圧電材料の熱弾性解析と スマート機能の発現*

芦 田 文 博^{*1}

Thermoelasticity of Piezoceramics and Simulation of a Smart Structure

Fumihiko ASHIDA^{*2}

^{*2} Department of Electronic and Control Systems Engineering, Shimane University,
1060 Nishikawatsu-cho, Matsue-shi, Shimane, 690-8504 Japan

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Smart Structure, Displacement Control, Piezoelectric Materials

1. 緒 言

スマートストラクチャまたはインテリジェントストラクチャと称される適応的機能性構造物^{(1)~(5)}が注目され始めたのは昭和から平成に改元されたころであった。同時に、スマートストラクチャの要素材料として、応答速度と変位制御精度が優れていることから圧電材料への関心が高まり、これまでに圧電材料の弾性解析等に関する著書や論文が数多く公表されてきた^{(6)~(9)}。例えば、圧電材料層と構造材料層で構成された層状複合平板や殻の解析に関する主要な研究は、Saravanos と Heyliger⁽¹⁰⁾ および Wang と Yang⁽¹¹⁾ の概説に紹介されている。これらの概説に取上げられた引用文献から圧電材料の弾性解析に関する研究の推移がおおよそ読取れ、論文は 1995 年ころから急激に増加してきたことがわかる。

周知のとおり、圧電材料はひずむと材料内に電界を生じ、逆に圧電材料に電界を加えると材料はひずむ。これらの現象はそれぞれ圧電効果と逆圧電効果といわれ、圧電効果によってセンサ機能が、逆圧電効果によってアクチュエータ機能が発現できる。さらに、その二つの機能を組合せると、作用した負荷に適応して構造物の変位や振動等を制御するスマート機能が発現できる。このようなスマート構造物に関するおもな研究を Rao や Sunar⁽¹²⁾⁽¹³⁾ および Irschik⁽¹⁴⁾ が全般的に、Tauchert と著者ら⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ が熱的環境下の機能に着目し概説している。

著者は 1991 年から圧電材料の熱弾性解析に関する研究に取り組んできたが、今後の展望を述べるほどの学識を持ち合せていない。そこで、本稿では、おもに圧電材料層を含む多層複合平板の熱弾性解析に関する論文と、著者らが行った熱変位分布を制御するスマート複合円板に関する研究の紹介に止めることをご容赦いただきたい。

2. 圧電材料の熱弾性場における基礎式

結晶族は 32 の結晶族に分類され、そのうち 20 種の結晶族が圧電性を示し、さらにそのうち 10 種の結晶族が焦電性を示す。結晶族の構成式は Nye の著書⁽¹⁷⁾に詳述されている。ところで、工学的に重要な結晶族は、熱的、力学的および電気的に直交異方性を示す mm2 と横等方性を示す 6mm であると考えられる。特に、PZT 等の圧電セラミックスや PVDF 等の圧電ポリマーは横等方性を示すため、結晶族 6mm の圧電材料は重要である。

圧電材料の熱弾性挙動に関する理論的研究は 1960 年頃から始められ、Mindlin⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾ が線形理論、Tiersten⁽²⁰⁾ が非線形理論の定式化を行った。以後、W. Nowacki⁽⁷⁾⁽²¹⁾ による解の一意性や Hamilton の原理に関する研究、J. P. Nowacki⁽²²⁾ や Ieşan⁽²³⁾ の相反定理に関する研究、Chandrasekharaiah⁽²⁴⁾ の一般化された線形熱弾性理論に関する研究、および Altay と Dökmeci⁽²⁵⁾ の変分方程式に関する研究等によって、基礎理論が確立された。

準静的状態変化の下で、線形理論に基づいた結晶族 6mm の圧電材料における熱弾性場と電気場の構成式は次のように表される。

* 原稿受付 2006 年 10 月 5 日。

^{*1} 正員、島根大学総合理工学部 (☎ 690-8504 松江市西川津町 1060)。

E-mail: ashida@ecs.shimane-u.ac.jp

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_1E_z - \beta_1T, \\ \sigma_{yy} &= c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{11}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_1E_z - \beta_1T, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{xx} + c_{13}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_3E_z - \beta_3T, \\ \sigma_{yz} &= c_{44}\varepsilon_{yz} - e_4E_y, \\ \sigma_{zx} &= c_{44}\varepsilon_{zx} - e_4E_x, \\ \sigma_{xy} &= c_{66}\varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= e_4\varepsilon_{zx} + \eta_1E_x, \\ D_y &= e_4\varepsilon_{zy} + \eta_1E_y, \\ D_z &= e_1\varepsilon_{xx} + e_1\varepsilon_{yy} + e_{3zz} + \eta_3E_z + p_3T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 σ_{ij} は応力、 ε_{ij} はひずみ、 E_i は電界の強さ、 T は基準温度からの温度変化、 D_i は電束密度、 c_{ij} は弾性係数、 $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ 、 e_i は圧電係数、 β_i は熱応力係数、 η_i は誘電率、および p_3 は焦電率である。また、電界の強さと電位 Φ の関係は次式で表される。

$$E_x = -\Phi_{,x}, E_y = -\Phi_{,y}, E_z = -\Phi_{,z} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\Phi_{,x} = \partial\Phi/\partial x$ である。

温度場を支配するフーリエの熱伝導方程式は

$$T_{,xx} + T_{,yy} + \lambda^2 T_{,zz} = \kappa_x^{-1} T_{,t} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\lambda^2 = \lambda_3/\lambda_1$ 、 λ_i は熱伝導率、 κ_x は温度伝導率、および t は時間である。応力のつり合い方程式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} &= 0, \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{zy,z} &= 0, \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

また、電束密度の連続条件式は次式で表される。

$$D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

3. 圧電性を示す平板の熱弾性解析

これまでに、圧電材料の多種多様な解析モデルについて熱弾性解析が行われてきている。このなかで、逆圧電効果によるアクチュエータ機能や圧電効果によるセンサ機能の発現に関する研究は、実用的観点から、構造材料層と圧電材料層で構成された多層複合平板や殻について数多く報告されている。本章では圧電材料平板や圧電材料層を有する多層複合平板の熱弾性解析に関する研究に着目して、これまでに公表された論文を解析方法別に分類して紹介する。

