直角斜方形穴を有する平板の直流電流下における
角部近傍定常熱伝導問題*長谷川 孝^{*1}, 坂 真澄^{*2}Electro-Thermal Problems near the Corner
of Diamond-Shaped Hole Having Right-Angle
in a Plate under a Direct Current FlowTakashi HASEGAWA^{*3} and Masumi SAKA^{*3} Tokyo Metropolitan Industrial Technology Research Institute,
Nishigaoka 3-13-10, Kita-ku, Tokyo, 115-8586 Japan

The damage of electronic devices is often due to the generation of heat within the components. When the current is supplied to electronic components, their temperature rises because of the fact of Joule-heating. To evaluate the reliability of components subjected to Joule-heating, it is essential to analyze the associated current density and temperature distributions in the components. In this study, two-dimensional electro-thermal problems concerned with steady current flow near the corner of a hole were treated, where the shape of the hole was assumed to be a right-angled diamond. Distribution of current density near the corner was analyzed theoretically based on the Schwarz-Christoffel transformation. Electrical potential, which was calculated from the current density analyzed, was compared with FE analysis. Temperature near the corner was analyzed based on the electrical potential calculated. For the case when the heat flux related to the gradient of the temperature field associated with the problem without Joule-heating equals to zero, the temperature near the corner was verified to remain constant although current density decreased gradually far from the corner.

Key Words: Joule-Heating, Current Density, Temperature, Corner, Electronic Material, Damage Evaluation, Reliability

1. 結 言

電子機器の故障原因の 1 つに、機器を構成する部品の発熱がある。部品に電流を供給したとき、ジュール発熱によって、時としてエレクトロマイグレーションが発生し、或いは熱応力が働き、部品の機能損傷に繋がる。従ってジュール発熱を伴う熱伝導問題について詳細に解析し、部品における電流密度分布や温度分布を定量的に把握することは極めて重要である。

Saka と Abé は直流電流下の子裂端近傍における熱伝導問題について報告しており⁽¹⁾、ジュール発熱を伴う熱伝導問題の支配方程式が Laplace 方程式に変形できる⁽²⁾ことに基づき、ジュール発熱を考慮した熱流束 p を導入した。Sasagawa らは直流電流下の折れ曲がり配

線における熱伝導問題について報告しており⁽³⁾、折れ曲がる配線角部近傍の電流密度、温度分布を求めた。ここに形状が対称な配線においては、 p はジュール発熱のない、外部からの温度差による熱流束 p^* を意味することを示した。一方、Greenwood と Williamson は任意形状の物体を対象とし、電流入出力位置以外は電気的に絶縁かつ断熱を仮定し、さらに電流入出力位置の電位と温度に特別な関係を仮定したとき、等電位線上では温度は一定となることを示している⁽²⁾。本報では、これらに基づき一例として、外部からの直流電流の負荷に対して対称な直角斜方形穴を有する平板における、角部近傍の定常熱伝導問題を扱う。

電流密度は角部で集中する。従ってジュール発熱も角部で集中する。しかし角部近傍で温度分布は一樣となり、角部先端の温度は周辺より高くはならない。当該現象を解析する。

* 原稿受付 2006 年 12 月 26 日。

^{*1} 正員、(地独)東京都立産業技術研究センター(〒115-8586 東京都北区西が丘 3-13-10)。^{*2} 正員、フェロー、東北大学大学院工学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01)。

E-mail: hasegawa.takashi@iri-tokyo.jp

2. 角部近傍の電流密度分布

図1に示す遠方で一様直流電流 J_∞ が負荷される直角斜方形穴(対角線長さ $2a$)を有する平板の2次元問題を考える。ただし穴の縁は、電氣的に絶縁、かつ断熱と仮定し、左右の対称性より中心線に対し右側のみを扱うこととする。

Fig. 1 Treated problem

2・1 共役複素電流密度 角部近傍の電流密度分布の理論式を求めるため、複素ポテンシャル $w(z)$ を以下のように導入する。

$$\operatorname{Re}[w] = \phi \quad (1)$$

$$z = x_1' + ix_2' \quad (2)$$

ただし ϕ は電位を、 i は虚数単位を、 x_1' と x_2' は複素平面上の直角座標を表す。このとき Cauchy-Riemann の関係と Ohm の法則を用いると $w(z)$ の z についての微分は

