表面に平行なき裂を有する対称傾斜機能圧電厚板の 非定常電気熱弾性応答*

上 田 整^{*1}, 高 木 俊 明^{*2}

Transient Thermoelectroelastic Response of a Symmetric Functionally Graded Piezoelectric Slab with a Crack Parallel to the Boundaries

Sei UEDA^{*3} and Toshiaki TAKAKI

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

In this study, the theoretical analysis of a transient piezothermoelastic problem is developed for a symmetrical functionally graded piezoelectric slab containing a center crack parallel to the free boundaries under thermal shock loading conditions. It is assumed that initially the medium is at the uniform temperature and is suddenly subjected to a uniform temperature rise along the traction-free boundaries. The crack faces are supposed to be insulated thermally and electrically. By using both the Laplace transform and the Fourier transform, the thermal and electromechanical problems are reduced to singular integral equations, respectively. The singular integral equations are solved by using the Gauss-Jacobi integration formula. Numerical methods are then employed to obtain the time dependent solutions by way of a Laplace inversion technique. The dynamic stress intensity factors, temperature change and stress distributions versus time are presented for various values of dimensionless parameters representing the crack size and the material nonhomogeneity.

Key Words: Stress Intensity Factor, Thermal Stress, Thermal Shock, Elasticity, Fracture Mechanics, Functionally Graded Piezoelectric Slab, Integral Transform

1. 結 言

圧電材料は電気エネルギーと機械エネルギーの直接相互変換機能を有する材料であり、センサやアクチュエータとして幅広く用いられている⁽¹⁾。近年、傾斜機能材料(FGM)の概念を圧電材料に拡張した傾斜機能圧電材料(FGPM)が開発され⁽²⁾、FGPMを対象とした電気破壊力学に関する研究が進められており、研究成果が数多く報告されている^{(3)~(7)}。一方、構造材料と一体化して熱変形を感知・制御する知的材料システム⁽⁸⁾の開発のために、熱的荷荷が作用するFGPMの破壊挙動の解明が要望されており^{(9),(10)}、著者らは、上下面の温度が異なるFGPM厚板に存在するき裂の定常特異電気熱弾性場を理論解析している⁽¹¹⁾。また、知的材料システムの表面温度が急激に変化する場合も重要な問題であるが、このような非定常問題に関しては、均質圧電材料を対象とした問題^{(12),(13)}や非対称傾斜機能圧電材料を対象とした問題⁽¹⁴⁾が報告されている程度であり、未解明の問題も多いのが現状である。

特に、対称傾斜機能圧電厚板は特殊な機能発現も考えられ、その電気熱弾性挙動の解明は重要である。

そこで本報では、前報⁽¹¹⁾を拡張し、表面に平行な中央き裂を有する対称傾斜機能圧電厚板の上下面の温度が瞬間的に変化する場合を考え、き裂先端の特異場を理論解析した。解析には、Laplace-Fourier積分変換法および熱弾性変位ポテンシャル法を用い、問題の解を特異積分方程式の解に帰着して解く方法を採用した^{(15),(16)}。また、特異積分方程式の数値解析には、Gauss-Jacobiの数値積分公式⁽¹⁷⁾を用い、Laplace像空間における解を得た。さらに数値Laplace逆変換法⁽¹⁸⁾を適用して非定常応力拡大係数に及ぼす幾何学的形状および材料不均質性の影響を明らかにした。

2. 問題の設定と基礎式

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において、 x 軸に対して対称に傾斜組成された幅 $2h$ の傾斜機能圧電厚板を考え、 $z=0$ 面上の厚板中央に長さ $2c$ のき裂が自由表面に平行に存在するものとする。初期温度 T_I の傾斜機能圧電厚板の上下面($z=\pm h$)の温度がそれぞれ $t=0$ で T_I+T_0 , T_I-T_0 に変化する問題を設定する。

* 原稿受付 2006年8月28日。

^{*1} 正員、大阪工業大学工学部(☎535-8585 大阪市旭区大宮5-16-1)。

^{*2} 学生員、大阪工業大学大学院工学研究科。
E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

以後、下添字 x, y, z で座標軸方向を示し、 z 軸の正の向きを分極方向とする。

Fig.1 Geometry of the crack problem in a functionally graded piezoelectric slab.

