円板状き裂を有する傾斜機能圧電厚板の
電気熱弾性応答*上田 整^{*1}, 西村直樹^{*2}, 近藤宏憲^{*2}Thermoelectromechanical Response of a Penny-Shaped Crack
in a Functionally Graded Piezoelectric StripSei UEDA^{*3}, Naoki NISHIMURA and Hironori KONDO^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

In this paper, the mixed-mode thermoelectromechanical fracture problem for a functionally graded piezoelectric material (FGPM) strip with a penny-shaped crack is considered. It is assumed that the thermoelectroelastic properties of the strip vary continuously along the thickness of the strip, and that the strip is under thermoelectric loadings. The crack faces are supposed to be insulated thermally and electrically. By using the Hankel transform, the thermal and electromechanical problems are reduced to a singular integral equation and a system of singular integral equations, respectively. Numerical calculations are carried out, and detailed results are presented to illustrate the influence of the crack size, the crack location and the material nonhomogeneity on the stress and electric displacement intensity factors. It can be found that the normalized intensity factors are under the great influence of the geometric parameters and the effect of the material nonhomogeneity on the intensity factors depends on the geometric parameters.

Key Words: Stress Intensity Factor, Electric Displacement Intensity Factor, Elasticity, Fracture Mechanics, Functionally Graded Materials, Piezoelectric Material, Integral Transform, Penny-Shaped Crack, Thermoelectric Loadings

1. 緒 言

近年、圧電材料の組成を傾斜させることにより、機能性と信頼性を高めることを目的とした傾斜機能圧電材料 (FGPMs) が注目されており⁽¹⁾, FGPM を対象とした電気破壊力学に関する理論的研究が精力的に進められている^{(2)~(7)}。また、温度変化に起因する熱変形などを適切に制御する知的材料システム⁽⁸⁾の開発には、熱的負荷を受ける圧電材料を対象とした電気熱弾性破壊力学の挙動の解明も重要である。このため、2 次元き裂^{(9)~(14)}や円板状き裂⁽¹⁵⁾を有する均質圧電材料の電気熱弾性問題に関する理論的研究成果は数多く報告されているが、FGPM を対象とした研究は非常に少なく、2 次元き裂問題^{(16),(17)}が幾つか検討されている程度である。

そこで本報では、自由表面に平行な円板状き裂を有する傾斜機能圧電セラミックス厚板を考え、上下面に

温度差を有する厚板に一樣電束密度が作用する場合の応力・電束密度拡大係数を理論解析した。解析には Hankel 変換法⁽¹⁸⁾および熱弾性変位ポテンシャル法を用い、問題の解を特異積分方程式の解に帰着して解く方法を採用した⁽¹⁹⁾。数値解析には Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽²⁰⁾を用い、応力・電束密度拡大係数に及ぼす幾何学的形状、材料不均質性、熱的負荷および電気的負荷の影響を明らかにした。

2. 問題の設定と基礎式

図 1 に示す円筒座標系 (r, θ, z) において、厚さ $h = h_1 + h_2$ の z 軸方向に傾斜組成された圧電セラミックス厚板を考える。 $z = 0$ 面上に半径 c の円板状き裂が自由表面に平行に存在するものとし、 z 軸の正の向きを分極方向とする。厚板上面 ($z = h_1$ 面) および下面 ($z = -h_2$ 面) の温度がそれぞれ T_{10}, T_{20} に保持され、 z 軸の正の向きに一樣電束密度 D_0 が作用する問題を設定する。以後、下添字 r, θ, z は座標軸方向を表し、 $i = 1, 2$ はそれぞれ $0 \leq z \leq h_1, -h_2 \leq z \leq 0$ の領域を示すものとする。

* 原稿受付 2006 年 11 月 7 日。

^{*1} 正員、大阪工業大学工学部 (☎ 535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1)。^{*2} 学生員、大阪工業大学大学院工学研究科。

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

Fig.1 Penny-shaped crack in a functionally graded piezoelectric strip.

FGPM の材料特性変化が z 軸方向に指数関数的であると仮定すれば、材料特性は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} (c_{kl}, e_{kl}, \varepsilon_{kk}) &= (c_{kl0}, e_{kl0}, \varepsilon_{kk0}) \exp(\beta z) \\ (\lambda_{kk}, p_z) &= (\lambda_{kk0}, p_{z0}) \exp\{(\beta + \omega)z\} \\ \kappa_k &= \kappa_{k0} \exp(\delta z) \end{aligned} \right\} \quad (k : \text{not sum}) \quad (1)$$

ここに、 $c_{kl}(z)$ は弾性定数、 $e_{kl}(z)$ は圧電定数、 $\varepsilon_{kk}(z)$ は誘電定数、 $\lambda_{kk}(z)$ は熱弾性定数、 $p_z(z)$ は焦電定数、 $\kappa_k(z)$ は熱伝導率である。また、 β, ω および δ は材料の不均質性を表す正または負の定数であり、下添字 0 で $z = 0$ 面における各材料特性を示す。

