パルス圧縮技術を併用した四探触子 TOFD 法による
欠陥位置および高さ測定*黒 川 悠^{*1}, 水 谷 義 弘^{*2}
井 上 裕 嗣^{*2}, 黛 正 己^{*3}Crack Location and Height Measurement
by 4 Sensor TOFD Method with Pulse CompressionYu KUROKAWA^{*4}, Yoshihiro MIZUTANI,
Hirotsugu INOUE and Masami MAYUZUMI^{*4} Department of Mechanical Sciences and Engineering, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1-I-1-70 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

Ultrasonic flaw sizing is important issue for remaining life prediction of industrial plants. Time-of-Flight Diffraction (TOFD) method is recognized as one of the most accurate flaw sizing method. However, to measure the crack height accurately, the crack must be symmetrically placed between transmitter and receiver. When the crack do not exist such position, the B-scan is required for accurate crack sizing. By the way, if additional transmitter or receiver is added to the system, the crack location and height can be estimated without B-scan. In this study, we examined the 4 sensor TOFD method which utilizes two transmitters and two receivers. In the result, the crack location and height can be estimated by 4 sensor TOFD method. However, the estimation errors were large due to the low SN ratio of received signal. Then we applied the pulse compression technique to the 4 sensor TOFD method for improving SN ratio of received signal. In the result, the SN ratio was enhanced about 11 dB by the pulse compression. The average location on error is reduced from 2.49 mm to 1.13 mm, and the average depth estimation error is reduced from 0.28 mm to 0.21 mm.

Key Words: Nondestructive Inspection, Ultrasonic Inspection, Diagnostic Technique, Flaw Sizing, TOFD Method, Pulse Compression

1. 結 言

昨今、原子力発電設備の炉心シュラウドや再循環系配管で、耐応力腐食割れ (SCC) 性に優れた材料においても SCC が発生し、問題となっている。日本の原子力発電設備で欠陥が検出された場合には、(社)日本機械学会の維持規格⁽¹⁾に沿って欠陥のモデル化を行い、破壊力学的評価を行って機器の継続運転の可否を判定する。この欠陥のモデル化は検査で測定した欠陥寸法を元に行われるため、継続運転の可否を正しく判定するためには欠陥寸法、すなわち欠陥高さや欠陥長さを正確に測定することが重要である。

高精度に欠陥高さを測定する手法のひとつに、超音波を用いる Time of Flight Diffraction (TOFD) 法⁽²⁾⁻⁽⁴⁾がある。この TOFD 法で欠陥高さ測定を行う場合、欠陥

が探触子間の中心に位置していることを前提として欠陥高さの測定を行うため、探触子間の中心と欠陥の位置にずれがある場合には正確な測定を行うことができない。そのような場合には、探触子間の中心が欠陥位置と一致する位置を見つける走査、すなわち B スキャンを行うことで欠陥の位置と高さを求めることができる。しかしながら、B スキャンを行うことは探傷時間の長時間化につながる。また、試験体の形状や表面の凹凸等による幾何学的制約により欠陥の位置に探触子間の中心を配置できないような場合には測定結果の誤差が大きくなるという課題がある。

TOFD 法で B スキャンを行わずに欠陥の位置と寸法を測定する手法として、3 個以上の探触子を使用する方法が提案されている⁽⁵⁾。しかし、この方法の実現可能性や測定精度の検討は著者らの知る限り行われていない。そこで、本研究ではまず 4 つの探触子を用いる四探触子 TOFD 法を行い、その実現可能性と測定精度を検討した。その結果、四探触子 TOFD 法では、SN

* 原稿受付 2006 年 5 月 24 日。

^{*1} 学生員、東京工業大学理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-I-1-70)。^{*2} 正員、東京工業大学大学院理工学研究科。^{*3} 東京工業大学大学院理工学研究科。