FGPM の材料特性変化が z 軸方向に指数関数的であるとする、弾性定数 $c_{11}(z)$, $c_{13}(z)$, $c_{33}(z)$, $c_{44}(z)$, 圧電定数 $e_{15}(z)$, $e_{31}(z)$, $e_{33}(z)$, 誘電定数 $\epsilon_{11}(z)$, $\epsilon_{33}(z)$, 熱弾性定数 $\lambda_{11}(z)$, $\lambda_{33}(z)$, 熱伝導率 $\kappa_x(z)$, $\kappa_z(z)$ および焦電定数 $p_z(z)$ は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} (c_{ij}, e_{ij}, \epsilon_{ii}) &= (c_{ij0}, e_{ij0}, \epsilon_{ii0}) \exp(\beta|z|) \\ (\lambda_{ii}, p_z) &= (\lambda_{ii0}, p_{z0}) \exp\{(\beta + \omega)|z|\} \\ (\kappa_x, \kappa_z) &= (\kappa_{x0}, \kappa_{z0}) \exp(\delta|z|) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 β , ω および δ は材料の不均質性を表す正または負の定数であり、下添字 0 で $z = 0$ 面における各材料特性を示す。

温度を $T(x, z, t)$, 静電ポテンシャルを $\phi(x, z, t)$, 変位ベクトルの成分を $u_x(x, z, t)$, $u_z(x, z, t)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{xx}(x, z, t)$, $\sigma_{zz}(x, z, t)$, $\sigma_{zx}(x, z, t)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_x(x, z, t)$, $D_z(x, z, t)$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \lambda_{11} T \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \lambda_{33} T \\ \sigma_{zx} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ D_x &= e_{15} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ D_z &= e_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} + p_z T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= e_{15} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ D_z &= e_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} + p_z T \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式 (1) を考慮すると、不均質材料に関する非定常熱伝導方程式は次式となる。

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

ここに、 $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z$ であり、一般に温度伝導率は大きく変化しないことが知られているため、温度伝導率 λ_0

は一定値とした。また、変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} &c_{110} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{440} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{130} + c_{440}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \\ &+ (e_{310} + e_{150}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ &+ \beta \left\{ c_{440} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + e_{150} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \\ &= \lambda_{110} \exp(\omega z) \frac{\partial T}{\partial x} \\ &c_{440} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{330} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{130} + c_{440}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \\ &+ e_{150} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + e_{330} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &+ \beta \left(c_{130} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{330} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{330} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \lambda_{330} \exp(\omega z) \left\{ \frac{\partial T}{\partial z} + (\beta + \omega) T \right\} \\ &\epsilon_{150} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + e_{330} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (e_{150} + e_{310}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \\ &- \epsilon_{110} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \epsilon_{330} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &+ \beta \left(e_{310} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{330} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \epsilon_{330} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= -p_{z0} \exp(\omega z) \left\{ \frac{\partial T}{\partial z} + (\beta + \omega) T \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

問題の対称性を考慮して、 $0 \leq |x| < \infty$, $0 \leq z \leq h$ の領域で解析することにする。一般性を失うことなく $T_I = 0$ とでき、温度場に関する初期条件式および境界・対称条件式は次式となる。

$$T(x, z, 0) = 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T(x, 0, t) &= 0 & (0 \leq |x| < c) \\ T(x, 0, t) &= 0 & (c \leq |x| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$T(x, h, t) = T_0 H(t) \quad (0 \leq |x| < \infty) \quad (8)$$

ここに、 $H(t)$ は Heaviside の単位階段関数である。また、き裂面の近似的な電気的境界条件として透過型と非透過型が提案されているが、本報では、実際のき裂問題に有効とされる非透過型を採用する⁽¹⁹⁾。従って、重ね合わせの原理を適用すると、電気弾性場に関する境界・対称条件式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx}(x, 0, t) &= 0 & (0 \leq |x| < c) \\ u_x(x, 0, t) &= 0 & (c \leq |x| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0, t) &= 0 & (0 \leq |x| < \infty) \\ D_z(x, 0, t) &= 0 & (0 \leq |x| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(x, h, t) &= 0 & (0 \leq |x| < \infty) \\ \sigma_{zx}(x, h, t) &= 0 & (0 \leq |x| < \infty) \\ D_z(x, h, t) &= 0 & (0 \leq |x| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3. 温度場解析

温度場 $T(x, z, t)$ を以下のように表す.

$$T(x, z, t) = T^{(1)}(z, t) + T^{(2)}(x, z, t) \quad (12)$$

ここに, $T^{(1)}(z, t)$ は非擾乱温度場であり, 支配方程式および初期・境界条件式は

$$\frac{d^2 T^{(1)}}{dz^2} + \delta \frac{dT^{(1)}}{dz} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{dT^{(1)}}{dt} \quad (13)$$

$$T^{(1)}(z, 0) = 0 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} T^{(1)}(0, t) &= 0 \\ T^{(1)}(h, t) &= T_0 H(t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また, $T^{(2)}(x, z, t)$ は擾乱温度場であり, 支配方程式および初期・境界条件式は

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} \quad (16)$$

$$T^{(2)}(x, z, 0) = 0 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T^{(2)}(x, 0, t) &= -\frac{d}{dz} T^{(1)}(0, t) \quad (0 \leq |x| < c) \\ T^{(2)}(x, 0, t) &= 0 \quad (c \leq |x| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$T^{(2)}(x, h, t) = 0 \quad (0 \leq |x| < \infty) \quad (19)$$

Laplace 変換およびその逆変換を次式で定義する.

