積層パラメータの離散誤差最小化による 複合材積層板の座屈特性最適化*

本田 真也^{*1}, 成田 吉弘^{*2}

Buckling Optimization of Laminated Composite Plates by Minimizing Errors of the Discrete Lamination Parameters

Shinya HONDA^{*3} and Yoshihiro NARITA

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Hokkaido University,
N 13 W 8 Kita-ku, Sapporo-shi, Hokkaido, 060-8628 Japan

The fiber reinforced plastics (FRP) have been utilized in various structural applications of automobile and aerospace industries because they have excellent features of high specific strength and stiffness ratios. The FRP composites are fabricated typically by stacking orthotropic layers, each of which is composed of reinforcing fibers and matrix materials. In this work, an optimum design approach is proposed to optimize buckling performance of laminated composite plates by using the lamination parameters. The approach consists of two parts: the first part is to optimize the lamination parameters by a gradient method, and the second part is to obtain the optimum lay-up design for the maximum buckling loads by minimizing the errors between the optimum parameters and the parameters for all possible discrete lay-up designs. The feedback concept is considered to ensure the global solutions. It is shown in numerical examples that the proposed approach is quite effective in determining the lay-up design for the best buckling performance.

Key Words: Optimum Design, Buckling, Composite Material, Lamination Parameter, Laminated Plates, Reinforced Plastics, Energy Method, Discrete Optimum Design

1. 結 言

高分子系繊維強化複合材料(FRP)は、高い比強度と比剛性を有しているため自動車や航空・宇宙機器などの軽量化構造材料として活用されている。そのうち FRP 積層板は、カーボン繊維など強化繊維と母材から構成される薄い異方性ラミナを積層して作られる。その配向角度により積層板全体の力学特性が変化することから、より効率的に目的を満たす構造を得るためには積層する繊維配向角度を最適に設計することが重要である。

その最適設計法には、今まで積層パラメータ¹⁾が主に使われてきた。最適な積層パラメータ値を求める際の計算法としては、勾配法を用いる方法²⁾、遺伝的アルゴリズムや応答曲面法³⁾を用いる方法など様々な計算手法が研究されてきた。これらの過去の研究では、

最適な積層パラメータ値から具体的な積層角度を求める際には、積層パラメータ領域上での幾何学的考察に基づく積層構成決定法⁴⁾や、応答曲面を応用したフラクタル分岐限定法⁵⁾が提案されている。いずれの報告においても積層構成を具体的に算出する方法に重点をおいていない。しかし実用的な設計法を確立するためには、設計上の要求に対応して詳細な繊維配向角度で積層構成を決定する方法が必要である。

本研究では FRP 積層板の臨界座屈荷重を最適化するため、勾配法により積層パラメータの最適化を行う。その後、離散的配向角の全ての組合せに対応する積層パラメータと、最適パラメータ値を効率的に比較することによって最適積層構成を決定する。また座屈荷重値の最大化以外に、任意の目標座屈荷重値を与える積層構成の設計に本設計法が適用できることを示す。なお最適化の過程における座屈荷重値(目的関数)の計算には、任意の境界条件を考慮できる Ritz 法⁶⁾を用いている。リブ付薄板殻構造など複雑な形状に対応するため有限要素法を用いて解析されている例⁷⁾もあるが、本研究では計算時間に有利な Ritz 法を採用した。

* 原稿受付 2006 年 1 月 19 日。

^{*1} 学生員、北海道大学大学院工学研究科(〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8)。

^{*2} 正員、北海道大学大学院工学研究科。

E-mail: honda-shi@mech-me.eng.hokudai.ac.jp

2. 解析方法

2・1 積層板と積層パラメータ 図1に、一方向強化繊維を有する異方性ラミナが板の中央面に関して対称に積層された長方形板を示す。板寸法を $a \times b \times h$ (h :板厚)、アスペクト比を $\alpha (=a/b)$ とし、各層が持つ弾性定数を縦弾性係数 E_L , E_T , せん断弾性係数 G_{LT} , ポアソン比 ν_{LT}, ν_{TL} (L: 繊維配向方向, T: 繊維と直交方向) とする。

本研究では対称積層に限り、積層数を $2K$ とする。板の座屈荷重値は以下に表す座屈直後のつりあい方程式の固有値として求められる。

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし w は積層板のたわみ, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は積層板の曲げ剛性で,

$$\begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 & W_1 & W_2 \\ U_1 & -W_1 & W_2 \\ U_4 & 0 & -W_2 \\ U_5 & 0 & -W_2 \\ 0 & W_3/2 & W_4 \\ 0 & W_3/2 & -W_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