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1'} - i \frac{\partial \phi}{\partial x_2'} \\ &= -\rho(J_1' - iJ_2') \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)を共役複素電流密度と呼ぶ。ただし ρ は抵抗率であり、 J_1' と J_2' は電流密度ベクトル $\mathbf{J}'$ の成分を表す。

2・2 第1次近似解の導出 角部近傍の電流密度分布を求めるために Schwarz-Christoffel 変換(以下 S-C 変換と呼ぶ)を用いる⁽⁴⁾。まず図2(a)に示した Model I における角 B 近傍の $\mathbf{J}'$ を求めることとする。角 B および C の影響を受けない十分離れた位置から J_∞ が供給され、右から左へ流れている。図2(a)の変換前の z 平面($z = x_1' + ix_2'$)は S-C 変換によって図2(b)の ζ 平面($\zeta = \xi_1 + i\xi_2$)に置き換えることができる。

S-C 変換より

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= K \zeta^{\frac{3}{2}-1} (\zeta-1)^{\frac{\pi}{\pi}-1} \\ &= K \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}} \end{aligned} \quad (4)$$

Fig. 2 S-C transformation of Model I

式(4)において z を ζ で積分し、境界条件として

B: $z = 0$ のとき $\zeta = 0$, および C: $z = -i(a/\sqrt{2})$ のとき

$\zeta = 1$ を適用すると

$$z = K \left[\sqrt{\zeta(\zeta-1)} + \log(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-1}) \right] - i \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

ここに

$$K = \frac{i}{\log i} \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

次に dw/dz を考える。図2(a)の J_∞ は S-C 変換によって図2(b)において V に置き換えられる。 w と ζ の間には V を用いて

$$w = V\zeta \quad (7)$$

なる関係が成立する⁽⁴⁾。式(4)、(7)より

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \\ &= \frac{V}{K} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)} \end{aligned} \quad (8)$$

図2の D_∞ に着目する。ここに D_∞ は角 B および C の影響を受けない、角 C から x_1' 方向に十分離れた位置を表す。 $J_1' = -J_\infty$, $J_2' = 0$ なる関係を式(3)へ代入

する。また $1 \ll \xi_1$, $\xi_2 = 0$ より $|1/\zeta| \ll 1$ なる関係を式

(8)へ代入する。式(3)と式(8)の右边を比較すると

$$\frac{V}{K} = \rho J_\infty \quad (9)$$

ここで角 B 近傍について考える。角 B 近傍においては $\zeta \rightarrow 0$ より式(4)は

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= K \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta}} \\ &= \frac{K}{i} \sqrt{\zeta} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに $1 \ll |1/\zeta|$ とした。式(10)において z を ζ で積分し、境界条件として B: $z=0$ のとき $\zeta=0$ を適用すると

$$z = \frac{K}{i} \frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

式(11)より

$$\zeta = \left(i \frac{3z}{2K} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

式(7)および式(10)より角 B 近傍の dw/dz は

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \\ &= i \frac{V}{K} \zeta^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)に式(9)、(12)を代入し、式(6)と $\log i = i(\pi/2)$ なる関係を用いると

$$\frac{dw}{dz} = i^{\frac{2}{3}} \rho J_{\infty} \cdot \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} \quad (14)$$

式(14)に $i = e^{i(\pi/2)}$, $z = re^{i\theta'}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3}\right)} \rho J_{\infty} \cdot \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \rho J_{\infty} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3}\right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

式(3)と式(15)を比較すると

$$J_1' = -J_{\infty} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3}\right) \quad (16)$$

$$J_2' = J_{\infty} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3}\right) \quad (17)$$

以上より、図 2(a)の角 B 近傍における J' は式(16)、(17)で表される。

次に図 3(a)に示した Model2 における角 C 近傍の J' を求めることとする。図 2(a)と同様に角 B および C の影響を受けない十分離れた位置から J_{∞} が供給され、右から左へ流れている。図 3(a)の変換前の z 平面 ($z = x_1' + ix_2'$) も S-C 変換によって図 3(b)の ζ 平面 ($\zeta = \xi_1 + i\xi_2$) に置き換えることができる。