E-mail: ykurokaw@scc.mes.titech.ac.jp

比が低下し、欠陥高さと位置の測定精度が低下することが判明した。

そこで、信号の SN 比を改善するためにパルス圧縮技術を四探触子 TOFD 法に適用し、測定精度の改善を試みた。

2. TOFD 法の原理

2・1 通常の TOFD 法による探傷原理 通常の TOFD 法による探傷原理を図 1 に示す。対象とする部材表面に、広い指向性をもつ 2 個の縦波超音波探触子を対向して配置する。その後、一方の探触子から超音波パルスを送信し、もう一方の探触子で超音波を受信する。このとき受信側探触子では、部材表面を伝播するラテラル波 (図 1 中の L)、底面からの反射波 (B)、き裂先端からの回折波 (D) が受信される。このとき、部材表面から欠陥先端までの距離 d は、探触子間隔を S 、部材中の縦波音速を C とすると、以下の式(1)によって求めることができる。

$$d = \sqrt{t_d^2 C^2 / 4 + t_d C S} \quad \cdots \cdots (1)$$

この TOFD 法は波の到達時間差のみから欠陥高さを測定するので、受信エコー強度に依存しない測定が可能であり、他の超音波探傷法と比較して高精度に欠陥高さを測定できるといわれている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。また、指向性の広い超音波を使用するので、一度に検査できる範囲が他の超音波探傷法に比べて広いという利点もある。

Fig.1 Schematic illustration of TOFD method

図 1 で示したように、欠陥の位置があらかじめ判明していれば、その位置を探触子間の中心に配置することで欠陥高さを高精度に測定することができる。しかしながら、実際に探傷を行う際は欠陥の位置は判明していない場合が多い。欠陥位置が探触子間の中心からずれている場合には、欠陥高さの測定結果に誤差を生

じる。欠陥位置が探触子間の中心からずれている場合の模式図を図 2 に示す。TOFD 法で測定するのはラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差のみであるが、この情報から得られるのは、欠陥の先端は超音波ビーム入射点と受信点を焦点とし、長軸の長さがビーム路程に一致する楕円 (図 2 中の破線) 上のどこかに存在するという情報のみで、実際にどこに存在するのかは判定できない。ところで、ラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差は、欠陥が探触子間のちょうど中心にあるときに最短になる性質がある。そこで、この性質を利用して、探触子ペアを欠陥を横断する方向、すなわち超音波ビームの方向に走査してラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差が最短となる点を見つける走査、すなわち B スキャンが必要になる。

Fig.2 Elliptical locus of points with constant travel time from transmitter to receiver

B スキャンを行うことで欠陥の位置と高さを測定することはできるが、欠陥が見つかるたびに B スキャンを行うことは探傷時間の長時間化に繋がる。また、対象とする部材の幾何学的形状や凹凸により B スキャンを行えない場合も存在するという課題がある。

2・2 四探触子 TOFD 法の原理 B スキャンを行わずに欠陥の位置と高さを測定するために、本研究では、送信探触子を 2 個、受信探触子を 2 個、合計 4 個の探触子を用いる四探触子 TOFD 法を行った。四探触子 TOFD 法の原理を図 3 に示す。まず、送信探触子 1 (図 3 中の Transmitter1) から超音波を送信し、受信探触子 1 と 2 (図 3 中の Receiver1 と Receiver2) でそれぞれ信号を受信する。このとき、送信探触子 1 と受信探触子 1 を焦点とする楕円と、送信探触子 1 と受信探触子 2 を焦点とする楕円を描くことができる。次に、送信探触子 2 (図 3 中の Transmitter2) から超音波を送信し、受信探触子 1 と 2 でそれぞれ受信する。このとき同様に、送信探触子 2 と受信探触子 1, 2 を焦点とする楕円を描くことができる。このとき、欠陥の先端は上記の 4 個の楕円の交点に存在する。この手法を用いることで、

B スキャンを行うことなく欠陥先端の位置と深さを求めることができる。なお、四探触子 TOFD 法は通常の TOFD 法を応用したものであるため、通常の TOFD 法で測定可能な欠陥であれば、四探触子 TOFD 法でも同様に測定できる。