となる。ここで W_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は積層パラメータ¹⁾であり, 弾性不変量 U_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) は,

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 3/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

となる。 Q_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は剛性係数で, 各層の弾性定数を用いて,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_L / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}), & Q_{22} &= E_T / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \\ Q_{12} &= \nu_{TL} Q_{11} = \nu_{LT} Q_{22}, & Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。

一軸および二軸圧縮における座屈荷重値は無次元化して以下のような座屈パラメータ λ

$$\lambda = -\frac{N_x a^2}{D_0} \quad (5)$$

Fig.1 Symmetrically laminated rectangular plate under biaxial compression

とする。ここで $D_0 = E_T h^3 / 12(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$ は基準剛性であり, 二軸圧縮比は $\beta (=N_y/N_x)$ を用いて表し, せん断荷重 N_{xy} は考慮しないものとする。一軸圧縮の際には $\beta = 0$ であり, 静水圧では $\beta = 1$ である。座屈荷重 λ は最適化問題において目的関数とされ, 最大化される。

積層パラメータは対称積層板の中央面に関して

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{24}{h^3} \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \cos 2\theta dz \\ W_2 &= \frac{24}{h^3} \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \cos 4\theta dz \\ W_3 &= \frac{24}{h^3} \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \sin 2\theta dz \\ W_4 &= \frac{24}{h^3} \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \sin 4\theta dz \end{aligned} \quad (6)$$

となる。これを

$$\xi_k = \frac{z_k}{(h/2)} \quad (7)$$

により正規化すると, 積層パラメータは,

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{k=1}^K (\xi_k^3 - \xi_{k-1}^3) \cos 2\theta_k, & W_2 &= \sum_{k=1}^K (\xi_k^3 - \xi_{k-1}^3) \cos 4\theta_k \\ W_3 &= \sum_{k=1}^K (\xi_k^3 - \xi_{k-1}^3) \sin 2\theta_k, & W_4 &= \sum_{k=1}^K (\xi_k^3 - \xi_{k-1}^3) \sin 4\theta_k \end{aligned} \quad (8)$$

となる。また, 積層パラメータは互いに独立ではなく, 4つの積層パラメータ間には三角関数の数学的条件より以下のような関係がある。

$$W_1^2 + W_3^2 \leq 1$$

$$(W_2 - W_1^2 + W_3^2)^2 + (W_4 - 2W_1W_3)^2 \leq (1 - W_1^2 - W_3^2)^2 \quad (9)$$

2・2 Ritz 法による座屈固有値解析 一般的な積層と境界条件に対して、式(1)の解析解を導くことは困難であるため、座屈荷重の計算には Ritz 法を用いる。積層板内に貯えられる全エネルギー V は、

$$V = V_s + V_L \quad (10)$$

である。 V_s は曲げによるひずみエネルギー

$$V_s = \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa_1\}^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \{\kappa_1\} dA \quad (11)$$

ただし $\{\kappa_1\}$ は曲率ベクトル

$$\{\kappa_1\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (12)$$

である。 V_L は面内荷重による仕事

$$V_L = \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa_2\}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \{\kappa_2\} dA \quad (13)$$

ただし $\{\kappa_2\}$ は勾配ベクトル

$$\{\kappa_2\} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \quad (14)$$

である。ここで座屈モードを

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (15)$$

(A_{mn} : 未定係数)

で表す。 $X_m(x)$ 、 $Y_n(y)$ は変位関数であり、平板の4辺それぞれで自由、単純支持、固定の任意の境界条件を許す境界条件インデックスを持った「べき関数」である⁶⁾。

式(15)を式(12)、(14)に代入して式(11)、(13)の積分結果を用いて平板に蓄えられる全エネルギーを算出し、その極値、

$$\frac{\partial V}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial}{\partial A_{mn}} (V_s + V_L) = 0 \quad (16)$$

$$(m=0, 1, \dots, M-1; n=0, 1, \dots, N-1)$$

を求めることで座屈パラメータ λ を算出する。

2・3 積層パラメータの最適化 対称積層板の座屈パラメータ λ を最大にする積層構成を求める最適化問題は以下のように定式化できる。

[Objective] Maximize $\lambda(W_1, W_2, W_3, W_4)$

[Design variable] W_1, W_2, W_3, W_4

[Constraints]

$$W_1^2 + W_3^2 \leq 1$$

$$(W_2 - W_1^2 + W_3^2)^2 + (W_4 - 2W_1W_3)^2 \leq (1 - W_1^2 - W_3^2)^2$$

ここで積層パラメータの最適化には、ADS プログラム⁸⁾にある修正許容方向法(一次元探索は黄金分割法)を利用する。ADS プログラムは設計変数、目的関数、制約条件、適当なパラメータ値を設定することで、目的関数を勾配法によって最小化する汎用の最適化プログラムである。