Fig. 3 S-C transformation of Model2

Model1 と同様にして図 3(a)の角 C 近傍における J' を算出すると、この場合にも式(16)、(17)が得られる。

ここで図 2(a)と図 3(a)を重ね合わせると図 4 を得る。図 4 における角部近傍の J' は Model1 で求めた J' と Model2 で求めた J' を加えることにより得られる。式(16)および式(17)より図 4 における J' は

$$J_1' = -2J_{\infty} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3}\right) \quad (18)$$

$$J_2' = 2J_{\infty} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3}\right) \quad (19)$$

となる。

図 4 によって得られた J' を $\sqrt{2}$ で除し、 $x_1'-x_2'$ 座標系を反時計回りに $\pi/4$ 回転することにより、図 5 に示す x_1-x_2 座標系で表される角部近傍の電流密度ベクトル J を得る。

Fig. 4 Superposition of Model1 and Model2

Fig. 5 $\pi/4$ rotation of $x_1'-x_2'$ coordinates to x_1-x_2 coordinates

式(18), (19)より $\mathbf{J}$ は

$$\begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) \\ 2J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ただし J_1 と J_2 は電流密度ベクトル $\mathbf{J}$ の成分を表す。
ここに

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{4} \quad (21)$$

なる関係を用いて式(20)を計算すると

$$J_1 = -\sqrt{2}J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin \frac{\theta}{3} \quad (22)$$

$$J_2 = \sqrt{2}J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3} \quad (23)$$

なお、電位 ϕ の漸近解は次のように記述できる。

$$\phi = -\frac{3}{2}\sqrt{2}\rho J_\infty \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3}\theta + \phi_0 \quad (24)$$

ここに ϕ_0 は角部の電位である。

2・3 第1次近似解の補正 式(18), (19)に示した $\mathbf{J}'$ を導出する際、隣の角部の影響を無視した。ここで Model1 より得られた式(16), Model2 より得られた式(17)に対し、隣の角部の影響を考慮した補正式を適用する。なお、Model1 より得られた式(17), Model2 より得られた式(16)に対しては本補正式を適用しない。補正前と補正後の違いは

$$\begin{aligned} \text{補正前の電流密度} &= \text{角がないときの電流密度} \\ &+ \text{角部 (角 I とする) の影響} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{補正後の電流密度} &= \text{角がないときの電流密度} \\ &+ \text{角 I の影響} \\ &+ \text{隣の角部 (角 II とする) の影響} \\ &+ \text{角 I と角 II の干渉の影響} \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)の右边第4項においては

$$\begin{aligned} \text{角 I と II の干渉の影響} &= (\text{角 I の影響} \times \text{角 II の影響}) \\ &/ (\text{係数} \times \text{角がないときの電流密度}) \end{aligned} \quad (27)$$

とする。ここに本論文では式(27)における係数を便宜的に1とする。

Model1 より得られた式(16)に式(25)を適用すると、式(25)における右边第1項は

$$J_1' = -J_\infty \quad (28)$$

となり、右边第2項は

$$J_1' = -J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) - (-J_\infty) \quad (29)$$

となる。上記と同様に Model2 より得られた式(17)に式(25)を適用すると、式(25)における右边第1項は

$$J_2' = J_\infty \quad (30)$$

となり、右边第2項は

$$J_2' = J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) - J_\infty \quad (31)$$

となる。

ここに角Ⅱの影響を受けた電流密度を算出するため、新たに2つのモデルを導入する。まず図6(a)に示した Model3 における B 近傍の J' を求めることとする。2.2 節と同様に角 E および F の影響を受けない十分離れた位置から J_∞ が供給され、右から左へ流れている。図6(a)の変換前の z 平面 ($z = x_1' + ix_2'$) は S-C 変換によって図6(b)の ζ 平面 ($\zeta = \xi_1 + i\xi_2$) に置き換えることができる。

Fig. 6 S-C transformation of Model3

S-C 変換より

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= K(\zeta+1)^{\frac{\pi}{2}-1}(\zeta+\alpha)^{\frac{3}{2}\pi-1}\zeta^{\frac{\pi}{2}-1} \\ &= K\sqrt{\frac{\zeta+\alpha}{\zeta+1}} \end{aligned} \quad (32)$$