3・1 板理論による近似解析 板理論はいくつか提案されているが、複合平板を一体として変形を取扱う理論と層ごとに変形を取扱う理論に大別される。

3・1・1 一体として取扱う解析法 積層複合平板を一体と見なす変形解析には、古典的薄板理論、一次せん断変形理論および高次せん断変形理論が適用されている。これらの理論では、変位と電位を軸座標変数のべき乗と面内座標変数の関数との積を重ね合わせて表すが、関数の表現と重ね合せの項数が異なる⁽²⁶⁾。

古典的薄板理論(CLT)を適用した例として、Tau-chert⁽²⁷⁾ は片面に、野田と木村⁽²⁸⁾ は両面に圧電材料層が接着された多層複合平板の定常熱弾性問題を理論解析し、電界の作用によってたわみが抑制できることを数値的に示した。ただし、圧電材料層の電界は軸方向に一定と仮定し、電界によるひずみを無視して電氣的負荷を外力として取扱い、弾性場と電気場の間の連成効果は無視した(以下、非連成問題と称する)。また、野田と木村⁽²⁹⁾ は同種の問題において弾性場と電気場の間の連成効果を考慮した場合(以下、連成問題と称する)も理論解析し、連成効果の影響を数値的に示している。Tang と Xu⁽³⁰⁾ は圧電材料層を含む積層複合平板の動的な非連成問題を、減衰項を考慮して理論解析した。次に、von Kármán の非線形ひずみ理論に基づいた解析例について述べると、Tzou と Zhou⁽³¹⁾ は両面に圧電材料層が接着された円板の軸対称静的および動的な非線形問題を、印加電位差によって円板に電氣的な曲げモーメントが作用するものと仮定し、幕級数展開法を適用して理論解析した。石原と野田⁽³²⁾ は内部に圧電材料層を含む積層複合平板の非線形動的な非連成問題を、Galerkin 法を適用して理論的に解析している。Moon と Hwang⁽³³⁾ は片面に部分的に圧電材料層が貼付けられた複合材料製異方性長方形平板の非線形動的な非連成問題を FEM 解析し、振動が効果的に抑制できるように圧電材料層の形状と位置を最適化によって決定している。

一次せん断変形理論(FSDT)を適用した例としては、積層平板について、Jonnalagadda ら⁽³⁴⁾ が定常非連成問題、Kapuria らが定常非連成問題⁽³⁵⁾ と定常連成問題⁽³⁶⁾ を理論解析して変位等の数値計算を行い、CLT による数値結果と比較検討している。また、Blandford ら⁽³⁷⁾ は積層複合ばりにおいて、定常非連成問題と連成問題を FEM 解析し、両方の数値結果を比較検討している。石原と野田は積層複合平板において定常連成問題⁽³⁸⁾、減衰効果を考慮しない場合⁽³⁹⁾ と考慮した場合⁽⁴⁰⁾ の動的な非連成問題、および von Kármán の非線形ひずみ理論に基づいた場合の動的な非連成問題⁽⁴¹⁾ をそれぞれ理論解析している。Liew ら⁽⁴²⁾ は両面に圧電材料層が接着された長方形 FGM 平板の片持ちばりを対象に、減衰項を考慮した動的連成問題を FEM 解析し、振動の制御について検討している。Dai ら⁽⁴³⁾ は FGM 平板の両面にセンサ用とアクチュエータ用の圧電材料層が接着された片持ちばりの動的連成問題を EFGM によって解析し、制御則を用いて静的変位と減衰振動を抑制した数値結果を示している。Heidary と Eslami は両面に圧電材料層が接着さ

れた積層長方形平板において、焦電効果を無視した場合⁽⁴⁴⁾と考慮した場合⁽⁴⁵⁾の動的非連成問題をFEM解析し、振動の抑制について論じている。

高次せん断変形理論(HOT)を適用した例としては、圧電材料層が上下両面に接着された積層複合平板の連成問題を、Chattopadhyayら⁽⁴⁶⁾が準静的な理論解析を、Guら⁽⁴⁷⁾は静的FEM解析を、およびZhouら⁽⁴⁸⁾は減衰を考慮した場合の動的FEM解析をそれぞれ行い、連成効果が変位に及ぼす影響等を示している。Kapuriraら⁽⁴⁹⁾は表面のせん断応力の境界条件を満たす高次せん断変形理論を提案して、いくつかの圧電材料層を含む積層複合はりの定常連成問題を理論解析し、変位や応力等の数値計算を行ってフーリエ級数による解析解等の他の理論による数値結果と比較検討した。Yangら⁽⁵⁰⁾は両面に圧電材料層が接着された長方形FGM平板の定常連成問題をvon Kármánの非線形ひずみ理論に基づき、Galerkin法を適用して理論的に解析し、逆圧電効果によって中央のたわみを抑制した数値結果を示している。

3・1・2 層ごとに補間する解析法 積層複合平板において、層ごとに温度、変位および電位を軸座標変数で線形補間し、板厚方向の連続条件を満たすDiscrete Layer理論(DLT)が提案されている。Tangら⁽⁵¹⁾はFSDT、HOTおよびDLT等を適用して圧電材料層が接着された積層複合平板の定常連成問題と非連成問題を理論解析し、変位、応力および電界の強さを数値的に求め、三次元解析解に基づく数値結果と比較検討した。LeeとSaravanosは圧電材料層が片面または両面に接着された積層複合ばり⁽⁵²⁾と両面に数個の圧電材料層片が接着された積層長方形平板⁽⁵³⁾の静的連成問題をFEM解析し、印加電位差がたわみに及ぼす影響等を調べている。Ohらは、片面または両面に部分的に圧電材料層が貼付けられた積層長方形平板において、動的非連成問題⁽⁵⁴⁾⁽⁵⁵⁾と減衰項を考慮した動的連成問題⁽⁵⁶⁾をvon Kármánの非線形ひずみ理論に基づいてFEM解析し、印加電位差が振動や座屈後挙動に及ぼす影響等について論じている。

