垂直き裂を有する圧電厚板の電気熱弾性応答*

上 田 整^{*1}, 谷 吉 郎^{*2}Thermoelectroelastic Response of a Piezoelectric Material Strip
with a Normal CrackSei UEDA^{*3} and Yoshiro TANI^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

This study investigates the electromechanical fracture behavior of a normal crack in a piezoelectric material strip subjected to a uniform heat flow far away from the crack region. The crack faces are supposed to be insulated thermally and electrically. By using the Fourier transform, the thermal and electromechanical problems are reduced to singular integral equations, respectively, which are solved numerically. Both the cases of an internal crack and an edge crack are studied. Numerical calculations are carried out, and detailed results are presented to illustrate the influence of the crack location and length on the temperature distribution and the stress intensity factors.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Thermal Stress, Stress Intensity Factor, Piezoelectric Ceramic, Uniform Heat Flux, Integral Transform

1. 結 言

圧電材料は単体でもセンサ, アクチュエータ, デバイスなどとして数多く用いられ, 現代の科学技術を支えている重要な材料となっている。また, これらの圧電材料と構造材料を組み合わせることで, 熱的環境下における複合材料の変形制御を可能とする知的圧電複合材料システムを実現できる⁽¹⁾。そのため, 圧電材料を用いた知的材料システムの最適設計を目的とした研究例が報告されている^{(2)~(6)}。

一方, 熱的環境下にある圧電材料を対象とした電気破壊力学に関する研究も進められている。しかしながら, 比較的解析が容易なき裂が熱流と平行に存在する解析モデルを対象とした解析結果は多いが^{(7)~(10)}, 実際上重要と考えられるき裂による温度場の擾乱を考慮した問題を扱った解析例は比較的少ないのが現状である^{(11)~(13)}。このため, 最近著者らは, 半無限圧電材料の自由表面に垂直に存在するき裂を対象とした電気熱弾性破壊力学解析を行っている⁽¹⁴⁾。

本報では, 前報⁽¹⁴⁾を拡張し, 一様熱流が作用する圧電厚板を考え, 自由表面に垂直に存在するき裂先端の特異熱応力を理論解析した。温度場および電気熱弾性

場の解析には, Fourier 変換法を用い, 問題の解を特異積分方程式の解に導いて解く方法を採用した^{(15),(16)}。また, Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁷⁾を用いて特異積分方程式を数値解析し, 温度分布および内部・縁き裂先端の熱応力拡大係数に及ぼすき裂位置およびき裂長さの影響を明らかにした。

2. 問題の設定と基礎式

Fig.1 Geometry of the crack problem in a piezoelectric material strip.

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において, $0 \leq x \leq h$ の領域を占める圧電厚板を考え, $z = 0$ 面上に長さ $2c = b - a$ ($0 \leq a < b \leq h$)のき裂が自由表面に対して垂直に存在するものとし, 平面ひずみを仮定する。ま

* 原稿受付 2006 年 4 月 3 日。

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部 (〒535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1)。

^{*2} 学生員, 大阪工業大学大学院工学研究科。

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

た、圧電厚板の分極方向を z 軸方向とし、 z 軸の負の向きに一樣熱流 q_0 が作用するものとする。なお、弾性定数、圧電定数、誘電定数、温度応力係数、熱伝導率および焦電定数をそれぞれ c_{jk} , e_{jk} , ε_{jj} , λ_{jj} ($j, k = 1, 2, 3$), κ_x , κ_z および p_z で表し、下付添字 x, y, z で座標軸方向を示すものとする。

材料の温度を $T(x, z)$ 、静電ポテンシャルを $\phi(x, z)$ 、変位ベクトルの成分を $u_x(x, z)$, $u_z(x, z)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{xx}(x, z)$, $\sigma_{zz}(x, z)$, $\sigma_{zx}(x, z)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_x(x, z)$, $D_z(x, z)$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \lambda_{11} T \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \lambda_{33} T \\ \sigma_{zx} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= e_{15} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ D_z &= e_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} + p_z T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

直交異方性を対象とした熱伝導方程式は次式で表される。

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z$ である。また、変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \\ + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} &= \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \\ c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \\ + e_{15} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= \lambda_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \\ e_{15} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \\ - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= -p_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

問題の対称性を考慮すると、温度場・電気熱弾性場に関する境界条件式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \partial T(x, 0) / \partial z &= 0 & (a < x < b) \\ T(x, 0) &= 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial T(0, z) / \partial x &= 0 & (0 \leq z < \infty) \\ \partial T(h, z) / \partial x &= 0 & (0 \leq z < \infty) \\ \partial T(x, \infty) / \partial z &= -q_0 / \kappa_z & (0 \leq x \leq h) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx}(x, 0) &= 0 & (a < x < b) \\ u_x(x, 0) &= 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0) &= 0 & (0 \leq x \leq h) \\ D_z(x, 0) &= 0 & (0 \leq x \leq h) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(0, z) &= 0 & (0 \leq z < \infty) \\ \sigma_{zx}(0, z) &= 0 & (0 \leq z < \infty) \\ D_x(0, z) &= 0 & (0 \leq z < \infty) \\ \sigma_{xx}(h, z) &= 0 & (0 \leq z < \infty) \\ \sigma_{zx}(h, z) &= 0 & (0 \leq z < \infty) \\ D_x(h, z) &= 0 & (0 \leq z < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3. 温度場解析