式(32)において z を ζ で積分し、境界条件として B: $z = 0$ のとき $\zeta = 0$, E: $z = -\sqrt{2}a - i(a/\sqrt{2})$ のとき $\zeta = -1$, および F: $z = -\sqrt{2}a$ のとき $\zeta = -\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned} z &= K\left[\sqrt{(\zeta+\alpha)(\zeta+1)} - (1-\alpha)\log\left(\sqrt{\zeta+\alpha} + \sqrt{\zeta+1}\right)\right] \\ &\quad - \sqrt{2}a + \frac{i}{\log i} \frac{a}{\sqrt{2}} \log \sqrt{1-\alpha} \end{aligned} \quad (33)$$

ここに

$$K = \frac{i}{\log i} \frac{a}{\sqrt{2}(1-\alpha)} \quad (34)$$

$$\alpha = 0.805 \quad (35)$$

である。式(32)~(35)を用い、Model1 での角 B 近傍における J' を算出した手順にて Model3 での B 近傍における J' を算出すると

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{V}{K\sqrt{\alpha}} \\ &= 1.115\rho J_\infty \end{aligned} \quad (36)$$

となり

$$J_1' = -1.115J_\infty \quad (37)$$

$$J_2' = 0 \quad (38)$$

となる。ただし同電流密度は角がないときの影響を含んだ電流密度である。Model3 において角がないときの J_1' は図6(a)より

$$J_1' = -J_\infty \quad (39)$$

故に角 F の影響を受けた B 近傍における J_1' は式(37), (39)より

$$J_1' = -0.115J_\infty \quad (40)$$

となる。

次に図7(a)に示した Model4 における C 近傍の J' を求めることとする。図6(a)と同様に角 E および F の影響を受けない十分離れた位置から J_∞ が供給され、右から左へ流れている。図7(a)の変換前の z 平面 ($z = x_1' + ix_2'$) も S-C 変換によって図7(b)の ζ 平面 ($\zeta = \xi_1 + i\xi_2$) に置き換えることができる。

Fig. 7 S-C transformation of Model4

Model3 と同様にして Model4 での C 近傍における J' を算出すると

$$J_1' = 0 \quad (41)$$

$$J_2' = 1.115J_\infty \quad (42)$$

となる。ただし Model3 と同様に、同電流密度は角がないときの影響を含んだ電流密度である。Model4 において角がないときの J_2' は図 7 (a) より

$$J_2' = J_\infty \quad (43)$$

故に角 E の影響を受けた C 近傍における J_2' は式(42), (43)より

$$J_2' = 0.115 J_\infty \quad (44)$$

となる。

ここで図 2 (a) と図 6 (a) を重ね合わせると図 8 (Model5 と称す) を得る。

Fig. 8 Superposition of Model1 and Model3

Model5 に式(26)を適用すると、角 B は角 I に相当し、角 F は角 II に相当する。隣の角部の影響を考慮した Model5 の J_1' は、Model1 と Model3 の J_1' 、および式(26), (27)を用いて算出できる。式(26)における右辺第 1 項、第 2 項はそれぞれ式(28) (または式(39)), (29)に相当し、右辺第 3 項は式(40)に相当する。故に Model5 の J_1' は式(26), (27)に式(28), (29), (40)を代入して

$$J_1' = -1.115 J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) \quad (45)$$

ただし $0 \leq \theta' \leq \pi$ である。式(45)が Model1 より得られた式(16)の補正式となる。

同様に図 3 (a) と図 7 (a) を重ね合わせると図 9 (Model6 と称す) を得る。

Fig. 9 Superposition of Model2 and Model4

Model5 と同様に Model6 における J_2' を求めると

$$J_2' = 1.115 J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) \quad (46)$$

ただし $-\pi/2 \leq \theta' \leq \pi/2$ である。式(46)が Model2 より得られた式(17)の補正式となる。

図 8 と図 9 を重ね合わせることで図 10 を得る。

Fig. 10 Superposition of Fig. 8 and Fig. 9

図 10 における角部近傍の J' は、図 4 において、Model1 より得られた式(16)を式(45)に、Model2 より得られた式(17)を式(46)に、それぞれ置き換えて算出することにより得られる。よって式(16), (17), (45)および式(46)より図 10 における J' は

$$J_1' = -2.115 J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) \quad (47)$$

$$J_2' = 2.115 J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta'}{3} \right) \quad (48)$$