2・4 離散化近似による積層構成の探索 上述のように勾配法により最適な積層パラメータ値を求めることは比較的容易であるが、その後に対応する積層構成を決めることは簡単ではない。本研究でとり上げた対称な 2K 枚の積層の場合、外側の層の配向角から順に $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_K]_s$ と表すと、 $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ の範囲で各層 5° 刻みで考えると 1 層につき 36 通りの配向角がある。対称 8 層積層で断面半分の 4 層 $[\theta_1 / \theta_2 / \theta_3 / \theta_4]_s$ を考慮すると $36^4 = 168$ 万個の配向角の組合せとなる。この組合せ数の座屈荷重値解析を繰り返すことは実用的ではない。

このため本論文では、全ての繊維配向角度の組合せから積層パラメータを算出する。積層パラメータ自体は単純な計算で求められるため、計算時間は座屈荷重値計算に比べるとごく短い。このようにして算出した積層パラメータ $\bar{W}_i$ と勾配法を用いて算出された最適な積層パラメータ W_i とを比較することで最適な積層構成を近似する。これらを比較する際には以下のような二乗和を用いる。

$$E = (W_1 - \bar{W}_1)^2 + (W_2 - \bar{W}_2)^2 + (W_3 - \bar{W}_3)^2 + (W_4 - \bar{W}_4)^2 \quad (17)$$

これから積層構成の近似解を求めるには E の値を小さい順に整列する必要がある。この膨大な数のデータを整列するため、ソート法が計算コストに最も大きく影響する。そこで、本研究では多数のデータ処理に強いクイックソート法⁹⁾を用いることで著しく計算時間を短縮した。

Table 1 Optimum lamination parameters for square plates with various boundary conditions under uniaxial compression; (a) Results obtained from an initial design point outside the boundary, (b) Results from a point inside the boundary, ($\alpha=1$, $\beta=0$)

	(a) $[W_1, W_2, W_3, W_4] = [0.1, 0.9, 0.1, 0.9]$				(b) $[W_1, W_2, W_3, W_4] = [0.0, 0.1, 0.0, 0.1]$			
B.C	W_1	W_2	W_3	W_4	W_1	W_2	W_3	W_4
SFSF	0.991	0.995	0.030	0.069	0.990	0.994	0.026	0.065
SFSS	0.986	0.943	0.046	0.090	0.986	0.946	0.005	0.006
SFSC	0.986	0.956	0.035	0.047	0.990	0.960	-0.002	0.000
SSSS	0.052	-0.996	0.050	-0.031	-0.005	-1.001	-0.002	0.035
SSSC	-0.148	-0.957	0.037	-0.031	-0.212	-0.007	0.001	0.097
SCSC	0.109	-0.730	0.089	-0.632	0.124	0.082	-0.003	0.099

ここで積層パラメータの最適化計算の近似差により生じる最適解(繊維配向角度)の誤差を回避して、精度を向上するプロセスを加えた。このため E の大きさによって整理された積層構成のうち最小のものから数百組を、固有値計算を行うプログラムに適当数フィードバックする。すなわち数百組の積層構成より改めて座屈荷重値を計算し、得られた座屈荷重値を大きい順に整理し直すというフィードバック的なプロセスを加えた。

2・5 分割近似 本方法では積層数を増した場合に、組合せ数の累乗的な増加が計算機の容量を超える場合が考えられる。現状の PC では 15° 刻み(1層につき 12 種類の配向角)を考えると対称 12 層(上半分の 6 層のみを考慮して、 $12^\circ \approx 300$ 万個)が容量の面から限界である。そのため対称 14 層以上の積層構成を近似するには複数段階に分けて最適化を行う。

具体的には、対称 16 層の計算(対称なので片側 8 層のみ考慮)においては、まず一段階目として最内層とその一つ外側の層の角度(θ_7, θ_8)を 0° で固定し、その他の外側 6 層を分割しない場合と同様に固有値計算し、 E の小さい 20 組を次の段階に持ち越す。二段階目では持ち越された 20 組それぞれに対して残りの 2 層の計算つまり 20×12^2 回の近似計算を行うことで最適解を求める。