ところで、DLTを適用すると高精度の数値結果が得られるが、未知変数が多く解析が複雑になる。そこで、解析手順を簡略化するために、HOTに層ごとの補間項を重ね合せ、せん断応力の自由表面における境界条件と接着面における連続条件を適用して未知変数をFSDTと同数に減らしたZigzag理論(ZIGT)が提案されている。KapuriraらはZIGTを適用して圧電材料層が接着された積層複合ばりの定常連成問題⁽⁵⁷⁾、および複数の圧電材料層を含む積層複合平板において

減衰項を考慮した場合の動的連成問題⁽⁵⁸⁾を理論解析して、変位、応力および電位差を数値計算し、フーリエ級数による解析解やFSDT等に基づく数値結果と比較検討している。

3・2 数理的な解析 圧電材料平板や圧電材料層を含む積層複合平板の熱弾性問題において、ポテンシャル関数法やフーリエ級数等による級数展開法を適用した理論解析が行われている。これらは境界条件の下に場の支配方程式を数理的に解いて解析解を導く手法で、結晶族によって解析の困難性は大きく異なる。

3・2・1 ポテンシャル関数法 結晶族6mmの圧電材料において弾性場と電気場の連成効果を考慮した場合の三次元非定常熱弾性問題を一般的に理論解析する手法として、著者ら^{(59)~(61)}がポテンシャル関数法に基づく一般解を提案した。その後、このポテンシャル関数法に類似した解析法はShangら⁽⁶²⁾が提案しているが、温度が調和関数で表されることを前提としているため、定常問題にしか適用できない。次に、Dingら⁽⁶³⁾とChen⁽⁶⁴⁾は著者らが提案したポテンシャル関数法に基づく一般解を動的問題に拡張している。

著者らが提案したポテンシャル関数法を適用して、Choiら⁽⁶⁵⁾が圧電材料平板の非定常問題を、著者とTauchertが圧電材料円板において電位差から作用した媒質加熱分布を決定する定常逆問題⁽⁶⁶⁾と非定常逆問題⁽⁶⁷⁾を理論解析した。次に、著者やTauchertらは、横等方性構造材料層と圧電材料層で構成された二層複合円板において、未知の媒質加熱に適応して軸変位分布を制御するスマート機能の定常問題⁽⁶⁸⁾、媒質加熱の作用によって生じる軸変位分布を制御する非定常逆問題⁽⁶⁹⁾および電位差分布から作用した媒質加熱分布を決定する非定常逆問題⁽⁷⁰⁾を理論解析している。

さらに、著者ら⁽⁷¹⁾は、多くの圧電材料層が構造材料層に接着された多層複合平板において、軸変位分布を制御する印加電位差の最大値が最小となるように複合平板を最適設計する定常問題を解析した。また、Kapuriraらは圧電材料円板⁽⁷²⁾および等方性材料層と圧電材料層で構成された二層複合円板⁽⁷³⁾における定常熱弾性問題の理論解析を行っている。

著者とTauchert⁽⁷⁴⁾は、非定常連成問題において、温度場と電気場を三次元状態で厳密に、弾性場を平面応力状態として近似的に理論解析する簡便なポテンシャル関数法も提案した。

3・2・2 級数展開法 変位や電位をあらかじめフーリエ級数展開し、支配方程式に代入して特性方程式を導き、境界条件を満たすように未定係数を決定する方法は有力な解析手法である。Dubeら⁽⁷⁵⁾は結晶族

mm2 の圧電材料平板を, Kapuria ら⁽⁷⁶⁾ は結晶族 mm2 の圧電材料層を含む積層複合平板を二次元定常連成問題として理論解析している。Tauchert⁽⁷⁷⁾⁽⁷⁸⁾ は結晶族 mm2 の圧電材料層を含むハイブリッド積層平板の二次元定常非連成問題を理論解析し, 得られた変位や応力等を CLT や HOT による結果と数値的に比較検討した。大多尾と谷川らは, 連成効果を考慮して, 結晶族 mm2 の長方形圧電材料平板⁽⁷⁹⁾, および圧電材料層が接着された長方形クロスプライ⁽⁸⁰⁾ や FGM⁽⁸¹⁾ 平板の三次元非定常問題, さらに圧電材料層が接着された無限に長いアングルプライ平板の二次元非定常問題⁽⁸²⁾ を理論解析している。また, 大多尾と谷川は, 結晶族 mm2 の圧電材料層が接着された長方形の等方性構造材料⁽⁸³⁾, クロスプライ⁽⁸⁴⁾ および FGM⁽⁸⁵⁾ 平板の三次元非定常連成問題を理論解析し, 構造材料層の自由表面の中央における軸変位を零に抑制する印加電位差を求めた。これらの論文とは多少解析手法が異なるが, Xu ら⁽⁸⁶⁾ は結晶族 mm2 の圧電材料層を含む積層平板の三次元定常連成問題をフーリエ級数と状態空間法を適用して解析している。

その他に, Reddy と Cheng は多層圧電材料平板⁽⁸⁷⁾ や片面に圧電材料層が接着された長方形 FGM 平板⁽⁸⁸⁾ の三次元定常連成問題を, 平板の形状パラメータによる漸近展開法と伝達関数法を用いて理論解析し, 圧電アクチュエータ層の数が変位と応力分布に及ぼす影響や適当な印加電位差によって複合 FGM 平板の中央のたわみが抑制できること等を示した。

3.3 数値解析法 有限要素法を適用した例として, Shen と Weng⁽⁸⁹⁾ は両面に圧電材料層が接着された積層複合平板の三次元定常連成問題を解析し, 適当な電位差を印加することによって平板の中心面におけるたわみが抑制できることを示している。また, Rao や Sunar⁽⁹⁰⁾⁽⁹¹⁾ および Tzou と Ye⁽⁹²⁾ は, 構造材料層の両面に圧電センサ層とアクチュエータ層が接着されたはりにおいて, 適応的に振動を抑制する動的連成問題の解析を行った。さらに, Shang ら⁽⁹³⁾ は両面に圧電材料層が接着された有限幅の積層複合平板について, 平面ひずみ場を仮定した定常連成問題の数値解析結果を示している。

4. ポテンシャル関数法

前章で述べたように, 圧電材料平板の熱弾性問題は種々の手法によって解析されている。ポテンシャル関数法は単純な解析モデルにしか適用できないが, 最も厳密に理論解析できる手法であると考えられる。そこで本章では, 著者らが提案したポテンシャル関数