変位ベクトルの成分を $u_{\eta i} = u_{\eta i}(r, z)$ 、静電ポテンシャルを $\phi_i = \phi_i(r, z)$ 、材料温度を $T_i = T_i(r, z)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{\eta \eta i} = \sigma_{\eta \eta i}(r, z)$ 、 $\sigma_{z r i} = \sigma_{z r i}(r, z)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_{\eta i} = D_{\eta i}(r, z)$ ($\eta = r, \theta, z, i = 1, 2$) は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r r i} &= c_{11} \frac{\partial u_{r i}}{\partial r} + c_{12} \frac{u_{r i}}{r} + c_{13} \frac{\partial u_{z i}}{\partial z} \\ &\quad + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{11} T_i \\ \sigma_{\theta \theta i} &= c_{12} \frac{\partial u_{r i}}{\partial r} + c_{11} \frac{u_{r i}}{r} + c_{13} \frac{\partial u_{z i}}{\partial z} \\ &\quad + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{11} T_i \\ \sigma_{z z i} &= c_{13} \frac{\partial u_{r i}}{\partial r} + c_{13} \frac{u_{r i}}{r} + c_{33} \frac{\partial u_{z i}}{\partial z} \\ &\quad + e_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{33} T_i \\ \sigma_{z r i} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_{z i}}{\partial r} + \frac{\partial u_{r i}}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \\ D_{r i} &= e_{15} \left(\frac{\partial u_{z i}}{\partial r} + \frac{\partial u_{r i}}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \\ D_{z i} &= e_{31} \frac{\partial u_{r i}}{\partial r} + e_{31} \frac{u_{r i}}{r} + e_{33} \frac{\partial u_{z i}}{\partial z} \\ &\quad - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + p_z T_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

不均質材料に対する定常熱伝導方程式は次式で表される。

$$\kappa^2 \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial T_i}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

ここに、 $\kappa^2 = \kappa_{10}/\kappa_{30}$ である。また、変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{110} \left(\frac{\partial^2 u_{r i}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r i}}{\partial r} - \frac{u_{r i}}{r^2} \right) + c_{440} \frac{\partial^2 u_{r i}}{\partial z^2} \\ + (c_{130} + c_{440}) \frac{\partial^2 u_{z i}}{\partial r \partial z} + (e_{310} + e_{150}) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r \partial z} \\ + \beta \left\{ c_{440} \left(\frac{\partial u_{r i}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z i}}{\partial r} \right) + e_{150} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right\} \\ = \lambda_{110} \exp(\omega z) \frac{\partial T_i}{\partial r} \\ c_{440} \left(\frac{\partial^2 u_{z i}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z i}}{\partial r} \right) + c_{330} \frac{\partial^2 u_{z i}}{\partial z^2} \\ + (c_{130} + c_{440}) \left(\frac{\partial^2 u_{r i}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r i}}{\partial z} \right) \\ + e_{150} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) + e_{330} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \\ + \beta \left\{ c_{130} \left(\frac{\partial u_{r i}}{\partial r} + \frac{u_{r i}}{r} \right) + c_{330} \frac{\partial u_{z i}}{\partial z} + e_{330} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right\} \\ = \lambda_{330} \exp(\omega z) \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial z} + (\beta + \omega) T_i \right\} \\ e_{150} \left(\frac{\partial^2 u_{z i}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z i}}{\partial r} \right) + e_{330} \frac{\partial^2 u_{z i}}{\partial z^2} \\ + (e_{150} + e_{310}) \left(\frac{\partial^2 u_{r i}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r i}}{\partial z} \right) \\ - \varepsilon_{110} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) - \varepsilon_{330} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \\ + \beta \left\{ e_{310} \left(\frac{\partial u_{r i}}{\partial r} + \frac{u_{r i}}{r} \right) + e_{330} \frac{\partial u_{z i}}{\partial z} - \varepsilon_{330} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right\} \\ = -p_{z0} \exp(\omega z) \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial z} + (\beta + \omega) T_i \right\} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

本問題の温度場に関する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r < c) \\ T_1(r, 0) &= T_2(r, 0) \quad (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1(r, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} T_2(r, 0) \\ T_1(r, h_1) &= T_{10} \\ T_2(r, -h_2) &= T_{20} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r < \infty) \quad (6)$$

また、電気弾性場に関する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z z 1}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r < c) \\ u_{z 1}(r, 0) &= u_{z 2}(r, 0) \quad (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z r 1}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r < c) \\ u_{r 1}(r, 0) &= u_{r 2}(r, 0) \quad (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{z1}(r, 0) &= 0 & (0 \leq r < c) \\ \phi_1(r, 0) &= \phi_2(r, 0) & (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz1}(r, 0) &= \sigma_{zz2}(r, 0), & \sigma_{zr1}(r, 0) &= \sigma_{zr2}(r, 0), \\ D_{z1}(r, 0) &= D_{z2}(r, 0), & \sigma_{z\theta 1}(r, h_1) &= 0, \\ \sigma_{zr1}(r, h_1) &= 0, & D_{z1}(r, h_1) &= D_0, \\ \sigma_{zz2}(r, -h_2) &= 0, & \sigma_{zr2}(r, -h_2) &= 0, \\ D_{z2}(r, -h_2) &= D_0 & & \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3. 温度場解析

温度場 T_i ($i = 1, 2$) を次のように置く。

$$T_i = T^{(1)} + T_i^{(2)} \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

ここに、 $T^{(1)} = T^{(1)}(z)$ は非擾乱温度場であり、支配方程式および境界条件式は

$$\frac{d^2 T^{(1)}}{dz^2} + \delta \frac{dT^{(1)}}{dz} = 0 \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} T^{(1)}(h_1) &= T_{10} \\ T^{(1)}(-h_2) &= T_{20} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