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(p) \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに, Br は Bromwich の積分路である. 式 (13), (15) に Laplace 変換法を適用すると, Laplace 像空間における非擾乱温度場は次式のように求まる.

$$\begin{aligned} T^{(1)*}(z, p) &= \frac{T_0}{p} \frac{\exp(r_1 h)}{1 - \exp(-2r_0 h)} \\ &\quad \times \{\exp(-r_2 z) - \exp(-r_1 z)\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} r_1(s, p) &= \frac{\delta}{2} + r_0 \\ r_2(s, p) &= \frac{\delta}{2} - r_0 \\ r_0(s, p) &= \left(\frac{\delta^2}{4} + \frac{p}{\lambda_0} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

さらに, 式 (16) に Laplace-Fourier 積分変換法を適用して, Laplace 像空間における擾乱温度場の一般解を求める⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned} T^{(2)*}(x, z, p) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} D_j(s, p) \exp(-|s| \tau_j z) \\ &\quad \times \exp(-isx) ds \end{aligned} \quad (23)$$

ここに, $D_j(s, p)$ ($j = 1, 2$) は境界条件式より決定される未知関数であり, $\tau_j = \tau_j(s, p)$ ($j = 1, 2$) は以下のように決定される.

$$\left. \begin{aligned} \tau_1(s, p) &= -\tau(s, p) - \frac{\delta}{2|s|} \\ \tau_2(s, p) &= \tau(s, p) - \frac{\delta}{2|s|} \\ \tau(s, p) &= \left\{ \kappa^2 + \left(\frac{\delta}{2s} \right)^2 + \frac{p}{|s|^2 \lambda_0} \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

新しい未知関数 $G_0(x, p)$ を次のように導入する⁽¹⁶⁾.

$$G_0(x, p) = \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T^{(2)*}(x, 0, p) & \quad (0 \leq |x| < c) \\ 0 & \quad (c \leq |x| < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

従って, Laplace 変換された境界条件式 (19) を考慮すると, 混合境界条件式 (18) の第 1 式より, 未知関数 $G_0(\xi, p)$ に関する特異積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \left\{ \frac{1}{\xi - x} + M_0(\xi, x, p) \right\} G_0(\xi, p) d\xi \\ = -\frac{\pi}{\kappa} \frac{d}{dz} T^{(1)*}(0, p) \quad (0 \leq |x| < c) \end{aligned} \quad (26)$$

ここに, 積分核 $M_0(\xi, x, p)$ は

$$\begin{aligned} M_0(\xi, x, p) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\tau(s, p) \rho_1(s, p)}{\kappa \rho_2(s, p)} - 1 \right\} \\ &\quad \times \sin\{s(\xi - x)\} ds \end{aligned} \quad (27)$$

上式中,

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(s, p) &= 1 + \exp(-2s\tau h) \\ \rho_2(s, p) &= 1 - \exp(-2s\tau h) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

積分核 $M_0(\xi, x, p)$ は非常に収束性の悪い半無限区間積分であり, 数値解析を容易にするために, 積分核 $M_0(\xi, x, p)$ を以下のように変形する.

$$\begin{aligned} M_0(\xi, x, p) &= M_0^\infty(\xi, x, p) + \frac{\pi\delta}{4\kappa} \frac{\xi - x}{|\xi - x|} \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{2\tau(s, p) \exp(-2s\tau h)}{\kappa \rho_1(s, p)} \sin\{s(\xi - x)\} ds \end{aligned} \quad (29)$$

ここに

$$\begin{aligned}
M_0^\infty(\xi, x, p) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\tau(s, p)}{\kappa} - 1 \right\} \sin\{s(\xi - x)\} ds \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{|\xi|} + \frac{x}{|x|} \right) \frac{1 - \exp\{-\theta(|x| - |\xi|)\}}{|x| - |\xi|} \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{x}{|x|} \right) \frac{1 - \exp\{-\theta(|x| + |\xi|)\}}{|x| + |\xi|} \\ &+ \int_\theta^\infty \left\{ 1 - \frac{\tau'(s, p)}{s} \right\} \exp(-s|x|) \\ &\times \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \sinh(s|\xi|) + \frac{x}{|x|} \cosh(s|\xi|) \right\} ds \\ &- \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|} \theta \quad (|\xi| < |x|) \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{|\xi|} + \frac{x}{|x|} \right) \frac{1 - \exp\{-\theta(|\xi| - |x|)\}}{|\xi| - |x|} \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{x}{|x|} \right) \frac{1 - \exp\{-\theta(|\xi| + |x|)\}}{|\xi| + |x|} \\ &- \int_\theta^\infty \left\{ 1 - \frac{\tau'(s, p)}{s} \right\} \exp(-s|\xi|) \\ &\times \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \cosh(s|x|) + \frac{x}{|x|} \sinh(s|x|) \right\} ds \\ &+ \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{|\xi|} \theta \quad (|\xi| > |x|) \end{aligned} \right\} \quad (30)
\end{aligned}$$