法⁽⁶¹⁾⁽⁶⁶⁾を紹介する。円柱座標系において, 変位 u_i と電位 Φ を, 九個のポテンシャル関数を線形結合し,

$$\left. \begin{aligned} u_r &= (\phi_1 + \phi_2 + l_1 \phi_1 + l_2 \phi_2 + l_3 \phi_3)_{,r} + r^{-1} \omega_{,\theta}, \\ u_\theta &= r^{-1} (\phi_1 + \phi_2 + l_1 \phi_1 + l_2 \phi_2 + l_3 \phi_3)_{,\theta} - \omega_{,r}, \\ u_z &= (\phi_0 + k_1 \phi_1 + j_1 \phi_2 + m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2 + m_3 \phi_3)_{,z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\Phi = \chi_0 + \chi_1 + (n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2 + n_3 \phi_3)_{,z} \dots\dots\dots (8)$$

と表す。ここで, ϕ_i は圧電熱弾性変位ポテンシャル関数, χ_i は圧電ポテンシャル関数, ϕ_i と ω は圧電弾性変位ポテンシャル関数, また l_i , m_i , n_i , k_1 および j_1 は既知の係数⁽⁶¹⁾である。式(1)～(6)を円柱座標系に変換し, 式(7)と(8)を代入すると, ポテンシャル関数の支配方程式が得られる。

$$\phi_{0,zz} = \gamma_1 T_z, \chi_{0,z} = \gamma_2 T_z \dots\dots\dots (9)$$

$$\left(\nabla_r^2 + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\nabla_r^2 + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\nabla_r^2 + \mu_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1 = d_2 \nabla_r^2 \nabla_r^2 T_{rz} + d_1 \nabla_r^2 T_{rz,z} + d_0 T_{rz,zzz} \dots\dots (10)$$

$$\phi_{2,zz} = \xi_1^{-1} (\nabla_r^2 \phi_1 + \nu_1 \phi_{1,zz} - \delta_1 T_{rz}) \dots\dots\dots (11)$$

$$\chi_{1,z} = \xi_2^{-1} (\nabla_r^2 \phi_2 + \nu_2 \phi_{2,zz} - \delta_2 T_{rz}) \dots\dots\dots (12)$$

$$\nabla_r^2 \phi_i + \mu_i \phi_{i,zz} = 0 (i=1 \sim 3), \nabla_r^2 \omega + v \omega_{,zz} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここで, γ_i , μ_i , d_i , ξ_i , ν_i , δ_i および v は既知の係数⁽⁶¹⁾⁽⁶⁶⁾, $\nabla_r^2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + r^{-2} \partial^2 / \partial \theta^2$, また T_z と T_{rz} は次のような温度変化の成分である。

$$T = T_z(z) + T_{rz}(r, \theta, z) \dots\dots\dots (14)$$

式(9)～(13)より, ポテンシャル関数は非連成偏微分方程式によって支配されているため, フーリエの熱伝導方程式を境界条件の下に解いて温度変化を求めると, ポテンシャル関数がすべて決定できる。

5. 軸熱変位分布の制御

圧電効果を利用した固体変位素子はサブミクロンのオーダの変位分布制御が可能であることから, 超精密加工装置や大型天体望遠鏡等への応用が考えられる。しかし, 高精度の固体変位素子においては, 熱的環境変化によって素子自体に生じる熱変形も考慮しなければならない。このような背景から, 種々の構造材料層に圧電セラミックス層が接着された複合平板や複合円筒パネルにおいて, 構造材料層の熱変位を制御する研究⁽⁹⁴⁾が行われてきている。本章では, 著者らが行った複合円板における軸熱変位分布の制御に関する研究⁽⁹⁵⁾⁽⁹⁶⁾を紹介する。

5.1 非定常変位の適応的制御 図1に示すように, 横等方性構造材料層と結晶族 6mm の圧電セラミックス層で構成された三層複合円板において, 中間の圧電セラミックス層はセンサ, 上の圧電セラミックス

Fig. 1 Geometry of a three-layered composite disk

層はアクチュエータとして利用し、これら二層の下層の表面は接地されているものとする。このような複合円板の下層の自由表面に未知の非定常軸対称媒質加熱分布 $\theta(r, t)$ が作用したとき、センサ層の上層の表面において電位差分布 $V_0 v_m(r, t)$ が測定されたものと仮定し、アクチュエータ層の上層の表面に電位差分布 $V_0 v_d(r, t)$ を印加することによって、下層の自由表面における軸変位を望ましい分布状態 $u_0 g(r, t)$ に制御する問題⁽⁹⁵⁾を考える。

さて、一般的に非定常熱弾性逆問題の厳密な理論解析は困難である。そこで、時間変数に関する差分法を導入する。時間差分を $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ とすると、任意時間 t_j における各量はそれらの差分を重ね合せて

$$\begin{aligned} & (\Theta_j, T_{ij}, u_{imj}, \sigma_{imj}, \Phi_{ij}, D_{imj}) \\ &= \sum_{k=1}^j w_{jk} (\Delta \Theta_k, \Delta T_{ik}, \Delta u_{imk}, \Delta \sigma_{imk}, \Delta \Phi_{ik}, \\ & \Delta D_{imk}) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$w_{jk} = \delta_{jk} + (1 - \delta_{jk}) \frac{\Delta t_k}{\Delta t_j - \Delta t_k} w_{(j-1)k} \dots\dots\dots (16)$$

なお、例えば $T_{ij} = T_i(r, z, t_j)$ は厚さ c_i の層の温度変化であり、また $\delta_{jk} = 1 (j=k)$, $\delta_{jk} = 0 (j \neq k)$ である。

この時間変数についての差分法と空間変数についてのポテンシャル関数法を非定常熱弾性逆問題に適用すると、境界条件式やポテンシャル関数の支配方程式は任意時間における差分形で表されるので、非定常逆問題は定常逆問題と同様に解析できる。したがって、ある時間において、初期条件、測定された電位差分布の条件およびその他の境界条件を満たすように、媒質加熱温度、温度変化、熱変位、熱応力および電位と電束密度を決定できる。次に、同じ時間で、ポテンシャル関数法における温度変化の項を削除して等温弾性逆問題の解析を行うと、複合円板の下層の自由表面に生じた軸熱変位を要望された分布状態に制御するためにアクチュエータ層に印加すべき電位差分布を決定できる。