また、 $T_i^{(2)} = T_i^{(2)}(r, z)$ ($i = 1, 2$) は擾乱温度場であり、支配方程式および境界条件式は

$$\kappa^2 \left(\frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i^{(2)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial T_i^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1^{(2)}(r, 0) &= -\frac{d}{dz} T^{(1)}(0) & (0 \leq r < c) \\ T_1^{(2)}(r, 0) &= T_2^{(2)}(r, 0) & (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1^{(2)}(r, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} T_2^{(2)}(r, 0) \\ T_1^{(2)}(r, h_1) &= 0 \\ T_2^{(2)}(r, -h_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r < \infty) \quad (16)$$

式 (12), (13) より、非擾乱温度場が次のように求まる。

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \frac{1}{\exp(-\delta h_1) - \exp(\delta h_2)} \\ &\times [(T_{10} - T_{20}) \exp(-\delta z) \\ &- \{T_{10} \exp(\delta h_2) - T_{20} \exp(-\delta h_1)\}] \quad (17) \end{aligned}$$

式 (14) に Hankel 変換法⁽¹⁸⁾ を適用し、擾乱温度場の一般解を求めると

$$T_i^{(2)} = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty D_{ij} J_0(sr) \exp(s\tau_{ij}z) ds \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

ここに、 $D_{ij} = D_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) は境界条件式より決定される未知関数であり、 J_n は n 次の第一種 Bessel 関数、 $\tau_{ij} = \tau_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11} &= \tau_{22} = -\tau(s) - \frac{\delta}{2s} \\ \tau_{12} &= \tau_{21} = \tau(s) - \frac{\delta}{2s} \\ \tau(s) &= \left\{ \kappa^2 + \left(\frac{\delta}{2s} \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

新しい未知関数 $G_0(r)$ を次のように導入する⁽¹⁹⁾。

$$G_0(r) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \{T_1^{(2)}(r, 0) - T_2^{(2)}(r, 0)\} & (0 \leq r < c) \\ 0 & (c \leq r < \infty) \end{cases} \quad (20)$$

従って、境界条件式 (16) を考慮し、混合境界条件式 (15) の第 1 式を用いると、未知関数 $G_0(t)$ に関する次の特異積分方程式が得られる。

$$\int_0^c t \{M_0^{(1)} + M_0^{(2)}\} G_0(t) dt = -\frac{2}{\kappa} \frac{d}{dz} T^{(1)}(0) \quad (0 \leq r < c) \quad (21)$$

上式中、 $M_0^{(1)} = M_0^{(1)}(t, r)$ 、 $M_0^{(2)} = M_0^{(2)}(t, r)$ は積分核であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M_0^{(1)} &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2 - r^2} E\left(\frac{r}{t}\right) & (r < t) \\ \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{r}{t(t^2 - r^2)} E\left(\frac{t}{r}\right) + \frac{1}{rt} K\left(\frac{t}{r}\right) \right\} & (r > t) \end{cases} \\ M_0^{(2)} &= -\int_0^\infty s \left(\frac{2\rho_1\rho_2}{\kappa\rho_0} + 1 \right) J_0(sr) J_1(st) ds \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 K 、 E は第 1 種、第 2 種の完全楕円積分であり、 $\rho_k = \rho_k(s)$ ($k = 0, 1, 2$) は

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= 2\tau \{1 - \exp(-2s\tau h)\} \\ \rho_i &= \tau_{i1} - \tau_{i2} \exp(-2s\tau h_i) \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

特異積分方程式 (21) を Gauss-Jacobi の数値積分方程式⁽²⁰⁾ を用いて数値解析することにより、 $G_0(t)$ が求まり、得られた $G_0(t)$ を用いて擾乱温度場が次のように求まる。

$$T_i^{(2)} = \sum_{j=1}^2 T_{ij}^{(2)} \quad (i = 1, 2) \quad (24)$$

ここに、 $T_{ij}^{(2)} = T_{ij}^{(2)}(r, z)$ ($i, j = 1, 2$) は

$$T_{ij}^{(2)} = \int_0^\infty R_{ij} R_0 J_0(sr) \exp(s\tau_{ij}z) ds \quad (i, j = 1, 2) \quad (25)$$

上式中、 $R_0 = R_0(s)$ 、 $R_{ij} = R_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \int_0^c t G_0(t) J_1(st) dt \\ R_{11} &= -\frac{\rho_2}{\rho_0}, \quad R_{12} = \frac{\rho_2}{\rho_0} \exp(-2s\tau h_1) \\ R_{21} &= -\frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad R_{22} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \exp(-2s\tau h_2) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

4. 電気熱弾性場解析

非擾乱温度場 $T^{(1)}$ は、特異電気弾性場を誘起しないため、擾乱温度場 $T_i^{(2)}$ ($i = 1, 2$) に起因する電気熱弾性場に注目する。従って、特異応力場の境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz1}^{(2)}(r, 0) &= 0 & (0 \leq r < c) \\ u_{z1}^{(2)}(r, 0) &= u_{z2}^{(2)}(r, 0) & (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zr1}^{(2)}(r, 0) &= 0 & (0 \leq r < c) \\ u_{r1}^{(2)}(r, 0) &= u_{r2}^{(2)}(r, 0) & (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{z1}^{(2)}(r, 0) &= -D_0 & (0 \leq r < c) \\ \phi_1^{(2)}(r, 0) &= \phi_2^{(2)}(r, 0) & (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz1}^{(2)}(r, 0) &= \sigma_{zz2}^{(2)}(r, 0), & \sigma_{zr1}^{(2)}(r, 0) &= \sigma_{zr2}^{(2)}(r, 0), \\ D_{z1}^{(2)}(r, 0) &= D_{z2}^{(2)}(r, 0), & \sigma_{z1}^{(2)}(r, h_1) &= 0, \\ \sigma_{zr1}^{(2)}(r, h_1) &= 0, & D_{z1}^{(2)}(r, h_1) &= 0, \\ \sigma_{zz2}^{(2)}(r, -h_2) &= 0, & \sigma_{zr2}^{(2)}(r, -h_2) &= 0, \\ D_{z2}^{(2)}(r, -h_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r < \infty) \quad (30)$$