式 (3) に Fourier 変換法を適用し、温度場の一般解を求めると⁽¹⁵⁾

$$T(x, z) = T^{(1)}(z) + T^{(2)}(x, z) \quad (10)$$

ここに、 $T^{(1)}(z)$ は非擾乱温度場、 $T^{(2)}(x, z)$ は擾乱温度場を示し、それぞれ次式となる。

$$T^{(1)}(z) = \frac{q_0}{\kappa_z} z \quad (11)$$

$$T^{(2)}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_0(s) \exp(-|s|\kappa z) \exp(-isx) ds \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} D_j(s) \exp(s\kappa_j x) \sin(sz) ds \quad (12)$$

ここで、 $D_j(s)$ ($j = 0, 1, 2$) は境界条件式より決定される未知関数であり、 $\kappa_1 = -1/\kappa$, $\kappa_2 = 1/\kappa$ である。

新しい未知関数 $G_0(x)$ を次式のように導入する⁽¹⁶⁾。

$$G_0(x) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} T(x, 0) & (a < x < b) \\ 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h) \end{cases} \quad (13)$$

従って、境界条件式 (6) を考慮すると、混合境界条件式 (5) の第 1 式より、未知関数 $G_0(x)$ に関する特異積分方程式が次のように得られる。

$$\frac{\kappa}{2h} \int_a^b G_0(t) \left[\cot \left\{ \frac{(t-x)\pi}{2h} \right\} + \tan \left\{ \frac{(h-t-x)\pi}{2h} \right\} \right] dt \\ = \frac{q_0}{\kappa_z} \quad (14)$$

また、 $a > 0$ のとき、混合境界条件式 (5) の第 2 式より、補足の条件式が次式のように得られる。

$$\int_a^b G_0(t) dt = 0 \quad (15)$$

特異積分方程式 (14) および補足の条件式 (15) を数値解析し, $G_0(t)$ を求める. 得られた $G_0(t)$ を用いると擾乱温度場 $T^{(2)}(x, z)$ が以下のように決定される.

$$T^{(2)}(x, z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left\{ \arctan\left(\frac{t-x}{\kappa_z}\right) - \arctan\left(\frac{\kappa_z}{t+x}\right) \right\} G_0(t) dt \\ \frac{1}{2} \int_a^b \frac{t-x}{|t-x|} G_0(t) dt \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (z > 0) \\ (z = 0) \end{array} \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s} \frac{\cosh(sx/\kappa)}{\sinh(sx/\kappa)} \exp(-sh/\kappa) \sin(sz) ds \\ \times \int_a^b \sinh(st/\kappa) G_0(t) dt \quad (16)$$

4. 電気熱弾性場解析

特異電気熱弾性場は擾乱温度場 $T^{(2)}(x, z)$ のみに起因することを考慮し, 変位ベクトルの成分 $u_x(x, z)$, $u_z(x, z)$ および静電ポテンシャル $\phi(x, z)$ を次式で表す.

$$\left. \begin{array}{l} u_x(x, z) = u_x^{(1)}(x, z) + u_x^{(2)}(x, z) \\ u_z(x, z) = u_z^{(1)}(x, z) + u_z^{(2)}(x, z) \\ \phi(x, z) = \phi^{(1)}(x, z) + \phi^{(2)}(x, z) \end{array} \right\} \quad (17)$$

ここに, 上付添字 (1) は式 (4) における $T(x, z)$ を $T^{(2)}(x, z)$ とした場合の特解, 上付添字 (2) は式 (4) において温度項を零とした同次方程式の一般解を示す.

熱弾性変位ポテンシャルを用いると, 特解が次のように求まる.

$$u_x^{(1)}(x, z) = \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{L_0(s)}{s^2} \exp(-|s|\kappa z) \exp(-isx) ds \\ + \frac{2\kappa m}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s^2} \{ L_1(s) \exp(-sx/\kappa) \\ + 2L_2(s) \sinh(sx/\kappa) \} \sin(sz) ds \quad (18)$$

$$u_z^{(1)}(x, z) = -i \frac{\kappa k m}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{L_0(s)}{s|s|} \exp(-|s|\kappa z) \exp(-isx) ds \\ - \frac{2\kappa^2 k m}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s^2} \{ L_1(s) \exp(-sx/\kappa) \\ - 2L_2(s) \cosh(sx/\kappa) \} \cos(sz) ds \quad (19)$$

$$\phi^{(1)}(x, z) = i \frac{\kappa n}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{L_0(s)}{s|s|} \exp(-|s|\kappa z) \exp(-isx) ds \\ + \frac{2\kappa^2 n}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s^2} \{ L_1(s) \exp(-sx/\kappa) \\ - 2L_2(s) \cosh(sx/\kappa) \} \cos(sz) ds \quad (20)$$