3. 数 値 計 算 例 お よ び 考 察

3・1 初期設計の影響 本研究では弾性定数 $E_L=138\text{GPa}$, $E_T=8.96\text{GPa}$, $G_{LT}=7.1\text{GPa}$, $\nu_{LT}=0.30$ を持つ CFRP(カーボン繊維強化プラスチック)に関して計算例を示す。積層数は対称 8 層 $[\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4]_s$ とする。変位関数中の項数は $m \times n=10 \times 10$ とし、境界条件は、自由辺を F, 単純支持辺を S, 固定辺を C で表し、長方形の左辺から順に反時計回りに表した⁽⁶⁾。

はじめに積層パラメータ最適化において設計変数 W_1, W_2, W_3, W_4 の初期値の影響を調べる。ここでアスペクト比 $\alpha=1$ の正方形板に関して一軸圧縮(荷重比 $\beta=0$)とした。フィードバック数は基本的に E の値の小さいものから順に 500 とした。500 では不足と思われる境界条件に関しては 1000, 1500 とフィードバック数を増やし、新たに 500 を追加計算しても最大座屈荷重値が現れなくなったところで最適化計算が収束したと判断した。

表 1 に最適積層パラメータの計算例として、各境界条件を持つ正方形板が一軸圧縮を受ける($\alpha=1$, $\beta=0$)場合において、ADS プログラムによる勾配法を用いて求めた最適積層パラメータ値を示す。初期設計(ID)を(a)では積層パラメータの存在領域の外側 $[W_1, W_2, W_3, W_4]=[0.1, 0.9, 0.1, 0.9]$ から、(b)では存在領域の内部 $[0.0, 0.1, 0.0, 0.1]$ から探索を開始している。全周単純支持(SSSS)で正方形板における最適積層パラメータ値は $[W_1, W_2, W_3, W_4]=[0.000, -1.000, 0.000, 0.000]$ であるが⁽²⁾、表中の両最適値と比較すると、小数点以下第二位から差が生じているため、フィードバックの必要性を認識できる。

表 2 は境界の内外 2 通りの初期設計で求めた最適積層パラメータから離散化近似法でそれぞれ求めた積層構成とそのときの最適な座屈パラメータ(λ_{opt})を示している。文献⁽²⁾では初期設計の位置に無関係に積層パラメータは収束すると述べられているが、SSSC, SCSC の条件では算出された両 λ_{opt} 値の間に大きな差が見られ、SFCS, SFCC, SSCS, CCCC ではわずかな差が生じている。両初期設計において λ_{opt} の値が等しい境界条件でも表中の r の値によって勾配法で求められた積層パラメータの精度が判断できる。 r はフィードバック以前に式(17)より求められる E 値の小さい順に積層構成を整理した際の順位を示すものである。 r が小さいということは、式(17)で計算された E 値が小

Table 2 Maximum buckling parameters and optimum lay-ups for symmetric 8-layer square plates under uniaxial compression calculated from two Initial Designs (ID) ((a) : outside the boundary and (b) : inside the boundary), ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)

ID	(a) $[W_1, W_2, W_3, W_4] = [0.1, 0.9, 0.1, 0.9]$			(b) $[W_1, W_2, W_3, W_4] = [0.0, 0.1, 0.0, 0.1]$		
B.C	λ_{opt}	Optimum Lay-ups	r	λ_{opt}	Optimum Lay-ups	r
1) SXSX plate (X = F, S, C)						
SFSF	151.7	[0/0/0/0] _s	230	151.7	[0/0/0/0] _s	207
SFSS	160.8	[0/0/0/0] _s	1106	160.8	[0/0/0/0] _s	239
SFSC	164.4	[0/0/0/0] _s	366	164.4	[0/0/0/0] _s	71
SSSS	321.0	[45/-45/-45/-45] _s	24	321.0	[45/-45/-45/-45] _s	24
SSSC	433.2	[50/-50/-45/-40] _s	23	345.2	[-70/55/-10/5] _s	74
SCSC	534.3	[50/-30/-30/-45] _s	13	441.6	[10/-50/70/85] _s	210
2) SXCX plate (X = F, S, C)						
SFCF	310.6	[0/0/0/0] _s	7	310.6	[0/0/0/0] _s	26
SFCS	321.5	[5/0/5/0] _s	27	321.1	[5/5/5/0] _s	44
SFCC	325.6	[5/0/5/5] _s	119	325.4	[5/5/5/0] _s	57
SSCS	381.2	[-35/30/35/35] _s	28	383.3	[30/-30/-35/-35] _s	147
SSCC	446.6	[45/-40/-45/-40] _s	33	446.6	[45/-40/-45/-40] _s	186
SCCC	544.0	[45/-45/-40/-40] _s	13	544.0	[45/-45/-40/-40] _s	62
3) CXCX plate (X = F, S, C)						
CFCF	607.5	[0/0/0/0] _s	86	607.5	[0/0/0/0] _s	58
CFCS	616.6	[0/0/0/0] _s	116	616.6	[0/0/0/0] _s	17
CFCC	619.6	[0/0/0/0] _s	74	619.6	[0/0/0/0] _s	14
CSCS	652.5	[0/0/0/0] _s	1241	652.5	[0/0/0/0] _s	489
CSCC	668.0	[0/0/0/0] _s	883	668.0	[0/0/0/0] _s	779
CCCC	688.4	[0/0/-85/5] _s	180	690.9	[0/0/0/0] _s	100