変位ベクトルの成分 $u_{zi}^{(2)} = u_{zi}^{(2)}(r, z)$, $u_{ri}^{(2)} = u_{ri}^{(2)}(r, z)$ および静電ポテンシャル $\phi_i^{(2)} = \phi_i^{(2)}(r, z)$ を次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} u_{zi}^{(2)} &= u_{zi}^{(21)} + u_{zi}^{(22)} \\ u_{ri}^{(2)} &= u_{ri}^{(21)} + u_{ri}^{(22)} \\ \phi_i^{(2)} &= \phi_i^{(21)} + \phi_i^{(22)} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (31)$$

ここに、 $u_{zi}^{(21)} = u_{zi}^{(21)}(r, z)$, $u_{ri}^{(21)} = u_{ri}^{(21)}(r, z)$, $\phi_i^{(21)} = \phi_i^{(21)}(r, z)$ ($i = 1, 2$) は式 (4) の T_i を $T_i^{(2)}$ ($i = 1, 2$) とした非同次方程式の特解、 $u_{zi}^{(22)} = u_{zi}^{(22)}(r, z)$, $u_{ri}^{(22)} = u_{ri}^{(22)}(r, z)$, $\phi_i^{(22)} = \phi_i^{(22)}(r, z)$ ($i = 1, 2$) は式 (4) の T_i ($i = 1, 2$) を零とした同次方程式の一般解であり、上添字 (21), (22) はそれぞれ特解、一般解を示す。

熱弾性変位ポテンシャルを用いると、特解が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} u_{zi}^{(21)} &= \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \frac{p_{4ij}^{(1)}}{s} R_{ij} R_0 J_0(sr) \exp(sf_{ij}z) ds \\ u_{ri}^{(21)} &= \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \frac{p_{5ij}^{(1)}}{s} R_{ij} R_0 J_1(sr) \exp(sf_{ij}z) ds \\ \phi_i^{(21)} &= -\sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \frac{p_{6ij}^{(1)}}{s} R_{ij} R_0 J_0(sr) \exp(sf_{ij}z) ds \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (32)$$

ここに、 $f_{ij} = f_{ij}(s)$, $p_{kij}^{(1)} = p_{kij}^{(1)}(s)$ ($i, j = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots, 6$) は付録 1 に示す。また、Hankel 変換法を適用することにより、一般解は次のように求まる⁽¹⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} u_{zi}^{(22)} &= \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{4ij}^{(2)} A_{ij} J_0(sr) \exp(s\gamma_{ij}z) ds \\ u_{ri}^{(22)} &= \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{5ij}^{(2)} A_{ij} J_1(sr) \exp(s\gamma_{ij}z) ds \\ \phi_i^{(22)} &= -\sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{6ij}^{(2)} A_{ij} J_0(sr) \exp(s\gamma_{ij}z) ds \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (33)$$

上式中、 $p_{kij}^{(2)} = p_{kij}^{(2)}(s)$ ($i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, 6$, $k = 4, 5, 6$) は次のように与えられる。

$$p_{4ij}^{(2)} = 1, \quad p_{5ij}^{(2)} = a_{ij}, \quad p_{6ij}^{(2)} = b_{ij} \quad (34)$$

また、 $A_{ij} = A_{ij}(s)$ ($i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, 6$) は境界条件より決定される未知関数、 $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(s)$, $a_{ij} = a_{ij}(s)$, $b_{ij} = b_{ij}(s)$ ($i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, 6$) は既知関数であり、文献⁽⁷⁾の付録 1 に示されたものと同様である。

温度場解析と同様に、新しい未知関数 $G_l(r)$ ($l = 1, 2, 3$) を次のように導入する⁽¹⁹⁾。

$$G_1(r) = \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \{ u_{z1}^{(22)}(r, 0) - u_{z2}^{(22)}(r, 0) \} & \quad (0 \leq r < c) \\ 0 & \quad (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$G_2(r) = \left\{ \begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \{ u_{r1}^{(22)}(r, 0) - u_{r2}^{(22)}(r, 0) \} \right] & \quad (0 \leq r < c) \\ 0 & \quad (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$G_3(r) = \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r} \{ \phi_1^{(22)}(r, 0) - \phi_2^{(22)}(r, 0) \} & \quad (0 \leq r < c) \\ 0 & \quad (c \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