Fig.3 Schematic illustration of 4 sensor TOFD method

2・3 楕円交点の求め方 送信探触子 1 の位置を (x_{T1}, y_{T1}) 、送信探触子 2 の座標を (x_{T2}, y_{T2}) 、受信探触子 1 の座標を (x_{R1}, y_{R1}) 、受信探触子 2 の座標を (x_{R2}, y_{R2}) 、送信探触子 1 で超音波を送信し、受信探触子 1 で受信したときのビーム路程を ρ_{11} 、同じく受信探触子 2 で受信したときのビーム路程を ρ_{12} 、送信探触子 2 で超音波を送信し受信探触子 1 で受信したときのビーム路程を ρ_{21} 、同じく受信探触子 2 で受信したときのビーム路程を ρ_{22} 、欠陥先端の座標を (x, y) とすると、2 節で述べた 4 個の楕円の方程式はそれぞれ以下になる。これらの連立方程式を x と y について解くことで、欠陥先端の位置を求めることができる。

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \sqrt{(x_{T1} - x)^2 + (y_{T1} - y)^2} + \sqrt{(x_{R1} - x)^2 + (y_{R1} - y)^2} \\ \rho_{12} &= \sqrt{(x_{T1} - x)^2 + (y_{T1} - y)^2} + \sqrt{(x_{R2} - x)^2 + (y_{R2} - y)^2} \\ \rho_{21} &= \sqrt{(x_{T2} - x)^2 + (y_{T2} - y)^2} + \sqrt{(x_{R1} - x)^2 + (y_{R1} - y)^2} \\ \rho_{22} &= \sqrt{(x_{T2} - x)^2 + (y_{T2} - y)^2} + \sqrt{(x_{R2} - x)^2 + (y_{R2} - y)^2} \\ &\dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

なお、未知数は x と y の 2 個であるのに対して式は 4 本なので、最小二乗法を用いて x と y を求めた。また、上記の式は非線形方程式なので、本研究では式を線形化して反復計算する手法を採用した。なお、詳細な計算法については、付録として巻末に記した。この反復は通常は 10 回以内で十分な精度で収束するので、パーソナルコンピュータ等で計算した場合でも時間はかからない。

3. 試験装置および試験片

本試験で使用した試験装置の概要を図 4 に示す。探傷試験は、放電加工によりスリット欠陥を導入したオーステナイト系ステンレス鋼 (SUS304) 製の試験片を用いて行った。試験片の寸法は幅 30mm×長さ 300mm×高さ 40mm で、中央部に幅 0.2mm、高さ 10mm の放電加工による貫通スリットを導入してある。探傷には、公称周波数 5MHz、振動子形状 5×5mm の TOFD 用広帯域縦波斜角探触子 (ジャブプローブ製) を用いた。探触子の屈折角は 45°と 60°で、それぞれ図 4 のように治具に固定して探傷を行った。探触子に印加する電圧はパルサーレーザー (PANAMETRICS 社製: 5050PR) によって約 -170V のスパイクパルスを印加した。検出した探傷信号はレーザーで増幅した後 A/D コンバータを介してパソコンに取り込み、独自に開発したソフトウェア上で解析した。なお、信号のサンプリング周波数は 100MHz とした。

この試験片において、探触子間の中心と欠陥位置との距離 (図 4 中の Y) を -50mm から 50mm まで 5mm ビッチで変化させながら四探触子 TOFD 法による探傷試験を行い、欠陥の位置と探傷面から欠陥先端までの距離の測定を行って、測定誤差の調査を行った。

Fig.4 Specimen and experimental setup

4. 実験結果

図 5 に、例として $Y = -45\text{mm}$ のときの受信波形を示す。図中で、たとえば Tr1-Re1 の表記は、送信探触子 1 で超音波を送信し、受信探触子 1 で受信したときの信号である。図 5 に示したそれぞれの波形において、ラテラル波 (図 5 中の L)、欠陥先端回折波 (図 5 中の D)、および底面エコー (図 5 中の B) が観察できる。