上式中,

$$\left. \begin{aligned} \tau'(s, p) &= \left\{ s^2 - \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{p}{\lambda_0} + \frac{\delta^2}{4} \right) \right\}^{1/2} \\ \theta &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{p}{\lambda_0} + \frac{\delta^2}{4} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

また, Laplace 変換された混合境界条件式 (18) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_{-c}^c G_0(\xi, p) d\xi = 0 \quad (0 \leq |x| < c) \quad (32)$$

特異積分方程式 (26) および補足の条件式 (32) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁷⁾ を用いて数値解析することにより, $G_0(\xi, p)$ が求まる. さらに, 得られた $G_0(\xi, p)$ を用いて, Laplace 像空間における擾乱温度場 $T^{(2)*}(x, z, p)$ が以下のように決定される.

$$\begin{aligned}
T^{(2)*}(x, z, p) &= \sum_{j=1}^2 T_j^{(2)*}(x, z, p) \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \arctan\left(\frac{\xi - x}{\kappa z}\right) G_0(\xi, p) d\xi \\ &-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s} \left\{ \sum_{j=1}^2 R_j(s, p) \exp(s\tau_j z) \right. \\ &\quad \left. - \exp(-s\kappa z) \right\} ds \\ &\times \int_{-c}^c G_0(\xi, p) \sin\{s(\xi - x)\} d\xi \quad (z > 0) \\ &-\frac{1}{2} \int_{-c}^c \frac{\xi - x}{|\xi - x|} G_0(\xi, p) d\xi \quad (z = 0) \end{aligned} \right\} \quad (33)
\end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} T_j^{(2)*}(x, z, p) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{R_0(s, p)}{s} R_j(s, p) \\ &\quad \times \exp(|s|\tau_j z) \exp(-isx) ds \quad (j = 1, 2) \\ R_0(s, p) &= \int_{-c}^c G_0(\xi, p) \exp(is\xi) d\xi \\ R_1(s, p) &= \frac{1}{\rho_2} \\ R_2(s, p) &= -\frac{1}{\rho_2} \exp(-2s\tau h) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

また, 温度場 $T^{(1)}(z, t)$ および $T^{(2)}(x, z, t)$ は式 (21), (33) に数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁸⁾ を適用することにより求まる.

4. 電気熱弾性場解析

非擾乱温度場 $T^{(1)*}(z, p)$ は, 特異電気弾性場を誘起する熱応力成分および電束密度成分を発生しないため, 擾乱温度場 $T^{(2)*}(x, z, p)$ に起因する電気熱弾性場に注目する. Laplace 像空間における変位ベクトルの成分 $u_x^*(x, z, p)$, $u_z^*(x, z, p)$ および静電ポテンシャル $\phi^*(x, z, p)$ を次式で表す.

$$\left. \begin{aligned} u_x^*(x, z, p) &= u_x^{(1)*}(x, z, p) + u_x^{(2)*}(x, z, p) \\ u_z^*(x, z, p) &= u_z^{(1)*}(x, z, p) + u_z^{(2)*}(x, z, p) \\ \phi^*(x, z, p) &= \phi^{(1)*}(x, z, p) + \phi^{(2)*}(x, z, p) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここに, $u_x^{(1)*}(x, z, p)$, $u_z^{(1)*}(x, z, p)$, $\phi^{(1)*}(x, z, p)$ は Laplace 変換された式 (5) の温度項 $T^*(x, z, p)$ を $T^{(2)*}(x, z, p)$ とした非同次方程式の特解であり, $u_x^{(2)*}(x, z, p)$, $u_z^{(2)*}(x, z, p)$, $\phi^{(2)*}(x, z, p)$ は Laplace 変換された式 (5) の温度項を零とした同次方程式の一般解である. 以後, 上添字 (1), (2) で特解および一般解を表す. Laplace 変換された式 (2), (3) に式 (35) を代入すると応力テンソルの成分 $\sigma_{xx}^*(x, z, p)$, $\sigma_{zz}^*(x, z, p)$, $\sigma_{xz}^*(x, z, p)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_x^*(x, z, p)$, $D_z^*(x, z, p)$ が得られる.

