)の係数 $\{A\}$ と係数 $\{C\}$ の関係により、

$$A_{1,0,0}^{(1,0)} = -2\mu [I_1^{(1,0)}J_{2,0,0}(0) + (1-\nu)I_2^{(1,0)}J_{1,1,0}(0)]C_{1,0,0}^{(0,1)} \quad (71)$$

また、式(26)～(36)により、以下の結果を求める。

$$I_1^{(1,0)} = 24, I_2^{(1,0)} = 8 \quad (72)$$

$$J_{2,0,0}(0) = J_{1,1,0}(0) = 3\pi/(8a^5) \quad (73)$$

式(70)、(72)、(73)を式(71)に代入して係数 $\{C\}$ を求めることができる。

$$C_{1,0,0}^{(1,0)} = -\frac{a^5}{6\mu\pi(4-\nu)}\tau \quad (74)$$

上式を式(37)～(40)に代入して各モードの応力拡大係数は次式となる。

$$K_1 = 0 \quad (75)$$

$$K_{\parallel} = \frac{16\tau\sqrt{a^3}\cos^2\theta}{3(4-\nu)\sqrt{\pi}} \quad (76)$$

$$K_{\perp} = \frac{-8\tau\sqrt{a^3}(1-\nu)\sin 2\theta}{3(4-\nu)\sqrt{\pi}} \quad (77)$$

この節に示した円形き裂問題から、式(13)で表される荷重における係数 $\{A\}$ を見付けられれば、2章に示している円形き裂の一般解の解析手順に従って、容易に円形き裂の応力拡大係数を導くことができることがわかる。

4. 任意の荷重における応力拡大係数

開発したプログラムにおいては、任意のき裂面にかかる荷重分布に対して、あらかじめき裂面に設置した均整の取れた709個の補間点における応力成分を算出し、最小二乗法を用いて式(13)の多項式の係数 $\{A\}$ を決定する数値解析手法を取り入れる。

ここでは、円形き裂がき裂面上に次のような垂直荷重を受ける場合を考える。

$$\sigma_{33}^{(0)} = -P_0 x_1^2 + P_0 x_2^2 \quad (78)$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = -3P_0 x_1^2 x_2 + P_0 x_2^3 \quad (79)$$

これらの問題においての応力拡大係数の Shah・Kobayashi⁷⁾による解析解は、それぞれ式(80)、(81)である。

$$K_I = 16P_0 \cos \theta / (15\sqrt{\pi}) \quad (80)$$

$$K_I = 32P_0 \sin 3\theta / (35\sqrt{\pi}) \quad (81)$$

図8に解析結果としての円形き裂におけるモードIの応力拡大係数を示す。○は本方法による円形き裂の数値解析解である。図より両者の結果は完全に一致することが分かる。本論文に示した円形き裂の一般解とその数値計算プログラムが正確であることが分かつ

た。

5. 結言

本論文では無限体中の円形き裂の一般解の完全な形を導くことに成功した。そして、この円形き裂の一般解の正確性を検証するため、各低次(引っ張り、せん断、曲げおよびねじり)荷重条件に対して文献⁸⁾と完全に一致した閉じた解を導くことができ、また、2次および3次垂直荷重における円形き裂縁の応力拡大係数の数値計算を行った。

この円形き裂一般解の導出することにより、任意の次数の多項式で表される荷重条件における円形き裂についての数値計算ができることを示した。

謝辞:

この研究において、本研究室特別研究員の周志東氏に助言を得た。

参考文献

- (1) Vijayakumar, K. & Atluri, S.N.: An Embedded Elliptical crack, in an infinite Solid, Subject to Arbitrary Crack-Face Traction, *J. Appl. Mech.* 48(1981), 89-96.
- (2) Nishioke, T. & Atluri, S.N.: Analytical Solution for Embedded Elliptical Cracks, and Finite Element Alternating Method for Elliptical Surface Cracks, Subjected to Arbitrary Loadings, *Eng. Fract. Mech.* 17(1983), 247-268.
- (3) Nishioke, T. & Atluri, S.N.: Analysis of Surface Flow, in Pressure Vessels by a New 3-Dimensional Alternating Method, *Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol.*, 104-4 (1982), 299-307.
- (4) Stoness, R.B. & Brust, F.W. & Leis, B.N.: Mixed-mode stress intensity factors for interacting Semielliptical Surface Crack in a plate, *Eng. Fract. Mech.* 45 (1993), 357-380.
- (5) Byrd, R.F. & Friedman, M.D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag, Berlin (1971).
- (6) *Stress intensity factors handbook*, Vol.2, Pergamon Press. (1983), 609-691.
- (7) Shah R. C. & Kobayashi, A. S.: Stress Intensity Factor for an Elliptical Crack under Arbitrary/Normal Loading, *Eng. Fract. Mech.*, 3 (1971), 71-93.
- (8) Shedd, I. N.: The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid, *Proc. Roy. London, Ser. A*, Vol.187, (1943).
- (9) Kassir, M. K. & Sih, G. C.: Three-Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings, *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, Vol.33 (1966), 601-611.
- (10) Shibuya, T.: Some Mixed Boundary Value Problems for an Infinite Solid Containing a Flat Elliptical Crack, *Nihon kikai gakkai Ronbunshu, A/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, 42-364 (1976), 3718-3725.
- (11) Kassir, M. K. & Sih, G. C.: *Mechanics of Fracture 2, Three-Dimensional Crack Problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden (1975), 23-24.
- (12) C. M. Segedin: Report 67-3, Department of Aeronautics and Astronautics, Univ. of Washington, June 1967.

Fig 8 Stress intensity factor for a circular crack in an infinite solid and subjected to pressure