さく、勾配法によって求められた最適積層パラメータ値がより大域的な最適解に近いことになる。(a)の初期設計では SSSC, SCSC, SFCS, SFCC の 4 種類の境界条件で(b)よりも λ_{opt} 値が大きく評価できているが、(b)の初期設計では SFSF, SFSS をはじめ 9 種類の境界条件において λ_{opt} 値は同じだが r の値が小さくなっている。

以上の結果から、(a)のように積層パラメータの境界外の初期設計から最適化を行うとより大きな λ_{opt} 値を与える境界条件が多く、境界内(b)を初期設計に最適化を行うとより精度の高い積層パラメータ値を与える境界条件が多い傾向にあることがわかった。

3・2 離散化近似法の精度の検証 本方法の精度を層別最適化(LO)法⁴⁰⁾と比較することで検証する。LO 法は積層パラメータを用いず、「積層板では外側の層ほどより曲げ剛性に大きな影響を及ぼす」という物理的事実に基づき、最外層から順々に配向角を決定していく方法である。比較に用いる本方法の数値は初期設計によらずより大きな λ_{opt} を与えるものを採用した。 $\alpha = 1$, 2 の正方形板と長方形板に関して荷重比を正方形板では $\beta = 0, 0.5, 1$, 長方形板では $\beta = 0, 1$ の計 5 通

りの方法で比較を行った。 $\beta = 0$ の正方形板($\alpha = 1$)では一軸圧縮のため境界条件を 3 種(SXSX, SXCX, CXCX)の対辺の支持(固定)として、直交する対辺には 6 種の境界条件の組合せ(X=F, S, C)で最適化を行い、表 3 に結果を示す。その他の条件($\alpha = 1$, $\beta = 0.5$), ($\alpha = 1$, $\beta = 1$)は表 4 に、($\alpha = 2$, $\beta = 0$), ($\alpha = 2$, $\beta = 1$)は表 5 に結果を示す。表 4, 5 ではそれぞれ SSSS, SSSC, SCSC, SSCC, SCCC, CCCC の境界条件で最適化を行った。本方法による座屈パラメータは λ_{Dis} , LO 法によるものは λ_{LO} と表し、大きい値を示す方に下線を引いた。

表 3 より正方形板、一軸圧縮では SSSC, SSCC, SCCC の 3 種の境界条件で、 λ_{Dis} 値が大きく評価でき、SCSC, SSCS では λ_{LO} が大きく評価できている。その他の境界条件では等しい値であり積層構成も全く同じである。表 4 より、正方形板、二軸圧縮では $\beta = 0.5, 1$ とともに SCSC, SCCC では λ_{Dis} , SSSC では λ_{LO} の方が大きく評価できていることがわかる。表 5 より長方形板においては一軸圧縮のとき SSSC, CCCC において λ_{Dis} が、SCCC では λ_{LO} が大きく評価されている。長方形板、二軸圧縮の際は全ての境界条件で λ_{Dis}

Table 3 Maximum buckling parameters and optimum lay-ups for symmetric 8-layer square plates under uniaxial compression calculated by the present method (λ_{Dis}) and LO method (λ_{LO}), ($\alpha = 1, \beta = 0$)