ここに $0 \leq \theta' \leq \pi/2$ となる。式(47), (48)によって得られた J' を $\sqrt{2}$ で除し、式(21)なる関係を用いて図 5 に示した $x_1 - x_2$ 座標系にて表すと

$$J_1 = -\frac{2.115}{\sqrt{2}} J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \sin \frac{\theta}{3} \quad (49)$$

$$J_2 = \frac{2.115}{\sqrt{2}} J_\infty \left(\frac{3\pi r}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3} \quad (50)$$

式(49), (50)が J の補正式となる。ここに $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ である。なお、このときの ϕ の漸近解は次のように記述できる。

$$\phi = -\frac{3}{2} \frac{2.115}{\sqrt{2}} \rho J_{\infty} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3} \theta + \phi_0 \quad (51)$$

2・4 算出式による電位と FEM 解析結果との比較

電流密度の式の妥当性を検証するため、補正した式での ϕ を有限要素法 (FEM) による 2 次元解析結果と比較した。角部において電流密度は無限大となるため、電流密度による比較ではなく、電位で比較した。

$-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ において補正した式(51)を適用すると、 $r/a < 0.02$ で FEM との違いは 4%以下となり、 $r/a < 0.6$ では 10%以下となる。なお補正前の式(24)を適用した場合、 $r/a < 0.02$ で違いは 10%以下となったことを付記しておく。

3. 角部近傍の温度分布

電流が供給されることでジュール発熱の影響により温度分布が発生する。従って電流密度分布と温度分布には相関があると言える。そこで上記で求めた結果を用い、角部近傍の温度分布を検討する。

温度 T を次のように T^* と T^{**} とに分ける。

$$T = T^* + T^{**} \quad (52)$$

ここに T^{**} は電流入力位置と出力位置の温度が同じで、かつ外部 (電流出入位置を除く) に対し断熱で、ジュール発熱の影響を受けた温度と定義する。 T^* は外部からの熱流束の影響を受けた温度となる。

3・1 角部近傍の温度 T^{}** 図 5 の x_1 軸に対し形状が対称な場合において、次の関係が成立する⁽²⁾。

$$(T^{**} - T_0^{**}) + \frac{A}{2\lambda\rho} (\phi - \phi_0)^2 = 0 \quad (53)$$

ここに A は仕事の熱当量、 λ は熱伝導率を表し、 T_0^{**} は角部の T^{**} である。

式 (51) を式 (53) へ代入し、 $r \rightarrow 0$ において $r^{4/3} \sin^2(2/3)\theta \rightarrow 0$ なる関係を用いると

$$T^{**} - T_0^{**} \rightarrow 0 \quad (54)$$

となり、 $T^{**} \rightarrow T_0^{**}$ が θ によらず角部近傍の全領域にて成立する。

3・2 角部近傍の温度 T^* および T $p = 0$ の場合には $p = p^*$ より

$$T^* = T_0^* \quad (55)$$

が図 1 に示した領域全体に対して成立する。ここに T_0^* は角部の T^* である。式(52), (54), (55)より $p = 0$ の場合には、 θ によらず角部近傍の全領域で T は角部の温度である一定値 T_0 をとる。

ところで ϕ と T^* 、 J と $p^* (= p)$ 、 ρ と $1/\lambda$ は数学的に同一な問題として扱うことができる⁽¹⁾。 $p \neq 0$ の場

合には式(51)を用いて

$$T^* = -\frac{3}{2} \frac{2.115}{\sqrt{2}} \frac{p_{\infty}}{\lambda} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}a} \right)^{-\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3} \theta + T_0^* \quad (56)$$

が角部近傍において成り立つ。ここに p_{∞} はジュール発熱に依存しない、角部から x_2 方向に十分離れた位置での p の大きさを表す。

4. 温度分布の FEM 解析結果

第 3 章にて導出した結果の適用性を検証する目的で、ジュール発熱の影響を受けた対称軸 x_1 上と角部近傍の表面温度分布を MSC.Marc で解析した。ここに空気への熱伝達を考慮した場合についても解析を行った。解析結果を以下に示す。ここに本論文では 2 次元問題を取り扱ってきたが、本章では表面を放熱にした場合も扱うために 3 次元問題で計算し、上下両端の温度が等しい場合 ($p^* = 0$) を対象とした。