解析結果に基づいて、横等方性 CFRP 層と結晶族 6mm のセレン化カドミウム層で構成された三層複合円板を例に数値計算を行った。得られた数値結果を次

Table 1 Accuracy of the finite difference solution for the heating temperature at the center of the bottom free surface

$\bar{t}$	$\bar{\theta}(0, \bar{t})$	$f(0, \bar{t})$
10^{-2}	0.00437	0.00995
10^{-1}	0.09552	0.09516
10^0	0.63377	0.63212
10^1	1.00000	0.99995
$10^2, \infty$	1.00000	1.00000

Fig. 2 Voltage distribution derived from the Laplace transform solution

の無次元量で表す。

$$\begin{aligned} & (\bar{r}, \bar{z}) = \frac{(r, z)}{a}, \bar{t} = \frac{\bar{\kappa} t}{a^2}, (\bar{c}_i, \bar{b}_i) = \frac{(c_i, b_i)}{a}, \\ & \bar{\theta} = \frac{a \bar{\alpha}_r \theta}{|d_1| V_0}, \bar{u}_{ik} = \frac{u_{ik}}{|d_1| V_0}, \bar{\Phi}_i = \frac{\Phi_i}{V_0} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{\alpha}_r$ は横等方性構造材料層の線膨張係数、 d_1 は圧電材料層の圧電率である。なお、層厚は $\bar{c}_1 = 0.1$, $\bar{c}_2 = \bar{c}_3 = 0.025$ 、下と上の自由表面におけるピオ数は $B_0 = 10$, $B_t = 1$ 、フーリエ数は $\bar{t}_j = 10^{(j-1)/(3-3)}$ とした。

ところで、数値計算を行うためにはセンサ層における電位差分布のデータが必要になるが、熱負荷によって惹起される電位差分布の時間的変化は物理的に妥当でなければならず、任意に与えられない。そこで、次の手順でセンサ層における電位差分布 $v_m(\bar{r}, \bar{t})$ のデータを作成した。初めに、三層複合円板において、媒質加熱分布 $f(\bar{r}, \bar{t}) = (1 - 2\bar{r}^2 + \bar{r}^4)(1 - e^{-\bar{t}})$ が下の自由表面に作用したとき、下の自由表面における軸熱変位を $g(\bar{r}, \bar{t}) = 0$ の分布状態に制御するために、上の自由表面に印加すべき電位差分布を決定する問題をラプラス変換法によって理論解析し、中間の圧電セラミックス層の上層の表面に生じる電位差分布の数値計算を行った。その数値結果を図 2 に示す。

さて、本逆問題で導かれた差分解析結果に基づき、図 2 の電位差分布がセンサ層で測定されたものと仮定

Fig. 3 Applied voltage distribution obtained from the finite difference solution

Fig. 4 Axial displacement distributions after applying the voltage distribution shown in Fig. 3

し、未知の媒質加熱分布 $\bar{\theta}(\bar{r}, \bar{t}_j)$ と、円板の下の自由表面を初期の平面状態つまり $g(\bar{r}, \bar{t}_j)=0$ の状態に保つためにアクチュエータ層に印加すべき電位差分布 $v_a(\bar{r}, \bar{t}_j)$ の数値計算を行った。このとき、媒質加熱温度 $\bar{\theta}(\bar{r}, \bar{t}_j)$ の差分分解の数値結果は $f(\bar{r}, \bar{t}_j)$ の数値に一致するはずである。そこで、表 1 に両者を比較して示した。この表より、媒質加熱温度の差分分解は精度よく求められている。図 3 に決定された印加電位差分布を示す。また、図 3 の電位差分布を印加した後の軸変位分布を図 4 に示す。図 4 より、実線で示された複合円板の下の自由表面における軸変位はすべての時間で零となり、初期の平面状態を保つスマート機能が発現されていることがわかる。

5.2 ステップ電位差による定常変位の制御 図 3 に示したように、理論解析によって決定された印加電位差は連続的な分布になっているため、その電位差分布を実際に印加することは不可能である。そこで、著者ら⁽⁹⁶⁾ は、横等方性構造材料層と圧電セラミックス層で構成された二層複合円板において、圧電セラミックス層に同心円状に数個の電極が配置されたモデル

を考え、構造材料層に既知の媒質加熱分布が作用した場合に、構造材料層の軸熱変位を要望された分布状態に制御する定常熱弾性問題も解析し、各電極に印加すべきステップ電位差を最適化によって決定している。

6. 結 言

圧電材料を利用したスマート構造物においては、センサの出力から作用した負荷を知る必要がある。片持ちばりの振動のように、センサ層の電位差とはりの変位との関係が予測可能な場合には、適当な制御則を用いて振動の制御が可能である。しかし、複合平板において変位分布を制御する場合等では、センサ層の電位差分布から作用した負荷を知るために逆問題の解析が不可欠となる。また、非定常逆問題の場合には応答性の確保も重要である。本稿では、著者らが行った熱変位分布を適応的に制御するスマート複合平板の理論的な解析に関する研究例を紹介した。理論的な解析法は単純なモデルにしか適用できないので、実用的なモデルは有限要素法と最適化によって解析されるであろうが、応答性を確保するためには効率的なアルゴリズムを開発し、数値計算の高速化を図る必要がある。また、アクチュエータ層には高い電位差が印加されるため、電界とひずみの非線形性を考慮する等、より精緻な解析も必要になる。これからも、新しい圧電材料の創成や評価、圧電材料の力学的挙動および圧電材料を用いたスマート構造物に関する研究等は盛んに行われ、基礎的な解析から実用的な解析へと移行し、MEMS 等、高機能のスマート構造物が数多く提案されるものと思われる。

最後に、これまでご指導くださった静岡大学・野田直剛教授に、また本稿の執筆を助めてくださった大阪府立大学・谷川義信教授、大阪工業大学・上田整教授、並びに大阪府立大学・大多尾義弘助教授に深甚の謝意を表する。

文 献

- (1) Crawley, E. F., Intelligent Structures for Aerospace: A Technology Overview and Assessment, *AIAA Journal*, Vol. 32 (1994), pp. 1689-1699.
- (2) Chopra, I., Review of Current Status of Smart Structures and Integrated Systems, *Proceedings of SPIE*, Vol. 2717 (1996), pp. 20-62.
- (3) Tani, J., et al., Intelligent Material Systems: Application of Functional Materials, *Transaction of the ASME, Applied Mechanics Reviews*, Vol. 51 (1998), pp. 505-521.
- (4) Gabbert, U. and Tzou, H. S., *IUTAM Symposium on Smart Structures and Struconic Systems*, (2001), Kluwer Academic Publishers.