境界条件式 (30) を考慮し、混合境界条件式 (27) ~ (29) の第 1 式を用いると、未知関数 $G_l(t)$ ($l = 1, 2, 3$) に関する次の連立特異積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^c t [\{ Z_{11}^\infty M_0^{(1)} + M_{11} \} G_1(t) + M_{12} G_2(t) \\ + \{ Z_{13}^\infty M_0^{(1)} + M_{13} \} G_3(t)] dt &= \sigma_{zz0}(r) \\ \int_0^c t [M_{21} G_1(t) + \{ Z_{22}^\infty M_1^{(1)} + M_{22} \} G_2(t) \\ + M_{23} G_3(t)] dt &= \sigma_{zr0}(r) \\ \int_0^c t [\{ Z_{31}^\infty M_0^{(1)} + M_{31} \} G_1(t) + M_{32} G_2(t) \\ + \{ Z_{33}^\infty M_0^{(1)} + M_{33} \} G_3(t)] dt &= D_{z0}(r) + D_0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r < c) \quad (38)$$

ここに、積分核 $M_1^{(1)} = M_1^{(1)}(t, r)$, $M_{kl} = M_{kl}(t, r)$ および既知定数 Z_{kl}^∞ ($k, l = 1, 2, 3$) は次式で与えられる。

$$M_1^{(1)} = \begin{cases} \frac{4}{\pi r t} \left\{ K\left(\frac{r}{t}\right) - E\left(\frac{r}{t}\right) \right\} \\ + \frac{2}{\pi r t} \left\{ \frac{t^2}{t^2 - r^2} E\left(\frac{r}{t}\right) - K\left(\frac{r}{t}\right) \right\} & (r < t) \\ \frac{4}{\pi t^2} \left\{ K\left(\frac{t}{r}\right) - E\left(\frac{t}{r}\right) \right\} \\ + \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2 - r^2} E\left(\frac{t}{r}\right) & (r > t) \end{cases} \quad (39)$$

$$M_{kl} = \begin{cases} \int_0^\infty s \{Z_{kl}(s) - Z_{kl}^\infty\} J_0(sr) J_1(st) ds & (k = 1, 3, l = 1, 3) \\ \int_0^\infty s \{Z_{kl}(s) - Z_{kl}^\infty\} J_0(sr) J_2(st) ds & (k = 1, 3, l = 2) \\ \int_0^\infty s \{Z_{kl}(s) - Z_{kl}^\infty\} J_1(sr) J_1(st) ds & (k = 2, l = 1, 3) \\ \int_0^\infty s \{Z_{kl}(s) - Z_{kl}^\infty\} J_1(sr) J_2(st) ds & (k = 2, l = 2) \end{cases} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{kl}(s) &= \sum_{j=1}^6 p_{k1j}^{(2)} d_{1jl} \\ Z_{kl}^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} Z_{kl}(s) \end{aligned} \right\} (k, l = 1, 2, 3) \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{1ij}^{(2)} &= c_{130} a_{ij} + \gamma_{ij} (c_{330} - e_{330} b_{ij}) \\ p_{2ij}^{(2)} &= c_{440} (\gamma_{ij} a_{ij} - 1) + e_{150} b_{ij} \\ p_{3ij}^{(2)} &= e_{310} a_{ij} + \gamma_{ij} (e_{310} + \varepsilon_{330} b_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

また、 $\sigma_{zz0}(r)$, $\sigma_{zr0}(r)$, $D_{z0}(r)$ は擾乱温度場に起因するき裂の無い FGPM 中の $r = 0$ 面における応力・電束密度成分であり、次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}(r) &= \int_0^\infty R_0 \Gamma_1 J_0(sr) ds \\ \sigma_{zr0}(r) &= \int_0^\infty R_0 \Gamma_2 J_1(sr) ds \\ D_{z0}(r) &= \int_0^\infty R_0 \Gamma_3 J_0(sr) ds \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

上式中、 $\Gamma_k = \Gamma_k(s)$ ($k = 1, 2, 3$) は次式で与えられる。

$$\Gamma_k = \sum_{j=1}^6 p_{k1j}^{(2)} d_{1j}^T - \sum_{j=1}^2 p_{k1j}^{(1)} R_{1j} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (44)$$

式 (41), (44) 中の $d_{1jl} = d_{1jl}(s)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$, $l = 1, 2, 3$) および $d_{1j}^T = d_{1j}^T(s)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) は文献 (17) の付録 2 に示されたものと同様である。

特異積分方程式 (21), (38) を Gauss-Jacobi の数値積分公式 (20) を用いて数値解析するために、解の特異性を考慮し、 $G_l(t)$ をなめらかな関数 $\Phi_l(t)$ ($l = 0, 1, 2, 3$) を用いて次のように置く。

$$G_l(t) = \left(\frac{c+t}{c-t} \right)^{1/2} \Phi_l(t) \quad (l = 0, 1, 2, 3) \quad (45)$$

従って、き裂先端での応力拡大係数 K_I , K_{II} および電束密度拡大係数 K_D が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= (\pi c)^{1/2} \{ Z_{11}^\infty \Phi_1(c) + Z_{13}^\infty \Phi_3(c) \} \\ K_{II} &= (\pi c)^{1/2} Z_{22}^\infty \Phi_2(c) \\ K_D &= (\pi c)^{1/2} \{ Z_{31}^\infty \Phi_1(c) + Z_{33}^\infty \Phi_3(c) \} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