四探触子 TOFD 法によって欠陥の位置と高さを測定する際にはラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差を用いるが、本研究ではラテラル波と欠陥先端回折波それぞれの 1 番目のピーク到達時間差を用いて測定を行った。ただし、図 6 に示すように、Y の値が -50mm と 50mm のときに欠陥先端回折波が底面エコーと完全に重なって受信される場合があった。このようなとき

は、4 つの信号のうち欠陥先端回折波が読み取れるものは欠陥先端回折波の 1 番目のピークを、底面エコーと重なって読み取れないものについては底面エコーの 1 番目のピークを用いてラテラル波との到達時間差を算出し、測定を行った。

Fig.5 Received signals by 4 sensor TOFD method at $Y = -45$ mm

Fig.6 Example signal when the diffraction echo is buried in background echo

Y の値を -50 mm から 50 mm まで変化させたときの欠陥位置の測定結果を図 7 に、表面から欠陥先端までの距離を図 8 に示す。また、それぞれの測定結果についての最大誤差、平均誤差、および標準偏差を表 1 に示す。これらの結果から、四探触子 TOFD 法を用いる

ことで、欠陥位置と欠陥高さを測定できることが判明した。しかしながら、欠陥位置の測定結果では最大で 9 mm の誤差が生じており、実用性に課題が残る。また、欠陥先端の深さの測定結果についても、一般の TOFD 法で欠陥を探触子間に配置したときの測定結果と同程度かそれ以下である。

四探触子 TOFD 法では、欠陥の位置によっては探触子の屈折角から外れたところで超音波ビームを送受信することが必要になる。そのような場合には信号の SN 比が低下し、ノイズの影響でピークを正確に読み取らず測定結果の誤差が大きくなる。特に欠陥位置の測定ではその影響が大きくなるため、正確な測定のためには信号の SN 比を高くすることが重要である。そこで、次章で信号の SN 比を改善する手法について検討し、これを四探触子 TOFD 法に適用して測定精度を改善する試みを行った。

Fig.7 Comparison between actual location and estimated location

Fig.8 Comparison between actual depth and measured depth from surface to the crack tip

Table1 Errors of estimated crack location and depth

	Average error	Maximum error	Standard deviation
Location	2.49mm	9.00mm	2.53
Depth	0.28mm	0.86mm	0.20

5. パルス圧縮

4 章で、四探触子 TOFD 法では信号の SN 比が低下し、適用性に課題があることが明らかになった。本章ではパルス圧縮による信号処理を用いて SN 比を改善する試みを行う。

5・1 パルス圧縮の原理 一般の TOFD 法で探触子が送信するのは、長さが 2 波程度のパルス波である。一方パルス圧縮とは、励振波形に周波数を連続的に掃引したチャープ波を用い、受信した信号に対して入力波との相互相関を計算することによって波形をパルス状に圧縮する手法である。時間的に長い波を送信することで超音波のエネルギーが向上し、また、受信後の相関処理によってノイズが低下することで SN 比を改善できる。さらに、相関処理によって受信波形がパルス状に圧縮されるため、時間の分解能はパルス波を送信したときと同等となる⁽⁷⁾⁽⁹⁾。なお、チャープ波を励起するためには探触子が広帯域である必要があるが、一般の TOFD 用探触子はこの要件を満たす。

5・2 パルス圧縮に用いるチャープ波の選定

四探触子 TOFD 法にパルス圧縮を適用するために、まずは送信するチャープ波について検討を行った。送信するチャープ波の長さが長いほど、また電圧が高いほど信号の SN 比は向上する。しかしながら、長い時間または高い電圧のチャープ波を探触子に印加すると、振動子が損傷する可能性がある。本研究ではコンポジット型の探触子を用いているため、その特性を考慮して、チャープ波の長さは $15\mu\text{s}$ 、最大振幅は 70V とした。また、信号の立ち上がり部や立下り部で意図しない周波数成分を持たないように、パルス圧縮でよく用いられるハミングウィンドウによって重み付けを行うこととした。