ここに, m, k, n は前報⁽¹⁴⁾ の付録 1 に示す材料定数のみに依存する定数であり, $L_i(s)$ ($i = 0, 1, 2$) は次式で与えられる.

$$\left. \begin{array}{l} L_0(s) = \int_a^b G_0(t) \exp(ist) dt \\ L_1(s) = \frac{1}{2} \int_a^b G_0(t) \exp(-st/\kappa) dt \\ L_2(s) = \frac{1}{2} \frac{\exp(-sh/\kappa)}{\sinh(sh/\kappa)} \int_a^b G_0(t) \sinh(st/\kappa) dt \end{array} \right\} \quad (21)$$

一般解 $u_x^{(2)}(x, z)$, $u_z^{(2)}(x, z)$, $\phi^{(2)}(x, z)$ は Fourier 変換法により次のように求まる⁽¹⁵⁾.

$$u_x^{(2)}(x, z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \gamma_j a_j \int_{-\infty}^\infty \frac{|s|}{s} A_j(s) \exp(|s|\gamma_j z) \\ \times \exp(-isx) ds \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \gamma_j a_j \int_0^\infty \{ B_{1j}(s) \exp(sx/\gamma_j) \\ - 2B_{2j}(s) \sinh(sx/\gamma_j) \} \sin(sz) ds \quad (22)$$

$$u_z^{(2)}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty A_j(s) \exp(|s|\gamma_j z) \\ \times \exp(-isx) ds \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty \{ B_{1j}(s) \exp(sx/\gamma_j) \\ - 2B_{2j}(s) \cosh(sx/\gamma_j) \} \cos(sz) ds \quad (23)$$

$$\phi^{(2)}(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 b_j \int_{-\infty}^\infty A_j(s) \exp(|s|\gamma_j z) \\ \times \exp(-isx) ds \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 b_j \int_0^\infty \{ B_j(s) \exp(sx/\gamma_j) \\ - 2B_{2j}(s) \cosh(sx/\gamma_j) \} \cos(sz) ds \quad (24)$$

ここに, $A_j(s), B_{1j}(s), B_{2j}(s)$ ($j = 1, 2, 3$) は境界条件式より決定される未知関数であり, γ_j, a_j, b_j ($j = 1, 2, 3$) は前報⁽¹⁴⁾ の付録 2 に示す既知定数である.

温度場解析と同様に, 問題の解を特異積分方程式の解を導くため, 次の新しい未知関数 $G_1(x)$ を導入する⁽¹⁶⁾.

$$G_1(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u_x^{(2)}(x, 0) & (a < x < b) \\ 0 & (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h) \end{cases} \quad (25)$$

境界条件式 (8), (9) を考慮すると, 混合境界条件式 (7) の第 1 式より, 未知関数 $G_1(t)$ に関する次の特異積分方程式が得られる.

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b G_1(t) \left\{ \frac{1}{t-x} - M_1(t, x) + M_2(t, x) \right\} dt = \frac{1}{\Gamma} \sigma_{zx}^T(x) \quad (a < x < b) \quad (26)$$

式中の定数 Γ および積分核 $M_i(t, x)$ ($i = 1, 2$) は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \sum_{j=1}^3 p_{3j} \delta_j \\ M_1(t, x) &= \frac{1}{\delta_{B0} \Gamma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{3j} \delta_{Bjk} \delta_k \frac{\gamma_k}{\gamma_j t + \gamma_k x} \\ M_2(t, x) &= \frac{1}{\Gamma} \sum_{j=1}^3 \frac{p_{3j}}{\gamma_j} \int_0^\infty \{ \Gamma_{1j}(s) \exp(sx/\gamma_j) - 2\Gamma_{2j}(s) \sinh(sx/\gamma_j) \} ds \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここに、定数 p_{3j} , δ_j , δ_{B0} , δ_{Bjk} ($j, k = 1, 2, 3$) および関数 $\Gamma_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) は付録 1 に示す。また、 $\sigma_{zx}^T(x)$ はき裂が存在しないとした場合の x 軸上での熱応力に相当し、次のように得られる。

$$\sigma_{zx}^T(x) = \sigma_{zx}^{T\infty}(x) + \sigma_{zx}^{Th}(x) \quad (28)$$

上式中、関数 $\sigma_{zx}^{T\infty}(x)$, $\sigma_{zx}^{Th}(x)$ は付録 2 に示す。また、混合境界条件式 (7) の第 2 式より、次の補足の条件式が得られる。

$$\int_a^b G_1(t) dt = 0 \quad (29)$$

特異積分方程式 (14), (26) および補足の条件式 (15), (29) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁷⁾ を用いて数値解析するために、解の特異性を考慮し、 $G_i(t)$ を滑らかな関数 $\Phi_i(t)$ ($i = 0, 1$) を用いて次のように置く。

$$G_i(t) = \frac{c \Phi_i(t)}{(c+t)^\omega (c-t)^{1/2}} \quad (i = 0, 1) \quad (30)$$