5. 数値結果および考察

数値計算を行い、熱的負荷 $T_0 = T_{10} - T_{20}$ あるいは電気的負荷 D_0 が作用する FGPM の電気熱弾性挙動に及ぼすき裂位置 h_1/h , き裂長さ比 c/h , 材料不均質性 βh の影響を解明する。 $z = 0$ 面における FGPM の材料定数は、 $c_{110} = 7.41 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{330} = 8.36 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{440} = 1.32 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{120} = 4.52 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{130} = 3.93 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $e_{310} = -0.16 [\text{C/m}^2]$, $e_{330} = 0.347 [\text{C/m}^2]$, $e_{150} = -0.138 [\text{C/m}^2]$, $\varepsilon_{110} = 0.825 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}]$, $\varepsilon_{330} = 0.903 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}]$, $\lambda_{110} = 0.621 \times 10^6 [\text{N/Km}^2]$, $\lambda_{330} = 0.551 \times 10^6 [\text{N/Km}^2]$, $p_{z0} = -2.94 \times 10^{-6} [\text{CK}^{-1}\text{m}^{-2}]$ (セレン化カドミウム)⁽⁸⁾ を用いた。また、熱伝導率に関しては $\kappa^2 = \kappa_{10}/\kappa_{30} = 1/1.5$ とした。

まず、熱的負荷 T_0 のみが作用する場合 ($D_0 = 0$) について検討する。図 2(a),(b),(c) は、標準化された応力拡大係数 (K_I, K_{II})/ $\lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$ および電束密度拡大係数 $K_D/p_{z0} T_0 (\pi c)^{1/2}$ に及ぼす c/h の影響を βh をパラメータとして示したグラフであり、破線は $\beta h = 1.0$, 実線は $\beta h = 0.0$, 点線は $\beta h = -1.0$ の結果である。 $\beta h = 0.0, \pm 1.0$, $h_1/h = 0.5 - \xi$ ($0 \leq \xi < 0.5$) における ($|K_I|, K_{II}$)/ $\lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$ および $|K_D|/p_{z0} T_0 (\pi c)^{1/2}$ は、 $\beta h = 0.0, \mp 1.0$, $h_1/h = 0.5 + \xi$ での値と一致するため、 $h_1/h = 0.5, 0.3, 0.1$ の場合を示した。

$K_{II}/\lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$ は c/h の増大に伴い単調に増大し、 $h_1/h = 0.1, 0.3$ の場合、 βh の増大に伴って減少する。 $h_1/h = 0.5$ の場合は、 $\beta h = 1.0$ と -1.0 の値は一致する。また、き裂が自由表面に近づくに伴って ($h_1/h = 0.5 \rightarrow 0.1$) 増大し、最大値に達した後減少する。

一方、 $K_I/\lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$, $K_D/p_{z0} T_0 (\pi c)^{1/2}$ はき裂上下領域の反対称性が喪失することにより発生す

るため、 $\beta h = 0.0$, $h_1/h = 0.5$ の値は零となり、反対称性の喪失が材料不均質性のみ起因する。 $\beta h = \pm 1.0$, $h_1/h = 0.5$ の場合は小さな値となる。また、 $h_1/h = 0.1, 0.3$ の $K_I/\lambda_{330}T_0(\pi c)^{1/2}$, $|K_D|/p_{z0}T_0(\pi c)^{1/2}$ は c/h の増大に伴って増大し、 βh の減少に伴って増大する。

Fig.2 The effect of the crack length on the stress and electric displacement intensity factors.

次に、電気的負荷 D_0 が作用する場合 ($T_0 = 0$) について検討する。図 3(a),(b),(c) は、図 2 と同様のパラメータを用いた場合の標準化された応力拡大係数 (K_I, K_{II})/ $\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ および電束密度拡大係数 $K_D/D_0(\pi c)^{1/2}$ を示したグラフである。ここに、 $\sigma_0 = -(e_{330}/\epsilon_{330})D_0$ である。熱的負荷を与えた場合と異

なり、 $\beta h = 0.0, \pm 1.0$, $h_1/h = 0.5 - \xi$ ($0 \leq \xi < 0.5$) における $(K_I, |K_{II}|)/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ および $K_D/D_0(\pi c)^{1/2}$ が、 $\beta h = 0.0, \mp 1.0$, $h_1/h = 0.5 + \xi$ での値と一致する。 $h_1/h = 0.5$, $\beta h = 0.0$ の $K_{II}/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ を除き、 $(K_I, |K_{II}|)/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$, $K_D/D_0(\pi c)^{1/2}$ は c/h の増大に伴って単調に増大する。 $h_1/h = 0.5$, $\beta h = 0.0$ の場合はき裂上下面の領域が対称となるため、 $K_{II}/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ は零となる。また、熱的負荷の場合と異なり、いずれの拡大係数もき裂が自由表面に近づくに伴って ($h_1/h = 0.5 \rightarrow 0.1$) 急激に増大し、 $K_I/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$, $K_D/D_0(\pi c)^{1/2}$ は βh にほとんど依存しない。

Fig.3 The effect of the crack length on the stress and electric displacement intensity factors.