次に、チャープ波の周波数を決定するための実験を行った。パルス圧縮においては、チャープ波の周波数変化が大きいほどパルスに圧縮した際の時間分解能が上がるため、なるべく低い周波数からなるべく高い周波数まで変化するチャープ波を励振信号として用いるのが理想的である。一方、本研究で用いているのは 5MHz を中心周波数とする広帯域探触子である。そこで、周波数が 0 から 10MHz まで連続的に変化するチャープ波を用いて、まず $Y=0$ の点で超音波の送受信を行

った。送信したチャープ波の波形を図 9 に示す。なお、チャープ波は任意波形発生器 (National Instruments 社製: NI-5421) によって発生させ、アンプ (NF 回路ブロック社製: HSA4101) によって増幅して探触子に印加した。

Fig.9 Chirp signal from 0Hz to 10MHz

図 9 に示したチャープ波を送信探触子 2 で送信し、受信探触子 1 で受信したときの信号の周波数成分を図 10 に示す。なお、チャープ波と受信信号の周波数成分それぞれの最大値が 1 になるように規格化を行った。図 10 から、 0 から 10MHz までの成分を持つチャープ波を送信しているにもかかわらず、受信した信号の周波数成分は 6MHz の手前から急激に減少していることが分かる。これは、比較的減衰の大きい材料である SUS304 中を超音波が伝播するに従って、高い周波数が減衰したためであると考えられる。このような場合に送信した信号と受信した信号の相互相関を計算すると、受信信号をうまくパルスに圧縮できないという問題が生じる。そこで、上記の結果を踏まえ、本研究では周波数が 0 から 5MHz まで変化するチャープ波を用いてパルス圧縮の実験を行った。実際に使用したチャープ波を図 11 に示す。

Fig.10 Comparison of frequency component between input chirp signal and received signal

Fig.11 Input chirp signal for pulse compression technique

5・3 実験結果 3章の実験と同様に、Y の値を－50 から 50mm まで 5mm ピッチで変化させ、欠陥の位置と探傷面から欠陥先端までの距離の測定を行った。図 12 に例として Y=－45mm のときのパルス圧縮の結果を示す。図 5 と比較すると、信号の SN 比が向上していることが分かる。

Y の値を変化させたときの欠陥位置と欠陥先端までの深さについて測定した結果を図 13 と図 14 に、また、それぞれの測定結果についての最大誤差、平均誤差、および標準偏差を表 2 に示す。なお、ラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差は、ラテラル波のマイナス側の最も相関値が高いところと、欠陥先端回折波のプラス側の最も相関値が高いところの到達時間差を用いて算出した。欠陥の位置、および深さの測定結果について、生波形から測定したときよりも精度が向上した。これは、パルス圧縮によって SN 比が向上し、ラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差を正確に測定できたためだと考えられる。なお、この程度の誤差ならば実用上問題ないと考えられる。

Fig.12 Result of pulse compression at Y=－45mm

Fig.13 Comparison between actual location and estimated location by pulse compression

Fig.14 Comparison between actual depth and measured depth from surface to the crack tip by pulse compression

Table2 Errors of estimated crack location and depth by pulse compression

	Average error	Maximum error	Standard deviation
Location	1.13	2.30	0.80
Depth	0.21	0.42	0.09

最後に、生波形を用いて四探触子 TOFD 法を行った場合と、パルス圧縮を適用した場合の SN 比について定量的に検討を行った。四探触子 TOFD 法で正確な測定を行うためには、4 つの信号全てでラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差を読み取る必要がある。そこで、それぞれの Y の値において、受信した 4 つの信号のうちで最も SN 比が低い信号の SN 比を、生波形を用いた場合とパルス圧縮を適用した場合について比較した。SN 比の算出には、欠陥先端回折波の電圧の RMS 値と、ラテラル波と欠陥先端回折波の間に存在するノイズ信号の RMS 値を用いた。なお、欠陥先端回折波の幅は目視で読み取った。