ここに、 $(a+b)/2c > 1$ の場合 $\omega = 1/2$, $(a+b)/2c = 1$ の場合 $\omega = -1/2$ である。従って、応力拡大係数 K_{IIa} , K_{IIb} は次のように求められる。

$$K_{IIa} = \lim_{x \rightarrow a^-} \{ 2\pi(x-a) \}^{1/2} \sigma_{zx}^{(2)}(x, 0) = \begin{cases} -(\pi c)^{1/2} \Phi_1(a) & (a+b)/2c > 1 \\ 0 & (a+b)/2c = 1 \end{cases} \quad (31)$$

$$K_{IIb} = \lim_{x \rightarrow b^+} \{ 2\pi(b-x) \}^{1/2} \sigma_{zx}^{(2)}(x, 0) = \begin{cases} (\pi c)^{1/2} \Phi_1(b) & (a+b)/2c > 1 \\ 2^{1/2} (\pi c)^{1/2} \Phi_1(b) & (a+b)/2c = 1 \end{cases} \quad (32)$$

5. 数値解析および考察

数値計算を行い、電気熱弾性場に及ぼすき裂位置 $(a+b)/2h$ およびき裂長さ c/h , b/h の影響を解明する。数値例としては、次のセレン化カドミウムの電気熱弾性特性⁽⁵⁾ を用いた。

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = 7.41 \times 10^{10} [\text{Pa}], c_{33} = 8.36 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ c_{44} &= c_{55} = 1.32 \times 10^{10} [\text{Pa}], c_{66} = 1.45 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ c_{12} &= 4.52 \times 10^{10} [\text{Pa}], c_{13} = c_{23} = 3.93 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ e_{31} &= e_{32} = -0.16 [\text{C/m}^2], e_{33} = 0.347 [\text{C/m}^2] \\ e_{15} &= e_{24} = -0.138 [\text{C/m}^2] \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = 0.825 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \varepsilon_{33} &= 0.903 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \alpha_x &= \alpha_y = 4.396 \times 10^{-6} [\text{K}^{-1}] \\ \alpha_z &= 2.458 \times 10^{-6} [\text{K}^{-1}] \\ p_z &= -2.94 \times 10^{-6} [\text{CK}^{-1} \text{m}^{-2}] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに、 α_x , α_y , α_z は線膨張係数であり、温度応力係数 λ_{11} , λ_{33} は次式のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= c_{11} \alpha_x + c_{12} \alpha_y + c_{13} \alpha_z \\ \lambda_{33} &= c_{13} \alpha_x + c_{23} \alpha_y + c_{33} \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

また、熱伝導率は、 $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z = 1/1.5$ と仮定した。

図 2, 3 は、それぞれき裂面 $z \rightarrow 0^+$ およびき裂延長線上における標準化された温度分布 $T(x, z)/T_0$ および熱応力成分 $\sigma_{zx}^T(x)/T_0 \lambda_{33}$ に及ぼす $(a+b)/2c$ の影響を示したグラフであり、 $c/h = 0.1$ とした。 $T(x, z)/T_0$, $|\sigma_{zx}^T(x)|/T_0 \lambda_{33}$ の最大値はき裂先端が自由表面に近づくにつれて増大する。また、 $|\sigma_{zx}^T(x)|/T_0 \lambda_{33}$ の最大値は自由表面に近い側のき裂先端で発生する。

Fig.2 The temperatures on the crack faces and the crack extended line for $c/h = 0.1$.

Fig.3 The stress component on the x -axis without crack due to the temperatures shown in Figure 2.

図4は標準化された応力拡大係数 $(-K_{IIa}, K_{IIb})/\lambda_{33}T_0(\pi c)^{1/2}$ に及ぼす c/h の影響を示したグラフであり、 $(a+b)/2h = 0.3$ の場合である。実線と破線はそれぞれ $-K_{IIa}$, K_{IIb} を示す。 c/h の増大に伴い、 $(-K_{IIa}, K_{IIb})/\lambda_{33}T_0(\pi c)^{1/2}$ は単調に増大または減少し、 $c/h \rightarrow 0.0$ では0.171となる⁽¹⁴⁾。また、 $K_{IIb}/\lambda_{33}T_0(\pi c)^{1/2}$ に比べ、 $-K_{IIa}/\lambda_{33}T_0(\pi c)^{1/2}$ に及ぼす c/h の影響は顕著である。

Fig.4 The effect of the crack length on the thermal stress intensity factors for $(a+b)/2h = 0.3$.