熱弾性変位ポテンシャル法を用いると特解が次のように求まる.

$$\begin{aligned} u_x^{(1)*}(x, z, p) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s^2} p_{4j}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \\ &\quad \times \exp(|s|f_j z) R_0(s, p) \exp(-isx) ds \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(1)*}(x, z, p) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s|s|} p_{5j}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \\ &\quad \times \exp(|s|f_j z) R_0(s, p) \exp(-isx) ds \end{aligned} \quad (37)$$

$$\phi^{(1)*}(x, z, p) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s|s|} p_{6j}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \times \exp(|s|f_j z) R_0(s, p) \exp(-isx) ds \quad (38)$$

ここに, $f_j = f_j(s, p)$, $p_{kj}^{(1)}(s, p)$ ($j = 1, 2, k = 1, 2, \dots, 6$) は付録 1 に示す既知関数である。また、一般解は Fourier 変換法により次のように求まる⁽¹⁵⁾。

$$u_z^{(2)*}(x, z, p) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|}{s} p_{4j}^{(2)}(s) A_j(s, p) \times \exp(|s|\gamma_j z) \exp(-isx) ds \quad (39)$$

$$u_z^{(2)*}(x, z, p) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} p_{5j}^{(2)}(s) A_j(s, p) \times \exp(|s|\gamma_j z) \exp(-isx) ds \quad (40)$$

$$\phi^{(2)*}(x, z, p) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} p_{6j}^{(2)}(s) A_j(s, p) \times \exp(|s|\gamma_j z) \exp(-isx) ds \quad (41)$$

ここに, $A_j(s, p)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) は境界・対称条件式より決定される未知関数であり, $\gamma_j = \gamma_j(s)$, $p_{kj}^{(2)}(s)$ ($j, k = 1, 2, \dots, 6$) は前報⁽¹¹⁾の付録 2 に示す既知関数である。

温度場解析と同様に, 問題の解を特異積分方程式の解に導くため, 次の新しい未知関数 $G_1(x, p)$ を導入する⁽¹⁶⁾。

$$G_1(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u_x^{(2)*}(x, 0, p) & (0 \leq |x| < c) \\ 0 & (c \leq |x| < \infty) \end{cases} \quad (42)$$

Laplace 変換された境界条件式 (10), (11) を考慮すると, 混合境界条件式 (9) の第 1 式より, 未知関数 $G_1(x, p)$ に関する特異積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \frac{1}{\xi - x} + M_1(\xi, x) \right\} G_1(\xi, p) d\xi = \frac{1}{Z_2^\infty} \sigma_T^*(x, p) \quad (0 \leq |x| < c) \quad (43)$$

ここに, 積分核 $M_1(\xi, x)$ および定数 Z_2^∞ は以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} Z_2^\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} Z_2(s), \quad Z_2(s) = \sum_{j=1}^6 p_{2j}^{(2)}(s) d_j(s) \\ M_1(\xi, x) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{Z_2(s)}{Z_2^\infty} - 1 \right\} \sin\{s(\xi - x)\} ds \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

式中の $d_j(s)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) は前報⁽¹¹⁾の付録 3 に示されている。また, $\sigma_T^*(x, p)$ は, 擾乱温度場 $T^{(2)*}(x, z, p)$ に起因するもので, き裂が存在しないとした場合の x 軸上での熱応力成分であり, 以下のように得られる。

$$\sigma_T^*(x, p) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s} \left\{ \sum_{j=1}^6 p_{2j}^{(2)}(s) d_j^T(s, p) - \sum_{j=1}^2 p_{2j}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \right\} \sin(sx) ds \times \int_{-c}^c G_0(\xi, p) \sin(s\xi) d\xi \quad (45)$$

ここに, 既知関数 $d_j^T(s, p)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) は付録 2 に示す。また, Laplace 変換された混合境界条件式 (9) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる。

$$\int_{-c}^c G_1(\xi, p) d\xi = 0 \quad (46)$$

特異積分方程式 (26), (43) および補足の条件式 (32), (46) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁷⁾を用いて数値解析するために, 解の特異性を考慮し, $G_i(\xi, p)$ ($i = 0, 1$) を滑らかな関数 $\Phi_i(\xi, p)$ ($i = 0, 1$) を用いて次のように置く。

$$G_i(\xi, p) = \frac{c\Phi_i(\xi, p)}{\{(c+\xi)(c-\xi)\}^{1/2}} \quad (i = 0, 1) \quad (47)$$