結果を図 15 に示す。生波形を用いた場合では平均で 3.8dB であったが、パルス圧縮を適用した場合の平均は 15dB であった。パルス圧縮を用いることで、SN 比を平均で 11dB 改善することができた。

Fig.15 Comparison of minimum SN ratio between raw signal and pulse compression

6. 結 言

本研究では、B スキャンを行わずに欠陥の位置と高さを測定できる四探触子 TOFD 法によって欠陥の探傷試験を行い、測定精度や SN 比について検討した。次に、パルス圧縮技術を四探触子 TOFD 法に適用して SN 比を改善することを試み、測定精度について調査を行った。得られた結論は以下の通りである。

- ・ 生波形から欠陥位置を測定した場合の平均誤差は 2.49mm で、最大誤差は 9.00mm であった。また、探傷面から欠陥先端までの距離の平均誤差は 0.28mm で、最大誤差は 0.86mm であった。
- ・ 生波形から測定を行った場合は SN 比が低く、適用性に課題があった。
- ・ 四探触子 TOFD 法にパルス圧縮技術を適用して、受信される 4 つの信号のうち最も SN 比が低い信号の SN 比を比較した結果、生波形に比べて平均で 11dB 改善できた。
- ・ パルス圧縮技術を適用した四探触子 TOFD 法で欠陥位置を測定した場合の平均誤差は 1.13mm で、最大誤差は 2.30mm であった。また、表面から欠陥先端までの距離の平均誤差は 0.21mm で、最大誤差は 0.42mm であった。

文 献

- (1) The Japan Society of Mechanical Engineers, Rules of Fitness-for-Service for Nuclear Power Plants, JSME S NA1-2002
- (2) British Standard BS7706(1993): Guide to Calibration and Setting-up of the Ultrasonic Time of Flight Diffraction (TOFD) Technique for the Detection, Location, and Sizing of Flaws, British Standard Institution, (1993)
- (3) J.P.Charlesworth, J.A.G.Temple, ENGINEERING APPLICATION OF ULTRASONIC TIME-OF-FLIGHT DIFFRACTION Second Edition, Research Studies Press LTD., (2001)
- (4) J.A.G.Temple, Time of flight inspection : theory, Nucl, Energy, 22, No.5, Oct. (1983), pp.335-347
- (5) Takahashi, M. et al, Experimental Findings on the Time of Flight Diffraction Technique by EDM Notch Specimens, J. of the Japanese Society for Non-Destructive Inspection, Vol. 51, No.9 (2002), pp.579-585
- (6) Mihara, T. et al., Relations between Crack Opening Behavior and Crack Tip Diffraction of Longitudinal Wave, Proceedings of SPIE, Vol.4703 (2002), pp.137-145
- (7) F.K. Lam, J. Szilard, Pulse compression techniques in ultrasonic non-destructive testing, Ultrasonics, Vol. 14, Issue 3, May (1976), pp.111-114
- (8) V. Ermolov et al. Analog pulse compression system for real time ultrasonic non-destructive testing, Ultrasonics Vol. 34, (1996), pp.655-660
- (9) J. Berriman et al., Humidity and aggregate content correction factors for air-coupled ultrasonic evaluation of concrete, Ultrasonics, Vol. 43, (2005), pp.211-217

付 録

2.3 節で述べた、楕円交点の求め方について詳しく説明する。送信探触子 i ($i=1,2$) の位置を (x_{Ti}, y_{Ti}) , 受信探触子 j ($j=1,2$) の座標を (x_{Rj}, y_{Rj}) , 送信探触子 i で超音波を送信し, 受信探触子 j で受信したときのビーム路程を ρ_{ij} , 欠陥先端の座標を (x, y) として式(2)を整理すると, 以下ようになる。