図5は標準化された応力拡大係数 $(-K_{IIa}, K_{IIb})/\lambda_{33}T_0(\pi c)^{1/2}$ に及ぼす $(a+b)/2c$ の影響を示したグラフであり、 $c/h = 0.1$ とした。き裂位置が自由表面に接近するに伴って、自由表面に近い側のき裂先端における応力拡大係数の絶対値は著しく増加する。また、 $(a+b)/2h = 0.5 - \xi$ ($0 \leq \xi < 0.4$) での $-K_{IIa}$ は $(a+b)/2h = 0.5 + \xi$ での K_{IIb} と同じ値となる。

Fig.5 The effect of the crack location on the thermal stress intensity factors for $c/h = 0.1$.

図6は縁き裂 ($a/h = 0.0$) における標準化された応力拡大係数 $K_{IIb}/\lambda_{33}T_0(\pi b)^{1/2}$ に及ぼすき裂長さ b/h の影響を示したグラフである。き裂長さの増大に伴って応

力拡大係数の値は増大し、 $b/h > 0.4$ では著しく大となる。また、 $b/h \rightarrow 0.0$ では $K_{IIb}/\lambda_{33}T_0(\pi b)^{1/2} \rightarrow 0.0049$ となる。

Fig.6 The effect of the crack length on the thermal stress intensity factor for $a/h = 0.0$.

6. 結 言

本報はき裂を有する圧電厚板に一樣熱流が作用する場合の特異熱応力問題を理論解析したものである。内部き裂および縁き裂の場合を対象に数値計算を行い、温度場、熱応力および熱応力拡大係数に及ぼすき裂位置およびき裂長さの影響を定量的に明らかにした。数値結果より、自由表面近傍の応力拡大係数は著しく大となること、およびき裂長さの増大に伴って、内部き裂における $|K_{IIa}|$ と縁き裂における K_{IIb} は増大するが、内部き裂における K_{IIb} は減少することが明らかになった。

付 録 1

定数 p_{kj} ($j = 1, 2, 3, k = 1 \sim 5$), δ_j , δ_{B0} , δ_{Bjk} ($j, k = 1, 2, 3$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p_{1j} &= c_{11}a_j + c_{13} - e_{31}b_j \\ p_{2j} &= c_{13}a_j + c_{33} - e_{33}b_j \\ p_{3j} &= c_{44}(\gamma_j^2 a_j - 1) + e_{15}b_j \\ p_{4j} &= e_{15}(\gamma_j^2 a_j - 1) - \varepsilon_{11}b_j \\ p_{5j} &= e_{31}a_j + e_{33} + \varepsilon_{33}b_j \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, 3) \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\rho_{22}\rho_{33}}{\rho_{22}\rho_{33}\gamma_1 a_1 - \rho_{21}\rho_{33}\gamma_2 a_2 - \rho_{22}\rho_{31}\gamma_3 a_3} \\ \delta_j &= -\frac{\rho_{j1}\delta_1}{\rho_{jj}} \\ \delta_{B0} &= \rho_{B22}\rho_{B33}p_{11} - \rho_{B21}\rho_{B33}p_{12} - \rho_{B22}\rho_{B31}p_{13} \\ \delta_{B1k} &= -(\rho_{B22}\rho_{B33}p_{1k} + \rho_{B2k}\rho_{B33}p_{12} + \rho_{B22}\rho_{B3k}p_{13}) \\ \delta_{Bjk} &= -\frac{\rho_{Bj1}\delta_{B1k} - \rho_{Bjk}\delta_{B0}}{\rho_{Bjj}} \end{aligned} \right\} (j = 2, 3, k = 1, 2, 3) \quad (36)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{2j} &= \gamma_j(p_{2j}p_{53} - p_{23}p_{5j}) \\ \rho_{3j} &= \gamma_j(p_{2j}p_{52} - p_{22}p_{5j}) \\ \rho_{B1j} &= (p_{3j}p_{41} - p_{31}p_{4j})/\gamma_j \\ \rho_{B2j} &= (p_{3j}p_{43} - p_{33}p_{4j})/\gamma_j \\ \rho_{B3j} &= (p_{3j}p_{42} - p_{32}p_{4j})/\gamma_j \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, 3) \quad (37)$$

関数 $\Gamma_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) は次式で表す.