従って, き裂先端 $x = c$ での応力拡大係数 K_{II} が次のように得られる。

$$K_{II}(t) = \lim_{x \rightarrow c} \{2\pi(x - c)\}^{1/2} \sigma_{zx}(x, 0, t) = (\pi c)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \Phi_1(c, p) \exp(pt) dp \quad (48)$$

5. 数値結果および考察

式 (48) に数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁸⁾を適用し, 電気熱弾性場に及ぼす幾何学的形状および材料不均質性パラメータ βh の影響を明らかにする。数値計算例として, $z = 0$ 面における圧電厚板の材料特性は, 次を示すセレン化カドミウムの電気熱弾性特性⁽⁸⁾を用いた。

$$\left. \begin{aligned} c_{110} &= c_{220} = 7.41 \times 10^{10} [\text{Pa}], c_{330} = 8.36 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ c_{440} &= c_{550} = 1.32 \times 10^{10} [\text{Pa}], c_{660} = 1.45 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ c_{120} &= 4.52 \times 10^{10} [\text{Pa}], c_{130} = c_{230} = 3.93 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ e_{310} &= e_{320} = -0.16 [\text{C/m}^2], e_{330} = 0.347 [\text{C/m}^2] \\ e_{150} &= e_{240} = -0.138 [\text{C/m}^2] \\ \varepsilon_{110} &= \varepsilon_{220} = 0.825 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \varepsilon_{330} &= 0.903 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \alpha_x &= \alpha_y = 4.396 \times 10^{-6} [\text{K}^{-1}] \\ \alpha_z &= 2.458 \times 10^{-6} [\text{K}^{-1}] \\ p_{20} &= -2.94 \times 10^{-6} [\text{CK}^{-1}\text{m}^{-2}] \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ここに, $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ は線膨張係数であり, 熱弾性定数 $\lambda_{11}, \lambda_{33}$ は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{110} &= c_{110}\alpha_x + c_{120}\alpha_y + c_{130}\alpha_z \\ \lambda_{330} &= c_{130}\alpha_x + c_{230}\alpha_y + c_{330}\alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

また、熱伝導率に関しては、 $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z = 1/1.5$ と仮定し、定数 β, ω, δ を $\beta = \omega = \delta$ とした。

まず、温度場 $T(x, z, t)$ について検討する。図2は x 軸上における標準化された温度分布 T/T_0 と無次元時間 $F = t\lambda_0/c^2$ の関係を示したグラフであり、 $\beta h = 0.5$ 、き裂長さ比 $c/h = 0.5$ とした。 F の増大に伴い、上下面の温度差およびき裂先端近傍の温度勾配は急激に増大し、 $F \rightarrow \infty$ で最も大となる。

Fig.2 The temperature on the crack face and the crack extended line for $c/h = 0.5$.

次に、電気弾性場について検討する。図3は図2の温度場によって発生する標準化された熱応力成分 $\sigma_T / \lambda_{330} T_0$ を示したグラフである。 $\sigma_T / \lambda_{330} T_0$ の絶対値は F の増大に伴い増大し、 $F \rightarrow \infty$ で最大となる。また、 $\sigma_T / \lambda_{330} T_0$ はき裂先端 $|x| = c$ で不連続に変化する。

Fig.3 σ_T due to the temperature shown in Fig.2.

最後に、標準化された応力拡大係数 $|K_{II}| / \lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$ の時間的挙動に及ぼす βh および c/h の影響について検討する。図4は $|K_{II}| / \lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$ の時間的挙動に及ぼす βh および c/h の影響を示したグラフであり、 $c/h = 0.25, 0.5, 1.0$ 、 $\beta h = 0.5, 0.0, -0.5$ とした。 $c/h = 1.0$ の場合、 $|K_{II}| / \lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$ は F の増大に伴い $F \approx 1$ 近傍まで急激に増大した後、ゆるやかに静的値に漸近する。 $c/h = 0.25, 0.5$ の場合も同様の傾向を示すが、 c/h の増大に伴い、 $|K_{II}| / \lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$

の F による変化率は増大する。また、 βh および c/h の増大に伴い $|K_{II}| / \lambda_{330} T_0 (\pi c)^{1/2}$ は増大する。

Fig.4 The effect of nonhomogeneity and crack length on the stress intensity factor.