試験片形状は上下左右とも対称で中央部に直角斜方形穴を設けた。試験片の大きさは、長さを l 、幅を $2w$ 、厚さを t として、 $l/a = 36$ 、 $w/a = 3$ 、 $t/a = 0.2$ とした。2.4 節に示した電位分布を FEM で算出するに当たっては、モデルの幅の影響が出ないように十分大きな幅 ($w/a = 30$) を有したモデルにて計算したが、温度分布に関しては 3 次元問題で計算したので、計算機の処理能力を鑑み、 $w/a = 3$ とした。

通電条件として、上端面に電流密度 J_{∞} を、下端面に $-J_{\infty}$ を一様に与え、穴の縁、左右両側面、表面および裏面を電気的絶縁とした。温度条件として、上端面と下端面に空気の温度 T_{∞} を与え、裏面を断熱とした。

図 11 に穴の縁、左右両側面、表面とも断熱とした FEM モデル全体像での解析結果を、図 12 に同条件下での右側角部近傍と x_1 軸上の解析結果を示す。ここにカラーバーで示した数値は $(T - T_{\infty}) / (\rho J_{\infty}^2 a^2 / \lambda)$ なる無次元量であり、以下の図も同様である。図 13 に穴の縁を放熱 (左右両側面と表面は断熱)、図 14 に穴の縁と左右両側面を放熱 (表面は断熱)、図 15 に穴の縁、左右両側面、表面とも放熱とした、右側角部近傍と x_1 軸上の解析結果を示す。ここに放熱条件として、空気との熱伝達率 H を一般的に使用されている $30 \text{ W/m}^2\text{K}$ で与えた。図 12 と比べ、図 13, 14 の温度分布形態にほとんど差がなく、穴の縁および左右両側面における空気への熱伝達を実質的に断熱とみなせることがわかる。表面を空気と接触させた場合 (図 15) においても、角部近傍と x_1 軸上では等温である。以上より第 3 章にて導出した結果の妥当性を確認できた。なお熱伝達率を

Fig. 11 A model treated by FE analysis

Fig. 13 The temperature distribution obtained: heat convection at the edges of the hole was assumed, and the sides and the surfaces of the plate were assumed to be insulated thermally

Fig. 15 The temperature distribution obtained: heat convection at the edges of the hole, the sides and one surface of the plate was assumed, and another surface of the plate was assumed to be insulated thermally

Fig. 12 The temperature distribution obtained: the edges of the hole, the sides and the surfaces of the plate were assumed to be insulated thermally

Fig. 14 The temperature distribution obtained: heat convection at the edges of the hole and the sides of the plate was assumed, and the surfaces of the plate were assumed to be insulated thermally

Fig. 16 The temperature distribution obtained: heat convection at the edges of the hole was assumed, where $H = 1.0 \text{ TW/m}^2\cdot\text{K}$, and the sides and the surfaces of the plate were assumed to be insulated thermally

大きくした場合には、これは成り立たない。一例として図 16 に H を $1.0 \text{ TW/m}^2\cdot\text{K}$ とした場合の、穴の縁を放熱（左右両側面と表面は断熱）にした解析結果を示す。この場合には、上記と異なる温度分布形態を示している。

5. 結 言

外部からの直流電流の負荷に対して対称な直角斜方形穴を有する平板における、角部近傍の電流密度分布と温度分布を理論的に解析し定式化した。外部からの温度差による熱流束が無視できる場合、角部近傍において領域全体が等温とみなせることを示した。

謝 辞

本研究の一部は科学研究費補助金 萌芽研究 17656036 および基盤研究(S)18106003 によることを

記す。また懇切丁寧なご指導をいただいた笹川和彦助教授および S. R. Ahmed 教授に深く感謝の意を表す。

文 献

- (1) Saka, M. and Abé, H., Path-Independent Integrals for Heat Conduction Analysis in Electrothermal Crack Problems, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 15, No.1 (1992), pp. 71-83.
- (2) Greenwood, J. A. and Williamson, J. B. P., Electrical Conduction in Solids II. Theory of Temperature-Dependent Conductors, *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 246, No.1244 (1958), pp. 13-31.
- (3) Sasagawa, K. et al., Current Density and Temperature Distributions near the Corner of Angled Metal Line, *Mechanics Research Communications*, Vol. 22, No. 5 (1995), pp. 473-483.
- (4) Milne, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, 4th ed., (1962), p. 273-275, London Macmillan & Co Ltd.