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}(s) &= \frac{Z_{22}(s)Z_{10}(s) - Z_{12}(s)Z_{20}(s)}{Z_{11}(s)Z_{22}(s) - Z_{12}(s)Z_{21}(s)} \\ \Gamma_{1j}(s) &= -\frac{\rho_{Bj1}}{\rho_{Bjj}}\Gamma_{11}(s) \\ \Gamma_{21}(s) &= \frac{Z_{21}(s)Z_{10}(s) - Z_{11}(s)Z_{20}(s)}{Z_{12}(s)Z_{21}(s) - Z_{11}(s)Z_{22}(s)} \\ \Gamma_{2j}(s) &= \frac{f_{2j}(s)}{2\rho_{Bjj} \sinh(sh/\gamma_j)} \end{aligned} \right\} (j = 2, 3) \quad (38)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}(s) &= p_{11} - \sum_{j=2}^3 p_{1j} \frac{\rho_{Bj1}}{\rho_{Bjj}} \left\{ 1 + \frac{\exp(sh/\gamma_1) - \exp(sh/\gamma_j)}{\sinh(sh/\gamma_j)} \right\} \\ Z_{12}(s) &= -2 \left\{ p_{11} - \sum_{j=2}^3 p_{1j} \frac{\rho_{Bj1}}{\rho_{Bjj}} \frac{\sinh(sh/\gamma_1)}{\sinh(sh/\gamma_j)} \right\} \\ Z_{21}(s) &= p_{11} \exp(sh/\gamma_1) - \sum_{j=2}^3 p_{1j} \frac{\rho_{Bj1}}{\rho_{Bjj}} \left[\exp(sh/\gamma_j) + \frac{\cosh(sh/\gamma_j)}{\sinh(sh/\gamma_j)} \{ \exp(sh/\gamma_1) - \exp(sh/\gamma_j) \} \right] \\ Z_{22}(s) &= -2 \left\{ p_{11} \cosh(sh/\gamma_1) - \sum_{j=2}^3 p_{1j} \frac{\rho_{Bj1}}{\rho_{Bjj}} \frac{\sinh(sh/\gamma_1)}{\sinh(sh/\gamma_j)} \cosh(sh/\gamma_j) \right\} \\ Z_{10}(s) &= \frac{1}{\delta_{B0}} \sum_{j=2}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_k \frac{p_{1j}}{\rho_{Bjj} \sinh(sh/\gamma_j)} \\ &\quad \times [\{ \rho_{Bj1} \delta_{B1k} \exp(sh/\gamma_1) + \rho_{Bjj} \delta_{Bjk} \exp(sh/\gamma_j) \} F_{1k}(s) + \rho_{Bjk} \delta_{B0} F_{2k}(s)] \\ Z_{20}(s) &= \frac{1}{\delta_{B0}} \sum_{j=2}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_k \frac{p_{1j} \cosh(sh/\gamma_j)}{\rho_{Bjj} \sinh(sh/\gamma_j)} \\ &\quad \times [\{ \rho_{Bj1} \delta_{B1k} \exp(sh/\gamma_1) + \rho_{Bjj} \delta_{Bjk} \exp(sh/\gamma_j) \} F_{1k}(s) + \rho_{Bjk} \delta_{B0} F_{2k}(s)] \\ &\quad - \frac{1}{\delta_{B0}} \sum_{k=1}^3 \delta_k \left\{ \sum_{j=1}^3 p_{1j} \delta_{Bjk} \exp(sh/\gamma_j) F_{1k}(s) + p_{1k} \delta_{B0} F_{2k}(s) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} f_{2j}(s) &= \rho_{Bj1} [\{ \exp(sh/\gamma_1) - \exp(sh/\gamma_j) \} \Gamma_{11}(s) - 2 \sinh(sh/\gamma_1) \Gamma_{21}(s)] \\ &\quad + \frac{1}{\delta_{B0}} \sum_{k=1}^3 \delta_k [\{ \rho_{Bj1} \delta_{B1k} \exp(sh/\gamma_1) + \rho_{Bjj} \delta_{Bjk} \exp(sh/\gamma_j) \} F_{1k}(s) + \rho_{Bjk} \delta_{B0} F_{2k}(s)] \end{aligned} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (40)$$

また,

$$\left. \begin{aligned} F_{1k}(s) &= \exp(st/\gamma_k) \\ F_{2k}(s) &= \exp\{s(h-t)/\gamma_k\} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, 3) \quad (41)$$