6. 結 言

本報は、表面に平行な中央き裂を有する対称傾斜機能圧電厚板が熱衝撃負荷を受ける場合の非定常応力拡大係数を理論解析したものである。解析には、Laplace-Fourier 積分変換法および熱弾性変位ポテンシャル法を用い、問題の解を特異積分方程式の解に帰着して解く方法を採用した。数値計算を行い、応力拡大係数の時間的挙動に及ぼす幾何学的形状および材料不均質性の影響を定量的に明らかにした。応力拡大係数の時間的挙動はこれらのパラメータに依存して大きく変化する。また、応力拡大係数の最大値は無限時間後に発生するが、き裂が大の場合、加熱初期に急激に増大するため注意が必要である。

付 録 1

$f_j(s, p)$ および $p_{kj}^{(1)}(s, p)$ ($j = 1, 2, k = 1, 2, \dots, 6$) は

$$\left. \begin{aligned} f_j(s, p) &= \tau_j(s, p) + \frac{\omega}{|s|} \\ p_{1j}^{(1)}(s, p) &= \{c_{130} - c_{330}k_j(s, p)f_j(s, p)^2\} C_j(s, p) \\ &\quad - e_{330}f_j(s, p)N_j(s, p) + \lambda_{330} \\ p_{2j}^{(1)}(s, p) &= c_{440} \{1 + k_j(s, p)\} f_j(s, p)C_j(s, p) \\ &\quad + e_{150}N_j \\ p_{3j}^{(1)}(s, p) &= \{e_{310} - e_{330}k_j(s, p)f_j(s, p)^2\} C_j(s, p) \\ &\quad + e_{330}f_j(s, p)N_j(s, p) - p_{z0} \\ p_{4j}^{(1)}(s, p) &= C_j(s, p) \\ p_{5j}^{(1)}(s, p) &= ik_j(s, p)f_j(s, p)C_j(s, p) \\ p_{6j}^{(1)}(s, p) &= -iN_j(s, p) \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2) \quad (51)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} k_j(s, p) &= \frac{\{f_j(s, p) + \beta/|s|\} f_j(s, p) n_j^{(11)}(s, p) + n_j^{(12)}(s, p)}{\{f_j(s, p) + \beta/|s|\} f_j(s, p) n_j^{(21)}(s, p) + n_j^{(22)}(s, p)} \\ C_j(s, p) &= \frac{L_j(s, p)}{m_j^{(1)}(s, p) + k_j(s, p) m_j^{(2)}(s, p)} \\ N_j(s, p) &= \frac{n_j^{(11)}(s, p) + k_j(s, p) n_j^{(11)}(s, p)}{m_j^{(1)}(s, p) + k_j(s, p) m_j^{(2)}(s, p)} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2) \quad (52)$$

また

$$\left. \begin{aligned} L_j(s, p) &= -b'_{21} + \tau_j(s, p)^2 b'_{22} + \frac{1}{|s|} (\beta b'_{11} + \omega b'_{12}) \\ &\quad \times \tau_j(s, p) + \frac{1}{s^2} (\beta^2 b'_{01} + \beta \omega b'_{02} + \omega^2 b'_{03}) \\ m_j^{(1)}(s, p) &= a'_{41} - a'_{42} f_j(s, p)^2 - \frac{\beta}{|s|} a'_{31} f_j(s, p) \\ &\quad - \left(\frac{\beta}{s} \right)^2 a'_{21} \\ m_j^{(2)}(s, p) &= \{a'_{44} f_j(s, p)^2 + a'_{43}\} f_j(s, p)^2 \\ &\quad + \frac{\beta}{|s|} \{a'_{33} f_j(s, p)^2 + a'_{32}\} f_j(s, p) + \left(\frac{\beta}{s} \right)^2 a'_{22} f_j(s, p)^2 \\ n_j^{(11)} &= \left\{ (H_{1x} + H_{3x}) f_j(s, p) + \frac{\beta}{|s|} H_{3x} \right\} L_j(s, p) \\ &\quad - H_{4x} m_j^{(1)}(s, p) \left\{ \tau_j(s, p) + \frac{\beta + \omega}{|s|} \right\} \\ n_j^{(12)} &= \left\{ (H_{1z} + H_{3z}) f_j(s, p) + \frac{\beta}{|s|} H_{3z} \right\} L_j(s, p) \\ &\quad - H_{4z} m_j^{(1)}(s, p) \left\{ \tau_j(s, p) + \frac{\beta + \omega}{|s|} \right\} \\ n_j^{(21)} &= \left[\{H_{1x} - H_{2x} f_j(s, p)^2\} f_j(s, p) - \frac{\beta}{|s|} H_{2x} f_j(s, p)^2 \right] \\ &\quad \times L_j(s, p) - H_{4x} m_j^{(2)}(s, p) \left\{ \tau_j(s, p) + \frac{\beta + \omega}{|s|} \right\} \\ n_j^{(22)} &= \left[\{H_{1z} - H_{2z} f_j(s, p)^2\} f_j(s, p) - \frac{\beta}{|s|} H_{2z} f_j(s, p)^2 \right] \\ &\quad \times L_j(s, p) - H_{4z} m_j^{(2)}(s, p) \left\{ \tau_j(s, p) + \frac{\beta + \omega}{|s|} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2) \quad (53)$$