6. 結 言

本報は、厚板に平行に存在する円板状き裂を有する傾斜機能圧電セラミックス厚板の応力・電束密度拡大係数を理論解析したものである。応力・電束密度拡大係数は、幾何学的形状、材料不均質性に依存して大きく変動する。特に、(1) 電気的負荷のみに起因する拡大係数は、き裂が自由表面に近づくに伴って急激に増大するが、熱的負荷の場合は増大量が少なく、 K_{II} は減少する傾向を示す。(2) 熱的負荷のみの場合、拡大係数は材料不均質性に大きく依存するが、電気的負荷の場合の依存度は低く、 K_I 、 K_D への影響は非常に小である。(3) 拡大係数への材料不均質性の影響はき裂位置に大きく依存することなどが明らかになった。

付 録 1

関数 $f_{ij}(s)$ と $p_{kij}^{(1)}(s)$ ($i, j = 1, 2, k = 1, 2, \dots, 6$) は

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \tau_{ij}(s) + \frac{\omega}{s} \\ p_{1ij}^{(1)} &= (c_{130} - c_{330}k_{ij}f_{ij}^2)C_{ij} - e_{330}f_{ij}N_{ij} - \lambda_{330} \\ p_{2ij}^{(1)} &= c_{440}(1 + k_{ij})f_{ij}C_{ij} + e_{150}N_{ij} \\ p_{3ij}^{(1)} &= (e_{310} - e_{330}k_{ij}f_{ij}^2)C_{ij} + e_{330}f_{ij}N_{ij} + p_{z0} \\ p_{4ij}^{(1)} &= -k_{ij}f_{ij}C_{ij}, \quad p_{5ij}^{(1)} = C_{ij}, \quad p_{6ij}^{(1)} = N_{ij} \end{aligned} \quad (48)$$

ここに、 $k_{ij} = k_{ij}(s)$, $C_{ij} = C_{ij}(s)$, $N_{ij} = N_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_{ij} &= -\frac{(f_{ij} + \beta/s)f_{ij}n_{ij}^{(11)} + n_{ij}^{(21)}}{(f_{ij} + \beta/s)f_{ij}n_{ij}^{(12)} + n_{ij}^{(22)}} \\ C_{ij} &= \frac{L_{ij}}{m_{ij}^{(1)} + k_{ij}m_{ij}^{(2)}} \\ N_{ij} &= \frac{n_{ij}^{(11)} + k_{ij}n_{ij}^{(12)}}{m_{ij}^{(1)} + k_{ij}m_{ij}^{(2)}} \end{aligned} \right\} \quad (i, j = 1, 2) \quad (49)$$

また、 $L_{ij} = L_{ij}(s)$, $m_{ij}^{(k)} = m_{ij}^{(k)}(s)$, $n_{ij}^{(kl)} = n_{ij}^{(kl)}(s)$ ($i, j, k, l = 1, 2$) は

$$\begin{aligned} L_{ij} &= b'_{21} - b'_{22}\tau_{ij}^2 - \frac{1}{s}(\beta b'_{11} + \omega b'_{12})\tau_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{s^2}(\beta^2 b'_{01} + \beta\omega b'_{02} + \omega^2 b'_{03}) \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{ij}^{(1)} &= a'_{41} - a'_{42}f_{ij}^2 - \frac{\beta}{s}a'_{31}f_{ij} - \left(\frac{\beta}{s}\right)^2 a'_{21} \\ m_{ij}^{(2)} &= (a'_{44}f_{ij}^2 - a'_{43})f_{ij}^2 \\ &\quad + \frac{\beta}{s}(a'_{33}f_{ij}^2 - a'_{32})f_{ij} + \left(\frac{\beta}{s}\right)^2 a'_{22}f_{ij}^2 \end{aligned} \right\} \quad (i, j = 1, 2) \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} n_{ij}^{(11)} &= \left\{ (H_{1r} + H_{3r})f_{ij} + \frac{\beta}{s}H_{3r} \right\} L_{ij} \\ &\quad + H_{4r}m_{ij}^{(1)} \left(\tau_{ij} + \frac{\beta + \omega}{s} \right) \\ n_{ij}^{(12)} &= \left\{ (H_{1r} - H_{2r}f_{ij}^2)f_{ij} - \frac{\beta}{s}H_{2r}f_{ij}^2 \right\} L_{ij} \\ &\quad + H_{4r}m_{ij}^{(2)} \left(\tau_{ij} + \frac{\beta + \omega}{s} \right) \\ n_{ij}^{(21)} &= \left\{ (H_{1z} + H_{3z})f_{ij} + \frac{\beta}{s}H_{3z} \right\} L_{ij} \\ &\quad + H_{4z}m_{ij}^{(1)} \left(\tau_{ij} + \frac{\beta + \omega}{s} \right) \\ n_{ij}^{(22)} &= \left\{ (H_{1z} - H_{2z}f_{ij}^2)f_{ij} - \frac{\beta}{s}H_{2z}f_{ij}^2 \right\} L_{ij} \\ &\quad + H_{4z}m_{ij}^{(2)} \left(\tau_{ij} + \frac{\beta + \omega}{s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (i, j = 1, 2) \quad (52)$$