B.C	λ_{Dis}	Optimum Lay-ups	ID	λ_{LO}	Optimum Lay-ups
1) SXSC plate (X = F, S, C)					
SFSF	151.7	[0/0/0/0] _s	b	151.7	[0/0/0/0] _s
SFSS	160.8	[0/0/0/0] _s	b	160.8	[0/0/0/0] _s
SFSC	164.4	[0/0/0/0] _s	b	164.4	[0/0/0/0] _s
SSSS	321.0	[45/-45/-45/-45] _s	b	321.0	[45/-45/-45/-45] _s
SSSC	433.2	[50/-50/-45/-40] _s	a	428.9	[45/-50/-55/-55] _s
SCSC	534.3	[50/-30/-30/-45] _s	a	<u>539.1</u>	<u>[40/-45/-45/-15]_s</u>
2) SCXC plate (X = F, S, C)					
SFCF	310.6	[0/0/0/0] _s	a	310.6	[0/0/0/0] _s
SFCS	321.5	[5/0/5/0] _s	a	321.5	[5/0/5/0] _s
SFCC	325.6	[5/0/5/5] _s	a	325.6	[5/0/5/5] _s
SSCS	383.3	[30/-30/-35/-35] _s	b	<u>383.7</u>	<u>[-30/35/35/35]_s</u>
SSCC	<u>446.6</u>	<u>[45/-40/-45/-40]_s</u>	a	442.7	[-40/45/40/45] _s
SCCC	544.0	<u>[45/-45/-40/-40]_s</u>	a	501.2	[0/-85/70/-65] _s
3) CXSC plate (X = F, S, C)					
CFCF	607.5	[0/0/0/0] _s	b	607.5	[0/0/0/0] _s
CFCS	616.6	[0/0/0/0] _s	b	616.6	[0/0/0/0] _s
CFCC	619.6	[0/0/0/0] _s	b	619.6	[0/0/0/0] _s
CSCS	652.5	[0/0/0/0] _s	b	652.5	[0/0/0/0] _s
CSCC	668.0	[0/0/0/0] _s	b	668.0	[0/0/0/0] _s
CCCC	690.9	[0/0/0/0] _s	b	690.9	[0/0/0/0] _s

Table 4 Maximum buckling parameters and optimum lay-ups for symmetric 8-layer square plates under biaxial compression calculated by the present method (λ_{Dis}) and LO method (λ_{LO}), ($\alpha = 1$)

B.C	λ_{Dis}	Optimum Lay-ups	ID	λ_{LO}	Optimum Lay-ups
$\beta = 0.5$					
SSSS	214.0	[45/-45/-45/-45] _s	b	214.0	[45/-45/-45/-45] _s
SSSC	284.8	[-55/55/55/55] _s	a	<u>286.4</u>	<u>[60/-55/-55/-55]_s</u>
SCSC	<u>406.4</u>	<u>[60/-45/-45/-40]_s</u>	a	392.3	[70/-25/-45/-60] _s
SSCC	309.8	[45/-45/-45/-45] _s	a	309.8	[45/-45/-45/-45] _s
SCCC	<u>407.8</u>	<u>[-55/50/55/55]_s</u>	b	346.3	[0/90/90/90] _s
CCCC	464.3	[0/90/0/0] _s	a	464.3	[0/90/0/0] _s
$\beta = 1$					
SSSS	160.5	[-45/45/45/45] _s	b	160.5	[45/-45/-45/-45] _s
SSSC	209.2	[-60/60/55/55] _s	b	<u>209.4</u>	<u>[60/-55/-55/-55]_s</u>
SCSC	<u>320.9</u>	<u>[65/-55/-55/-50]_s</u>	a	313.5	[75/-40/-55/-65] _s
SSCC	233.4	[45/-45/-45/-45] _s	b	233.4	[45/-45/-45/-45] _s
SCCC	<u>319.8</u>	<u>[60/-60/-60/-55]_s</u>	a	315.8	[-75/50/-40/45] _s
CCCC	348.0	[0/90/90/90] _s	a	348.0	[0/90/90/90] _s

の方が大きく評価できている。両方法における座屈パラメータの差異は本方法を基準に考えると、大きいもので正方形板、二軸圧縮($\beta = 0.5$)のSCCCで+15%であり、小さくても正方形板、一軸圧縮のSCSCで-0.9%である。

以上の結果より本方法はLO法と比較しても良く一致し、十分信用に足る精度であることがわかり、座屈

荷重を最大化するための有効な最適化手法の一つであると言える。

表6に対称16積層に対して、2・5で説明した分割法を用いて最適化した結果を示す。二軸圧縮($\beta = 1$)の正方形板($\alpha = 1$)と長方形板($\alpha = 2$)に関して、それぞれ境界条件SSSS, SSSC, SCSC, SSCC, SCCC, CCCCの6通りで計算した。繊維配向角の刻みは15°

Table 5 Maximum buckling parameters and optimum lay-ups for symmetric 8-layer rectangular plates under uniaxial and biaxial compression calculated by the present method (λ_{Dis}) and LO method (λ_{LO}), ($\alpha = 2$)