付 録 2

関数 $\sigma_{zx}^{T\infty}(x)$, $\sigma_{zx}^{Th}(x)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}^{T\infty}(x) &= -\frac{1}{\pi} \left[\sum_{j=1}^3 p_{3j} \delta_j^p \ln \left\{ \frac{t+x}{\gamma_j(t-x)} \right\} + q_3 \ln \left\{ \frac{t+x}{\kappa(t-x)} \right\} \right] \int_a^b G_0(t) dt \\ &\quad + \frac{2}{\pi \delta_{B0}} \left[p_{31} p_{32} p_{43} \left\{ \sum_{j=1}^3 \gamma_j p_{1j} \delta_j^p \ln \left(\frac{\gamma_1(\gamma_j x + \gamma_2 t)}{\gamma_2(\gamma_j x + \gamma_1 t)} \right) - q_1 \ln \left(\frac{\gamma_1(\kappa x - \gamma_2 t)}{\gamma_2(\kappa x - \gamma_1 t)} \right) \right\} \right. \\ &\quad + p_{32} p_{33} p_{41} \left\{ \sum_{j=1}^3 \gamma_j p_{1j} \delta_j^p \ln \left(\frac{\gamma_2(\gamma_j x + \gamma_3 t)}{\gamma_3(\gamma_j x + \gamma_2 t)} \right) - q_1 \ln \left(\frac{\gamma_2(\kappa x - \gamma_3 t)}{\gamma_3(\kappa x - \gamma_2 t)} \right) \right\} \\ &\quad + p_{31} p_{32} p_{42} \left\{ \sum_{j=1}^3 \gamma_j p_{1j} \delta_j^p \ln \left(\frac{\gamma_3(\gamma_j x + \gamma_1 t)}{\gamma_1(\gamma_j x + \gamma_3 t)} \right) - q_1 \ln \left(\frac{\gamma_3(\kappa x - \gamma_1 t)}{\gamma_1(\kappa x - \gamma_3 t)} \right) \right\} \left. \right] \times \int_a^b G_0(t) dt \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}^{Th}(x) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \frac{p_{3j}}{\gamma_j} \int_0^\infty s \{ C_{1j}(s) \exp(sx/\gamma_j) - 2C_{2j}(s) \sinh(sx/\gamma_j) \} \cos(sz) ds \\ &\quad + \frac{4}{\pi} q_3 \int_0^\infty \frac{L_2(s)}{s} \sinh(sx/\kappa) \cos(sz) ds \quad (43) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= m(c_{11} - \kappa^2 k c_{13}) + \kappa^2 n e_{31} - \lambda_{11} \\ q_2 &= m(c_{13} - \kappa^2 k c_{33}) + \kappa^2 n e_{33} - \lambda_{33} \\ q_3 &= \kappa m c_{44}(1+k) - \kappa n e_{15} \\ q_4 &= \kappa m e_{15}(1+k) + \kappa n e_{11} \\ q_5 &= m(e_{31} - \kappa^2 k e_{33}) - \kappa^2 n e_{33} + p_z \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^p &= \frac{\rho_{22}\rho_{33}m - \rho_{20}\rho_{33}\gamma_2a_2 - \rho_{22}\rho_{30}\gamma_3a_3}{\rho_{22}\rho_{33}\gamma_1a_1 - \rho_{21}\rho_{33}\gamma_2a_2 - \rho_{22}\rho_{31}\gamma_3a_3} \\ \delta_j^p &= -(\rho_{j1}\delta_1^p - \rho_{j0})/\rho_{jj} \end{aligned} \right\} (j=2,3) \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{11}(s) &= \frac{Z_{22}(s)Z_{10}^T(s) - Z_{12}(s)Z_{20}^T(s)}{2s^2\{Z_{11}(s)Z_{22}(s) - Z_{12}(s)Z_{21}(s)\}} \\ C_{1j}(s) &= -\frac{\rho_{Bj1}}{\rho_{Bjj}}C_{11}(s) \\ C_{21}(s) &= \frac{Z_{21}(s)Z_{10}^T(s) - Z_{11}(s)Z_{20}^T(s)}{2s^2\{Z_{12}(s)Z_{21}(s) - Z_{11}(s)Z_{22}(s)\}} \\ C_{2j}(s) &= -\frac{f_{2j}^T(s)}{2\rho_{Bjj}\sinh(sh/\gamma_j)} \end{aligned} \right\} (j=2,3) \quad (46)$$