さらに、定数 H_{lr} , H_{lz} , a'_{kl} ($k, l = 1, 2, 3, 4$) と b'_{kl} ($k = 0, 1, 2, l = 1, 2, 3$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} H_{1r} &= \frac{c_{440}\varepsilon_{330} + e_{150}\varepsilon_{330}}{\varepsilon_{330}\varepsilon_{110} - e_{150}\varepsilon_{330}} \\ H_{2r} &= \frac{c_{330}\varepsilon_{330} + e_{330}^2}{\varepsilon_{330}\varepsilon_{110} - e_{150}\varepsilon_{330}} \\ H_{3r} &= \frac{c_{130}\varepsilon_{330} + e_{310}\varepsilon_{330}}{\varepsilon_{330}\varepsilon_{110} - e_{150}\varepsilon_{330}} \\ H_{4r} &= \frac{p_{z0}\varepsilon_{330} - \lambda_{330}\varepsilon_{330}}{\varepsilon_{330}\varepsilon_{110} - e_{150}\varepsilon_{330}} \\ H_{1z} &= \frac{c_{440}\varepsilon_{110} + e_{150}^2}{\varepsilon_{150}\varepsilon_{330} - e_{330}\varepsilon_{110}} \\ H_{2z} &= \frac{c_{330}\varepsilon_{110} + e_{150}\varepsilon_{330}}{\varepsilon_{150}\varepsilon_{330} - e_{330}\varepsilon_{110}} \\ H_{3z} &= \frac{c_{130}\varepsilon_{110} + e_{150}\varepsilon_{310}}{\varepsilon_{150}\varepsilon_{330} - e_{330}\varepsilon_{110}} \\ H_{4z} &= \frac{p_{z0}\varepsilon_{150} - \lambda_{330}\varepsilon_{110}}{\varepsilon_{150}\varepsilon_{330} - e_{330}\varepsilon_{110}} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{41} &= c_{110}, \quad a'_{42} = c_{440} + (e_{150} + e_{310})(H_{1r} + H_{3r}), \\ a'_{43} &= c_{130} + c_{440} + (e_{150} + e_{310})H_{1r}, \\ a'_{44} &= (e_{150} + e_{310})H_{2r}, \\ a'_{31} &= c_{440} + (2e_{150} + e_{310})H_{3r} + e_{150}H_{1r}, \\ a'_{32} &= c_{440} + e_{150}H_{1r}, \quad a'_{33} = (2e_{150} + e_{310})H_{2r}, \\ a'_{21} &= e_{150}H_{3r}, \quad a'_{22} = e_{150}H_{2r}, \\ b'_{21} &= \lambda_{110}, \quad b'_{22} = -(e_{150} + e_{310})H_{4r}, \\ b'_{11} &= -(2e_{150} + e_{310})H_{4r}, \\ b'_{12} &= -2(e_{150} + e_{310})H_{4r}, \\ b'_{01} &= -e_{150}H_{4r}, \quad b'_{02} = -(2e_{150} + e_{310})H_{4r}, \\ b'_{03} &= -(e_{150} + e_{310})H_{4r} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

文 献

- (1) Wu, C.M. et al., Piezoelectric Ceramics with Functional Gradients: A New Application in Material Design, *Journal of American Ceramic Society*, Vol.79 No.3(1996), pp.809-812.
- (2) Li, Chunyu., Weng, G.J., Antiplane Crack Problem in Functionally Graded Piezoelectric Materials, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.481-488.
- (3) Ueda, S. et al., The Antiplane Vertical Crack Problem for a Functionally Graded Piezoelectric Strip with Surface Layers under Electromechanical Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.692 (2004), pp.567-572. (in Japanese)
- (4) Ueda, S. et al., The Surface Crack Problem for a Piezoelectric Slab with Functionally Graded Properties, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.694 (2004), pp.865-871. (in Japanese)
- (5) Ueda, S., Hatagaki, A., Impact Response of a Cracked Functionally Graded Piezoelectric Slab, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.71, No.705 (2005), pp.732-739. (in Japanese)
- (6) Ueda, S. et al., Electroelastic Interaction of a Symmetric Functionally Graded Piezoelectric Slab with a Crack Parallel to the Boundaries, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.71, No.711 (2005), pp.1517-1522. (in Japanese)
- (7) Ueda, S. et al., Electric Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.716 (2006), pp.520-526. (in Japanese)
- (8) Ashida, F., Tauchert, T.R., Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk Under Axisymmetric Heating, *Acta Mechanica*, Vol.128 (1998), pp.1-14.
- (9) Wang, B.L., Mai, Y.-W., A Cracked Piezoelectric Material Strip under Transient Thermal Loading, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.539-546.
- (10) Niraula, O.P., Noda, N., Thermal Stress Analysis in Thermopiezoelectric Strip with an Edge Crack, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.25 (2002), pp.389-405.
- (11) Ueda, S., Thermally Induced Fracture of a Piezoelectric Laminate with a Crack Normal to Interfaces, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.26 (2003), pp.311-331.
- (12) Ueda, S., Ikawa, K., The Crack Problem in Piezoelectric Strip under Thermoelectric Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.715 (2006), pp.309-316. (in Japanese)
- (13) Ueda, S., Tani, Y., Thermal Stress Intensity Factors for a Normal Crack in a Semi-Infinite Piezoelectric Material, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.716 (2006), pp.513-519. (in Japanese)
- (14) Ueda, S., Ikawa, K., Transient Response of a Cracked Piezoelectric Strip under Thermoelectric Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.720 (2006), pp.1169-1176. (in Japanese)
- (15) Wang, B.L., Noda, N. The Exact Thermoelectroelasticity Solution for a Penny Shaped Crack in Piezoelectric Materials, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.27 (2004), pp.241-251.
- (16) Wang, B.L., Noda, N., Thermally Induced Fracture of a Smart Functionally Graded Composite Structure, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.35 (2001), pp.93-109.
- (17) Ueda, S., Kondo, H., Thermoelectroelastic Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.722 (2006), pp.1503-1510. (in Japanese)
- (18) Sneddon, I.N., Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (19) Erdogan, F., Wu, B.H., Crack problems in FGM Layers under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.19 (1996), pp.237-265.
- (20) Erdogan, F. et al., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by Sih, G.C) (1972), p.368, Noordhoff, Leyden.