B.C	λ_{Dis}	Optimum Lay-ups	ID	λ_{LO}	Optimum Lay-ups
$\beta = 0$					
SSSS	1282	[45/45/45/45] _s	b	1282	[45/-45/-45/-45] _s
SSSC	1650	[45/-40/-45/-50] _s	a	1649	[40/-45/-50/-55] _s
SCSC	1957	[-50/50/45/45] _s	b	1957	[-50/45/45/45] _s
SSCC	1671	[45/-45/-45/-45] _s	a	1671	[45/-45/-45/-45] _s
SCCC	2001	[-45/45/40/40] _s	b	2002	[-40/45/45/45] _s
CCCC	2150	[40/-40/-45/-55] _s	a	2002	[0/90/-85/60] _s
$\beta = 1$					
SSSS	489.0	[75/-65/-70/-75] _s	a	473.7	[85/-50/75/85] _s
SSSC	832.0	[65/-60/-65/-65] _s	a	830.0	[70/-60/-60/-60] _s
SCSC	1244	[-60/55/60/55] _s	b	1218	[-70/45/45/-45] _s
SSCC	840.6	[65/-65/-60/-60] _s	a	822.5	[75/-55/50/-50] _s
SCCC	1248	[-60/55/60/60] _s	b	1209	[-75/45/-40/45] _s
CCCC	1276	[60/-60/-60/-60] _s	a	1234	[85/-30/55/60] _s

Table 6 Maximum buckling parameters and optimum lay-ups for symmetric 16-layer square and rectangular plates under biaxial compression ($\beta = 1$)

B.C	λ_{opt}	Optimum Lay-ups
$\alpha = 1$		
SSSS	161.9	[45/-45/-45/45/-45/45/45/-45] _s
SSSC	210.5	[60/-60/-60/60/-60/60/60/-60] _s
SCSC	317.4	[60/-60/-45/75/75/60/90/90] _s
SSCC	234.5	[45/-45/45/-45/-45/45/45/-45] _s
SCCC	321.8	[-60/60/-60/60/60/75/60/60] _s
CCCC	348.3	[90/0/0/90/0/90/0/90] _s
$\alpha = 2$		
SSSS	487.7	[75/-75/75/-60/-60/60/90/-75] _s
SSSC	833.2	[60/-60/75/-60/-75/-60/60/-60] _s
SCSC	1250	[-60/60/60/-60/45/-45/-45/-45] _s
SSCC	838.7	[-60/60/75/-75/60/60/-75/-60] _s
SCCC	1257	[60/-60/-60/60/-60/45/60/-60] _s
CCCC	1288	[60/-60/-60/60/-60/75/60/60] _s

Table 7 Target buckling parameters and lay-ups for symmetric 8-layer square plates under uniaxial and biaxial compression ($\alpha = 1$)

B.C	λ_{tar}	λ_{opt}	Optimum Lay-ups
$\beta = 0$			
SSSS	315.0	315.1	[45/-45/-60/-75] _s
SCSC	300.0	299.9	[80/-65/-70/60] _s
CCCC	320.0	320.0	[-85/70/-65/90] _s
$\beta = 1$			
SSSS	140.0	140.0	[45/-25/-85/-80] _s
SCSC	280.0	282.6	[50/-55/-50/10] _s
CCCC	310.0	310.0	[50/-20/45/35] _s

とする。その結果、対称 8 積層と同様な配向角が現れていることがわかる。

3・3 座屈モード 図 2 に一軸圧縮を受ける正方形板のそれぞれの境界条件における座屈モードを示す。ここで板は本論文で求められた最適な積層構成を持っている。図中の×印は最大変位点を表し、細線は変位 0 と最大変位間を 10 等分した際の等変位線である。全周単純支持(SSSS)では腹が板中央部にある山が一つのモードとなっている。片側の圧縮壁(圧縮荷重を与える辺)を固定した境界条件(SSSC)では山が固定辺から離れる方向に移動しており、圧縮壁ではない辺を固定した際(SSSC)は山が潰れながら固定辺から離れてい

る。固定辺を二つに増やす(SSCC)と山は単純支持辺側つまり左下方に寄り、三辺を固定する(SCCC)とさらに単純支持辺側に寄っている。また全周を固定すると山は全体的に中央に移動している。