- (5) Watanabe, K. and Ziegler, F., *IUTAM Symposium on Dynamics of Advanced Materials and Smart Structures*, (2003), Kluwer Academic Publishers.
- (6) Tiersten, H. F., *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, (1969), Plenum Press.
- (7) Nowacki, W., *Dynamic Problems of Thermoelasticity*, (1975), Noordhoff International Publishing.
- (8) Maugin, G. A., *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, (1988), North-Holland.
- (9) Shindo, Y., *Mechanics of Electromagnetic Material Systems and Structures*, (2003), WIT Press.
- (10) Saravanos, D. A., Heyliger, P. R., Mechanics and Computational Models for Laminated Piezoelectric Beams, Plates, and Shells, *Transaction of the ASME, Applied Mechanics Reviews*, Vol. 52 (1999), pp. 305-320.
- (11) Wang, J. and Yang, J., Higher-Order Theories of Piezoelectric Plates and Applications, *Transaction of the ASME, Applied Mechanics Reviews*, Vol. 53 (2000), pp. 87-99.
- (12) Rao, S. S. and Sunar, M., Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey, *Transaction of the ASME, Applied Mechanics Reviews*, Vol. 47 (1994), pp. 113-123.
- (13) Sunar, M. and Rao, S. S., Recent Advances in Sensing and Control of Flexible Structures via Piezoelectric Materials Technology, *Transaction of the ASME, Applied Mechanics Reviews*, Vol. 52 (1999), pp. 1-16.
- (14) Irschik, H., A Review on Static and Dynamic Shape Control of Structures by Piezoelectric Actuation, *Engineering Structures*, Vol. 24 (2002), pp. 5-11.
- (15) Tauchert, T. R., et al., Recent Developments in Piezothermoelasticity: Inverse Problems Relevant to Smart Structures, *JSME International Journal, Series A*, Vol. 42 (1999), pp. 452-458.
- (16) Tauchert, T. R., et al., Developments in Thermopiezoelectricity with Relevance to Smart Composite Structures, *Composite Structures*, Vol. 48 (2000), pp. 31-38.
- (17) Nye, J. F., *Physical Properties of Crystals*, (1957), Oxford University Press.
- (18) Mindlin, R. D., On the Equations of Motion of Piezoelectric Crystals, *Problems of Continuum Mechanics (N. I. Muskhelishvili 70th Birthday Volume)*, (1961), pp. 282-290, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- (19) Mindlin, R. D., Equations of High Frequency Vibrations of Thermopiezoelectric Crystal Plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 10 (1974), pp. 625-637.
- (20) Tiersten, H. F., On the Nonlinear Equations of Thermoelasticity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 9 (1971), pp. 587-604.
- (21) Nowacki, W., Some General Theorems of Thermopiezoelectricity, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 1 (1978), pp. 171-182.
- (22) Nowacki, J. P., Steady-State Problems of Thermopiezoelectricity, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 5 (1982), pp. 183-194.
- (23) Ieşan, D., On Some Theorems in Thermopiezoelectricity, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 12 (1989), pp. 209-223.
- (24) Chandrasekharaiah, D. S., A Generalized Linear Thermoelasticity Theory for Piezoelectric Media, *Acta Mechanica*, Vol. 71 (1988), pp. 39-49.
- (25) Altay, G. A. and Dökmeci, M. C., Fundamental Variational Equations of Discontinuous Thermopiezoelectric Fields, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 34 (1996), pp. 769-782.
- (26) Jonnalagadda, K. D., et al., High-Order Thermoelastic Composite Plate Theories: An Analytic Comparison, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 16 (1993), pp. 265-284.
- (27) Tauchert, T. R., Piezothermoelastic Behavior of a Laminated Plate, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 15 (1992), pp. 25-37.
- (28) Noda, N. and Kimura, S., Thermal Deformation of the Piezothermoelastic Composite Plate (Antisymmetric Angle-Ply Laminates), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 65, No. 634 (1999), pp. 1390-1396.
- (29) Noda, N. and Kimura, S., Deformation of a Piezothermoelastic Composite Plate Considering the Coupling Effect, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 21 (1998), pp. 359-379.
- (30) Tang, Y. Y. and Xu, K., Dynamic Analysis of a Piezothermoelastic Laminated Plate, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 18 (1995), pp. 87-104.
- (31) Tzou, H. S. and Zhou, Y. H., Nonlinear Piezothermoelasticity and Multi-Field Actuators, Part 2: Control of Nonlinear Deflection, Buckling and Dynamics, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119 (1997), pp. 382-389.
- (32) Ishihara, M. and Noda, N., Nonlinear Dynamic Behavior of a Piezothermoelastic Laminated Plate with Anisotropic Material Properties, *Acta Mechanica*, Vol. 166 (2003), pp. 103-118.
- (33) Moon, S. H. and Hwang, J. S., Panel Flutter Suppression with an Optimal Controller Based on the Nonlinear Model Using Piezoelectric Materials, *Composite Structures*, Vol. 68 (2005), pp. 371-379.
- (34) Jonnalagadda, K. D., et al., Piezothermoelastic Composite Plate Analysis Using First-Order Shear Deformation Theory, *Computers and Structures*, Vol. 51 (1994), pp. 79-89.
- (35) Kapuria, S., et al., Levy-Type Piezothermoelastic Solution for Hybrid Plate by Using First-Order Shear Deformation Theory, *Composites: Part B*, Vol. 28 B (1997), pp. 535-546.
- (36) Kapuria, S. and Dumir, P. C., Coupled FSDT for Piezothermoelastic Hybrid Rectangular Plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 (2000), pp. 6131-6153.
- (37) Blandford, G. E., et al., Self-Strained Piezothermoelastic Composite Beam Analysis Using First-Order Shear Deformation Theory, *Composites: Part B*, Vol. 30 (1999), pp. 51-63.
- (38) Ishihara, M. and Noda, N., Piezothermoelastic Analysis of a Cross-Ply Laminate Considering the Effects of Transverse Shear and Coupling, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 23 (2000), pp. 441-461.
- (39) Ishihara, M. and Noda, N., Dynamic Behavior of a Piezothermoelastic Laminate Considering the Effect of Transverse Shear, *Smart Materials and Structures*, Vol. 11 (2002), pp. 202-208.
- (40) Ishihara, M. and Noda, N., Effect of Damping on Dynamic Behavior of a Piezothermoelastic Laminate Considering the Effects of Transverse Shear, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40 (2003), pp. 6077-6094.