付 録 2

 $d_j^T(s, p) \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \text{ は}$

$$d_j^T(s, p) = \sum_{k=1}^6 q_{j,k}(s) P_k(s, p) \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (54)$$

ここに $q_{j,k}(s) \quad (j, k = 1, 2, \dots, 6)$ はマトリクス $Q = \Delta^{-1}$ の要素である。マトリクス Δ の要素 $\delta_{j,k}(s) \quad (j, k = 1, 2, \dots, 6)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{j,k}(s) &= p_{jk}^{(2)}(s) \exp(|s| \gamma_k h) \quad (j = 1, 2, 3) \\ \delta_{4,k}(s) &= p_{1k}^{(2)}(s) \\ \delta_{5,k}(s) &= p_{3k}^{(2)}(s) \\ \delta_{6,k}(s) &= p_{4k}^{(2)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, 6) \quad (55)$$

また

$$\left. \begin{aligned} P_k(s, p) &= \frac{i R_0(s, p)}{s|s|} \sum_{j=1}^2 p_{kj}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \\ &\quad \times \exp(|s| f_j h) \quad (k = 1, 2, 3) \\ P_4(s, p) &= \frac{i R_0(s, p)}{s|s|} \sum_{j=1}^2 p_{1j}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \\ P_5(s, p) &= \frac{i R_0(s, p)}{s|s|} \sum_{j=1}^2 p_{3j}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \\ P_6(s, p) &= \frac{i R_0(s, p)}{s|s|} \sum_{j=1}^2 p_{4j}^{(1)}(s, p) R_j(s, p) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

文 献

- (1) Rao, S.S., Sunar, M., Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures : A Survey, *Applied Mechanics Review*, Vol.47 (1994), pp.113-123.
- (2) Wu, C.M. et al., Piezoelectric Ceramics with Functional Gradients: A New Application in Material Design, *Journal of American Ceramics Society*, Vol.79 No.3(1996), pp.809-812.
- (3) Li, Chunyu., Weng, G.J., Antiplane Crack Problem in Functionally Graded Piezoelectric Materials, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.481-488.
- (4) Wang, B.L., Zhang, X.H., A Mode III Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Material Strip, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.71 (2004), pp.327-333.
- (5) Ueda, S. et al., The Surface Crack Problem for a Piezoelectric Slab with Functionally Graded Properties, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.694 (2004), pp.872-879. (in Japanese)
- (6) Ueda, S., Hatagaki, A., Impact response of a cracked functionally graded piezoelectric slab, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.71, No.711 (2005), pp.1517-1522. (in Japanese)
- (7) Ueda, S. et al., Electroelastic Interaction of a Symmetric Functionally Graded Piezoelectric Slab with a Crack Parallel to the Boundaries, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.71, No.711 (2005), pp.1517-1522. (in Japanese)
- (8) Ashida, F., Tauchert, T.R., Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk Under Axisymmetric Heating, *Acta Mechanica*, Vol.128 (1998), pp.1-14.

- (9) Wang, B.L., Noda, N., Thermally Induced Fracture of a Smart Functionally Graded Composite Structure, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.35 (2001), pp.93-109.
- (10) Ueda, S. et al., Thermo-electro-mechanical Interactions of a Functionally Graded Piezoelectric Plate with a Finite Crack, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.694 (2004), pp.872-879. (in Japanese)
- (11) Ueda, S., Takaki, T., Thermoelectroelastic Response of a Symmetric Functionally Graded Piezoelectric Slab with a Crack Parallel to the Boundaries, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.720 (2006), pp.1177-1184. (in Japanese)
- (12) Wang, B.L., Mai, Y.W., A Cracked Piezoelectric Material Strip under Transient Thermal Loading, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.539-546.
- (13) Ueda, S., Ikawa, T., Transient Response of a Cracked Piezoelectric Strip under Thermo-electric Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.720 (2006), pp.1169-1176. (in Japanese)
- (14) Ueda, S., Kondo, H., Thermal Shock Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Material Plate, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.727 (2007), pp.387-394. (in Japanese)
- (15) Sneddon, I.N., Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (16) Erdogan, F., Wu, B.H., Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.19 (1996), pp.237-265.
- (17) Erdogan, F. et al., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by G.C.Sih), (1972), Noordhoff, Leyden.
- (18) Miller, M.K., Guy, W.T., Numerical Inversion of the Laplace Transform by Use of Jacobi Polynomials, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.3 (1966), pp.624-635.
- (19) Wang, B.L., Mai, Y.W., Impermeable Crack and Permeable Crack Assumptions, Which One Is More Realistic?, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.71 (2004), pp.575-578.