図 3 は代表的な積層構成を持つ一軸圧縮を受ける正方形板(SSSS)の座屈モードを示している。一方向強化板[0/0/0/0]_sにおいては最適な積層構成とモード図に違いは見られないが、アングルプライの[30/-30/30/-30]_s、[45/-45/45/-45]_sではモードの山が斜めから押し潰された形になっていることがわかる。これは外層の配向角度がより座屈荷重値に大きな影響を与えるため、最外層角の影響がモード形状に強く現れ、繊維の配向方向に伸びた形の山になっているためである。一方、最適積層 [45/-45/-45/-45]_sのモード形(図 2)が押し潰された山とならないのは最外層の影響を内側三層が打ち消しているためと考えられる。

Fig.2 Buckling modes of symmetric 8-layer square plates with various boundary conditions under uniaxial compression

Fig.3 Buckling modes of symmetric 8-layer square plates with simply-supported (SSSS) edges under uniaxial compression

3・4 任意の座屈荷重値の設計 任意の座屈荷重値を与える積層構成を設計する。このため物理的に意味のある範囲内で目標となる座屈荷重値(λ_{tar})を設定し、最適座屈荷重値(λ_{opt})を λ_{tar} に最も近くなるように設計する。目的関数を、

$$OBJ = (\lambda_{tar} - \lambda_{opt})^2 \quad (18)$$

とすることで、最適な積層パラメータ値を算出し、フィードバックの際には $(\lambda_{tar} - \lambda_{opt})^2$ の値を小さい順に整列し直す。正方形板で一軸圧縮と二軸圧縮($\beta = 0, 1$)において境界条件をそれぞれ SSSS, SSCS, CCCC で計算した結果を表 7 に示す。いずれの境界条件でも最適化された λ_{opt} 値が目標座屈荷重値 λ_{tar} に非常に近い値を示している。つまり本方法で目標固有値を与える積層構成を実現することが可能であることを示した。

4. 結 言

本研究では、「勾配法による最適化された積層パラメータ値」と「離散的配向角の全組合せから求めた積層パラメータ値」を比較することで、詳細な積層構成を求める最適化方法を提案した。多数の解の整列には、簡単なアルゴリズムで効率的なクイックソートを用いて計算コストを低減した。

フィードバック最適化により本方法が既存の方法と同程度の精度で座屈固有値の最適化を行えることを示した。座屈モードを示すことにより境界条件が板の座屈に及ぼす影響を可視化した。

多数積層の板に関しては分割して最適化を行った。また目的関数の定義を変化させることで、本方法は物理的に可能な範囲内の任意の目標座屈固有値を与える積層構成を設計することが可能であることを示した。

謝 辞

本研究は、平成 16 年度科学研究費補助金基盤研究(B)の助成を受けて実施されたものであり、ここに厚く謝意を表す。

参 考 文 献

- (1) Gurdal, Z., Haftka, R. and Hajela, P. : Design and Optimization of Laminated Composite Materials, John Wiley & Sons (1999)
- (2) Fukunaga, H., Sekine, H., Sato, M. and Iino, A. : Buckling design of symmetrically laminated plates using lamination parameters *Journal of Sound and Vibration* (1995) 171, 219-229
- (3) Todoroki, A. and Sasaki, M. : Stacking sequence optimizations using GA with zoomed response surface on lamination parameters *Journal of Japan Society of Composite Material* (2000) 26, 187-197 (in Japanese)
- (4) Fukunaga, H. and Sekine, H. : Stiffness design method of symmetric laminates using lamination parameters *ALAA J.*, 30-11 (1992), 2791-2793
- (5) Todoroki, A. and Hirano, Y. : Stacking Sequence Optimization of Composite to Improve Panel Flutter at Supersonic Flow Using Fractal Branch and Bound Method *Journal of Japan Society of Mechanical Engineers* (2003) 69, 239-244
- (6) Narita, Y. : An analytical method for vibration of laminated composite rectangular plates having arbitrary combinations of boundary conditions *Journal of Japan Society of Composite Material* (1992) 18, 113-120
- (7) Yamazaki, K. and Sengokudani, K. : Two-Level Optimization Technique of Laminated Composite Plates Using Genetic Algorithm (Maximizing Design of Buckling Strength) *Journal of Japan Society of Mechanical Engineers* (1996) 62, 1278-1283
- (8) Vanderplaats, G. N. and Sugimoto, H. : A general-purpose optimization program for engineering design *Computers & Structures* (1986) 24, 13-21
- (9) Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. : Numerical Recipes in Fortran 77, Cambridge University Press (1992)
- (10) Narita, Y. and Turvey, G. J. : Maximizing the buckling loads of symmetrically laminated composite rectangular plates using a layerwise optimization approach *J. Mechanical Engineering Science* (2004) 218, 681-691