また,

$$\left. \begin{aligned} Z_{10}^T(s) &= \sum_{j=1}^3 \frac{p_{1j}}{\rho_{Bjj}\sinh(sh/\gamma_j)} \{ \rho_{Bj1}\delta_{B11}^p \exp(sh/\gamma_1) \\ &\quad + \rho_{Bjj}\delta_{B1j}^p \exp(sh/\gamma_j) + \rho'_{Bj0} \} \\ &\quad + 2q_1 \frac{\exp(-sh/\kappa)}{\sinh(sh/\kappa)} F_4'(s) \\ Z_{20}^T(s) &= \sum_{j=1}^3 \frac{p_{1j}}{\rho_{Bjj}\sinh(sh/\gamma_j)} \{ \rho_{Bj1}\delta_{B11}^p \exp(sh/\gamma_1) \\ &\quad + \rho_{Bjj}\delta_{B1j}^p \exp(sh/\gamma_j) + \rho'_{Bj0} \} \\ &\quad + 2q_1 \frac{1}{\sinh(sh/\kappa)} F_4'(s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 p_{1j} \{ \gamma_j \delta_j^p F_{2j}'(s) + \delta_{B1j}^p \exp(sh/\gamma_j) \} + F_0' \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} f_{2j}^T(s) &= \rho_{Bj1} [\{ \exp(sh/\gamma_1) - \exp(sh/\gamma_j) \} C_{11}(s) \\ &\quad - 2\sinh(sh/\gamma_1) C_{21}(s)] \\ &\quad + \frac{1}{2s\delta_{B0}} \sum_{k=1}^3 [\{ \rho_{Bj1}\delta_{B1k} \exp(sh/\gamma_1) \\ &\quad + \rho_{Bjj}\delta_{Bjk} \exp(sh/\gamma_j) \} F_{1k} + \rho'_{Bj0}] \delta_k \end{aligned} \quad (j=1,2,3) \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{B11}^p &= \frac{\gamma_1}{\delta_{10}^p} \left\{ 2 \sum_{k=1}^3 (\gamma_2 p_{12} d_{k3} + \gamma_3 p_{13} d_{2k}) \delta_k^p F_{1k} \right. \\ &\quad \left. - d_{23} (2q_1 F_3 + F_0) \right\} + \gamma_1 \delta_1^p F_{11} \\ \delta_{B12}^p &= \frac{\gamma_2}{\delta_{10}^p} \left\{ 2 \sum_{k=1}^3 (\gamma_1 p_{11} d_{3k} + \gamma_3 p_{13} d_{k1}) \delta_k^p F_{1k} \right. \\ &\quad \left. - d_{31} (2q_1 F_3 + F_0) \right\} + \gamma_2 \delta_2^p F_{12} \\ \delta_{B13}^p &= \frac{\gamma_3}{\delta_{10}^p} \left\{ 2 \sum_{k=1}^3 (\gamma_1 p_{11} d_{k2} + \gamma_2 p_{12} d_{1k}) \delta_k^p F_{1k} \right. \\ &\quad \left. - d_{12} (2q_1 F_3 + F_0) \right\} + \gamma_3 \delta_3^p F_{11} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\rho'_{Bj0} = \rho_{Bjk} \delta_{B0} F_{2k}(s) \quad (j=2,3) \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} F_0' &= \left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k p_{1k} \delta_k^p - q_1 \right) \int_a^b G_0(t) dt \\ F_{2j}'(s) &= \int_a^b G_0(t) \exp\{s(h-t)/\gamma_j\} dt \\ F_4'(s) &= \int_a^b G_0(t) \sinh(st/\kappa) dt \end{aligned} \right\} (j=1,2,3) \quad (51)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10}^p &= \gamma_1 p_{11} d_{23} + \gamma_2 p_{12} d_{31} + \gamma_3 p_{13} d_{12} \\ d_{ik} &= p_{3i} p_{4k} - p_{3k} p_{4i} = -d_{ki} \quad (i, k=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

文 献

- (1) Rao, S.S., Sunar, M., Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures : A Survey, *Applied Mechanics Review*, Vol.47 (1994), pp.113-123.
- (2) Tauchert, T.R., Piezothermoelastic Behavior of a Laminated Plate, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.15 (1992), pp.25-37.
- (3) Noda, N., Kimura, S., Deformation of a Piezothermoelectric Composite Plate, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.21 (1998), pp.359-379.
- (4) Ashida, F. et al., Control of Elastic Displacement in Piezoelectric Based Intelligent Plate Subjected to Thermal Load, *International Journal of Engineering Science*, Vol.38 (1997), pp.851-868.
- (5) Ashida, F., Tauchert, T.R., Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk Under Axisymmetric Heating, *Acta Mechanica*, Vol.128 (1998), pp.1-14.
- (6) Ootao, Y., Tanigawa, Y., Three-Dimensional Transient Piezothermoelasticity in Functionally Graded Rectangular Plate Bonded to a Piezoelectric Plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37 (2000), pp.4377-4401.
- (7) Wang, B.L., Mai, Y.W., A Cracked Piezoelectric Material Strip under Transient Thermal Loading, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.539-546.
- (8) Niraula, O.P., Noda, N., Thermal Stress Analysis in Thermopiezoelectric Strip with an Edge Crack, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.25 (2002), pp.389-405.

- (9) Ueda, S., Kanada, Y., Piezothermoelastic Analysis of a Piezoelectric Laminated Slab with a Finite Crack, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.69, No.684 (2003), pp.1291-1297. (in Japanese)
- (10) Ueda, S. et al., Thermo-electro-mechanical Interactions of a Functionally Graded Piezoelectric Plate with a Finite Crack, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.694 (2004), pp.872-879. (in Japanese)
- (11) Wang, B.L., Noda, N., Thermally Induced Fracture of a Smart Functionally Graded Composite Structure, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.35 (2001), pp.93-109.
- (12) Wang, B.L., Noda, N., The Exact Thermo-electroelasticity Solution for a Penny-shaped Crack in Piezothermoelectric Materials, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.27 (2004), pp.241-251.
- (13) Ueda, S., Ikawa, K., The Crack Problem in Piezoelectric Strip under Thermo-electric Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.715 (2006), pp.309-316.
- (14) Ueda, S., et al., Thermal Stress Intensity Factors for a Normal Crack in a Semi-Infinite Piezoelectric Material, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.716 (2006), pp.513-519.
- (15) Sneddon, I.N., Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (16) Erdogan, F., Wu, B.H., Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.19 (1996), pp.237-265.
- (17) Erdogan, F. et al., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by G.C.Sih), (1972), Noordhoff, Leyden.