- (41) Ishihara, M. and Noda, N., Nonlinear Dynamic Behavior of a Piezothermoelastic Laminate Considering the Effect of Transverse Shear, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26 (2003), pp. 1093-1112.
- (42) Liew, K. M., et al., Active Control of FGM Plates Subjected to a Temperature Gradient: Modelling via Finite Element Method Based on FSDT, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 52 (2001), pp. 1253-1271.
- (43) Dai, K. Y., et al., Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Material (FGM) Plates Using Element-Free Galerkin Method, *Computers and Structures*, Vol. 83 (2005), pp. 1487-1502.
- (44) Heidary, F. and Eslami, M. R., Dynamic Analysis of Distributed Piezothermoelastic Composite Plate Using First-Order Shear Deformation Theory, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 27 (2004), pp. 587-605.
- (45) Heidary, F. and Eslami, M. R., Pyroelectric Effect on Dynamic Response of Coupled Distributed Piezothermoelastic Composite Plate, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 28 (2005), pp. 285-300.
- (46) Chattopadhyay, A., et al., Coupled Thermo-Piezoelectric-Mechanical Model for Smart Composite Laminates, *AIAA Journal*, Vol. 37 (1999), pp. 1633-1638.
- (47) Gu, H.-Z., et al., A Higher Order Temperature Theory for Coupled Thermo-Piezoelectric-Mechanical Modeling of Smart Composites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 (2000), pp. 6479-6497.
- (48) Zhou, X., et al., Dynamic Responses of Smart Composites Using a Coupled Thermo-Piezoelectric-Mechanical Model, *AIAA Journal*, Vol. 38 (2000), pp. 1939-1948.
- (49) Kapuria, S., et al., Coupled Consistent Third-Order Theory for Hybrid Piezoelectric Beams Under Thermal Load, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 27 (2004), pp. 405-424.
- (50) Yang, J., et al., Non-Linear Analysis of the Thermo-Electro-Mechanical Behaviour of Shear Deformable FGM Plates with Piezoelectric Actuators, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59 (2004), pp. 1605-1632.
- (51) Tang, Y. Y., et al., Assessment of Computational Models for Thermoelectroelastic Multilayered Plates, *Computers and Structures*, Vol. 61 (1996), pp. 915-933.
- (52) Lee, H.-J. and Saravanos, D. A., Coupled Layerwise Analysis of Thermopiezoelectric Composite Beams, *AIAA Journal*, Vol. 34 (1996), pp. 1231-1237.
- (53) Lee, H.-J. and Saravanos, D. A., Generalized Finite Element Formulation for Smart Multilayered Thermal Piezoelectric Composite Plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34 (1997), pp. 3355-3371.
- (54) Oh, I.-K., et al., Postbuckling and Vibration Characteristics of Piezolaminated Composite Plate Subject to Thermo-Piezoelectric Loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233 (2000), pp. 19-40.
- (55) Oh, I.-K., et al., Thermopiezoelectric Snapping of Piezolaminated Plates Using Layerwise Nonlinear Finite Elements, *AIAA Journal*, Vol. 39 (2001), pp. 1188-1197.
- (56) Oh, I.-K., Thermopiezoelectric Nonlinear Dynamics of Active Piezolaminated Plates, *Smart Materials and Structures*, Vol. 14 (2005), pp. 823-834.
- (57) Kapuria, S., et al., Efficient Coupled Zigzag Theory for Hybrid Piezoelectric Beams for Thermoelectric Load, *AIAA Journal*, Vol. 42 (2004), pp. 383-394.
- (58) Kapuria, S., et al., Static and Dynamic Thermo-Electro-Mechanical Analysis of Angle-Ply Hybrid Piezoelectric Beams Using an Efficient Coupled Zigzag Theory, *Composites Science and Technology*, Vol. 64 (2004), pp. 2463-2475.
- (59) Ashida, F., et al., Response of a Piezothermoelastic Plate of Crystal Class 6mm Subject to Axisymmetric Heating, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 31 (1993), pp. 373-384.
- (60) Ashida, F., et al., A General Solution Technique for Piezothermoelasticity of Hexagonal Solids of Class 6mm in Cartesian Coordinates, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 74 (1994), pp. 87-95.
- (61) Ashida, F., et al., Potential Function Method for Piezothermoelastic Problems of Solids of Crystal Class 6mm in Cylindrical Coordinates, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 17 (1994), pp. 361-375.
- (62) Shang, F., et al., Thermal Stresses Analysis of a Three-Dimensional Crack in a Thermopiezoelectric Solid, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55 (1996), pp. 737-750.
- (63) Ding, H.-J., et al., A General Solution for Piezothermoelasticity of Transversely Isotropic Piezoelectric Materials and Its Applications, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 38 (2000), pp. 1415-1440.
- (64) Chen, W.-Q., On the General Solution for Piezothermoelasticity for Transverse Isotropy with Application, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67 (2000), pp. 705-711.
- (65) Choi, J., et al., Transient Piezothermoelasticity of a Hexagonal Plate of Class 6mm, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 65 (1995), pp. 24-37.
- (66) Ashida, F. and Tauchert, T. R., Temperature Determination for a Contacting Body Based on an Inverse Piezothermoelastic Problem, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34 (1997), pp. 2549-2561.
- (67) Ashida, F. and Tauchert, T. R., An Inverse Problem for Determination of Transient Surface Temperature from Piezoelectric Sensor Measurement, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65 (1998), pp. 367-373.
- (68) Tauchert, T. R. and Ashida, F., Application of the Potential Function Method in Piezothermoelasticity: Solutions for Composite Circular Plates, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 22 (1999), pp. 387-419.
- (69) Ashida, F. and Tauchert, T. R., Control of Transient Thermoelastic Displacement in a Composite Disk, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 25 (2002), pp. 99-121.
- (70) Ashida, F., et al., Inverse Transient Thermoelastic Problem for a Composite Circular Disk, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 25 (2002), pp. 431-455.
- (71) Ashida, F., et al., Optimum Design of a Multilayered Composite Plate Using Neural Networks, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26 (2003), pp. 1137-1150.
- (72) Kapuria, S., et al., Three-Dimensional Axisymmetric Piezothermoelastic Solution of a Transversely Isotropic Piezoelectric Clamped Circular Plate, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65 (1998), pp. 178-183.
- (73) Kapuria, S., et al., Three Dimensional Axisymmetric Piezothermoelastic Solution of Clamped Circular Elastic Plate Bonded to Piezoceramic Plate, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 79 (1999), pp. 117-129.