$$\rho_{ij} = \sqrt{(x_{Ti} - x)^2 + (y_{Ti} - y)^2} + \sqrt{(x_{Rj} - x)^2 + (y_{Rj} - y)^2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ところで, TOFD 法では縦波音速と探触子間隔およびラテラル波と欠陥先端回折波の到達時間差から欠陥先端回折波のビーム路程を求めるが, このとき測定されるのは実際のビーム路程に誤差を含んだ擬似ビーム路程 R_{ij} である。 R_{ij} は, 縦波音速を C , 送信探触子 i と受信探触子 j の間隔を L_{ij} , 送信探触子 i で超音波を送信し, 受信探触子 j で超音波を受信したときのラテラル波と欠陥先端回折波の伝播時間差を t_{dij} とすると,

$$R_{ij} = \rho_{ij} + n_{ij} = L_{ij} + C \cdot t_{dij} + n_{ij} \quad \dots\dots\dots(4)$$

と表すことができる。なお, n_{ij} は測定時の誤差を表している。本研究では, 式(4)を ρ_{ij} と R_{ij} の差が最小となるように, 欠陥先端の座標 (x, y) を最小二乗法で求めた。ただし, 式(4)は非線形方程式であるので, 線形化して反復計算を行って解を求めた。いま,

$$\rho_R = \rho_0 + \Delta\rho = [x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y]^T \quad \dots\dots\dots(5)$$

のように新しい変数を導入して式(4)を Taylor 展開して整理すると,

$$\begin{aligned} R_{ij} - \rho_{0i} - \rho_{0j} &= A + B + n_{ij} \\ A &= -\frac{1}{\rho_{0i}}(\rho_{Ti} - \rho_0)^T \cdot \Delta\rho \\ B &= -\frac{1}{\rho_{0j}}(\rho_{Rj} - \rho_0)^T \cdot \Delta\rho \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

と表せる。ただし,

$$\begin{aligned} \rho_{0i} &= \sqrt{(x_{Ti} - x_0)^2 + (y_{Ti} - y_0)^2} \\ \rho_{0j} &= \sqrt{(x_{Rj} - x_0)^2 + (y_{Rj} - y_0)^2} \\ \rho_{Ti} &= [x_{Ti}, y_{Ti}] \\ \rho_{Rj} &= [x_{Rj}, y_{Rj}] \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

である。ここで, 本研究の場合,

$$\begin{aligned} \Delta P_{ij} &= R_{ij} - \rho_{0i} - \rho_{0j}, \quad h_{Ti} = -\frac{1}{\rho_{0i}}(\rho_{Ti} - \rho_0), \\ h_{Rj} &= -\frac{1}{\rho_{0j}}(\rho_{Rj} - \rho_0), \quad \mathbf{H}_T = [h_{Ti}, h_{T1}, h_{T2}, h_{T2}]^T \\ \mathbf{H}_R &= [h_{R1}, h_{R2}, h_{R1}, h_{R2}]^T, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_T + \mathbf{H}_R, \\ \Delta \mathbf{x} &= [\Delta x, \Delta y]^T, \quad \Delta \mathbf{P} = [\Delta P_{11}, \Delta P_{12}, \Delta P_{21}, \Delta P_{22}]^T, \\ \mathbf{n} &= [n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}]^T \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

の定義を用いれば, 式(6)は

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots(9)$$

となる。式(10)の最小二乗解は, 次の連立方程式を $\mathbf{x}$ について解けばよい。ただし, Σ は $\mathbf{n}$ の共分散行列である。

$$(\mathbf{H}^T \Sigma^{-1} \mathbf{H}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \Sigma^{-1} \Delta \mathbf{P} \quad \dots\dots\dots(10)$$

なお, 四探触子 TOFD 法で測定する 4 個の信号間で測定誤差に相関が無い場合には, 式(11)は,

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{P} \quad \dots\dots\dots(11)$$

となる。本研究では, この式(11)をガウスの掃き出し法で解き, 求められた $\Delta \mathbf{x}$ から式(5)を用いて新しい近似値 $\rho_{0\text{next}} = \rho_0 + \Delta\rho$ を求め, 新しい近似値が十分な精度で収束するまで反復計算を行って欠陥先端の座標 (x, y) を求めた。