- (74) Ashida, F. and Tauchert, T. R., A General Plane-Stress Solution in Cylindrical Coordinates for a Piezothermoelastic Plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38 (2001), pp. 4969-4985.
- (75) Dube, G. P., et al., Exact Piezothermoelastic Solution of Simply-Supported Orthotropic Flat Panel in Cylindrical Bending, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 38 (1996), pp. 1161-1177.
- (76) Kapuria, S., et al., Exact Piezothermoelastic Solution for Simply Supported Laminated Flat Panel in Cylindrical Bending, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 77 (1997), pp. 281-293.
- (77) Tauchert, T. R., Cylindrical Bending of Hybrid Laminates under Thermo-Electro-Mechanical Loading, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 19 (1996), pp. 287-296.
- (78) Tauchert, T. R., Plane Piezothermoelastic Response of a Hybrid Laminate-A Benchmark Problem, *Composite Structures*, Vol. 39 (1997), pp. 329-336.
- (79) Ootao, Y. and Tanigawa, Y., Three-Dimensional Transient Piezothermoelasticity of a Piezoelectric Rectangular Plate due to Partial Heating, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 64, No. 626 (1998), pp. 2636-2644.
- (80) Ootao, Y. and Tanigawa, Y., Three-Dimensional Transient Piezothermoelasticity for a Rectangular Composite Plate Composed of Cross-Ply and Piezoelectric Laminae, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 38 (2000), pp. 47-71.
- (81) Ootao, Y. and Tanigawa, Y., Three-Dimensional Transient Piezothermoelasticity in Functionally Graded Rectangular Plate Bonded to a Piezoelectric Plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 (2000), pp. 4377-4401.
- (82) Ootao, Y., et al., Transient Piezothermoelastic Problem for a Laminated Composite Strip Composed of Angle-Ply and Piezoelectric Laminae, *Acta Mechanica*, Vol. 163 (2003), pp. 207-221.
- (83) Ootao, Y. and Tanigawa, Y., Control of Transient Thermoelastic Displacement of a Two-Layered Composite Plate Constructed of Isotropic Elastic and Piezoelectric Layers due to Nonuniform Heating, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 71 (2001), pp. 207-220.
- (84) Ootao, Y. and Tanigawa, Y., Control of Transient Thermoelastic Displacement of a Rectangular Composite Plate Constructed of a Cross-Ply Laminate and a Piezoelectric Material, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 66, No. 652 (2000), pp. 2163-2169.
- (85) Ootao, Y. and Tanigawa, Y., Control of the Transient Thermoelastic Displacement of a Functionally Graded Rectangular Plate Bonded to a Piezoelectric Plate due to Nonuniform Heating, *Acta Mechanica*, Vol. 148 (2001), pp. 17-33.
- (86) Xu, K., et al., Three-Dimensional Solutions for Coupled Thermoelastoelectric Response of Multilayered Plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 126 (1995), pp. 355-371.
- (87) Reddy, J. N. and Cheng, Z.-Q., Deformations of Piezothermoelastic Laminates with Internal Electrodes, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 81 (2001), pp. 347-359.
- (88) Reddy, J. N. and Cheng, Z.-Q., Three-Dimensional Solutions of Smart Functionally Graded Plates, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68 (2001), pp. 234-241.
- (89) Shen, Y.-C. and Weng, C.-I., Deformation Control of Laminated Composite Plates Containing Piezoelectric Layers under Thermal Loading, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 18 (1995), pp. 449-464.
- (90) Rao, S. S. and Sunar, M., Analysis of Distributed Thermopiezoelectric Sensors and Actuators in Advanced Intelligent Structures, *AIAA Journal*, Vol. 31 (1993), pp. 1280-1286.
- (91) Sunar, M. and Rao, S. S., Thermopiezoelectric Control Design and Actuator Placement, *AIAA Journal*, Vol. 35 (1997), pp. 534-539.
- (92) Tzou, H. S. and Ye, R., Piezothermoelasticity and Precision Control of Piezoelectric Systems: Theory and Finite Element Analysis, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116 (1994), pp. 489-495.
- (93) Shang, F.-L., et al., Development of Finite Element Techniques for Three-Dimensional Analyses of Thermo-Piezoelectric Materials, *Transaction of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 125 (2003), pp. 18-21.
- (94) Tauchert, T. R. and Ashida, F., Control of Transient Response in Intelligent Piezothermoelastic Structures, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26 (2003), pp. 559-582.
- (95) Ashida, F., et al., Control of Transient Deformation in a Heated Intelligent Composite Disk, *Smart Materials and Structures*, Vol. 12 (2003), pp. 825-835.
- (96) Ashida, F. et al., Control of Thermoelastic Displacement in a Two-Layered Composite Disk by Applying Stepwise Electric Potentials, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 72, No. 714 (2006), pp. 239-246.