短繊維強化複合材中の繊維の可視部分および
隠れた部分の長さの予測理論のシミュレーションによる検討*鈴 木 寛^{*1}Simulational Examination of a Forecast Theory for Visible and
Overlapping Parts of Fibers in a Short Fiber Reinforced CompositeHiroshi SUZUKI^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Hachinohe Institute of Technology,
88-1 Obiraki, Myo, Hachinohe-shi, Aomori, 031-8501 Japan

In this study, the theory proposed by the author to forecast distributions of length of visible part separated by other fibers and length of overlapping part covered with other fibers which could be observed under the surface of a short fiber reinforced composite was examined. For the examination, packing of fibers in space was computer simulated. The fibers were packed in a cubic space. Random numbers were used to assign position and orientation to the fibers. The computer-simulated short fiber reinforced composite was sectioned at a prescribed thickness. The sectioned simulated sample was observed from the surface, and the distributions of the length of the visible part and the overlapping part were measured. The obtained distributions and the average values of the length of those parts were compared with the distributions and the average values estimated by the theory. The distribution and average value of the length of the visible part estimated by the theory was almost corresponding to the simulational result. In the case that fiber orientation distribution was mostly random in three dimensions, the distribution and average value of the length of the overlapping part estimated by the theory was roughly corresponding to the simulational result.

Key Words: Composite Material, Digital Image Processing, Packing Problem, Short Fiber, Visible Part, Overlapping Part

1. 緒 言

短繊維強化複合材は、その成形性の良さもあって、現在ではさまざまな分野で使用されている。短繊維強化複合材の力学的特性は、強化繊維の方向分布や長さに大きく依存する^{(1)~(3)}。

短繊維強化複合材内部の繊維の状態を調べるには、大きく分けて3種類のアプローチがある。一つは複合材表面をきれいに研磨して、研磨面に現れる繊維断面像を利用する方法である⁽⁴⁾。いわば、複合材表面で得られる情報を利用する方法である。一つは、光学顕微鏡あるいは共焦点形レーザ顕微鏡を使って、研磨面下に観察される繊維の三次元的配置を求める方法である⁽⁵⁾。いわば、複合材表面から観察して得られる三次元情報を利用する方法である。もう一つは、複合材の表面を何度も削り、そのたびごとに同一の場所で繊維断面の輪郭を記録して、その輪郭をつないで複合材中の繊維の三次元配置を求めたり⁽⁶⁾、XMT (X-ray computed microtomography) を使用して、複合材中の繊維の三次元配置を求めたりする方法である⁽⁷⁾。いわ

ば、複合材中の繊維の配置を正確に得る方法である。

複合材表面で得られる情報を利用する方法は、大掛かりな設備も必要とせず、これを使って繊維方向分布を容易に求めることができる。しかし、この方法は試料に垂直な方向に対して繊維中心軸がなす角度が θ なのか $\theta+\pi$ なのかわからないといった問題⁽⁸⁾や、表面の情報のみを利用するため測定する範囲が大きくなりがちで、局所的な繊維方向分布の乱れに対応できないといった問題をもっている。複合材中の繊維の配置を正確に得る方法は、大掛かりな装置を必要としており、誰もがそれを利用できるわけではない。

図1の上の図は、コンピュータ上で作成した複合材中にある繊維の両端が表面から見える角度で示したものである。すべての繊維の形状は円柱形で、繊維の直径および長さは同じである。ガラス繊維を強化材として使用して射出成型で短繊維強化複合材を作製する場合、複合材中の繊維はうねりをもつが、本研究ではそのことは考慮していない。表面上に一点鎖線を描いた繊維は、複合材表面に垂直な方向に対して角度 θ をなしている。中央の図は、これを複合材表面に対して垂直な方向から観察したものである。複合材表面から観察して得られる三次元情報を利用するときには、この図のような様相が観察できる。三次元情報を利用する

* 原稿受付 2007年1月10日。

^{*1} 正員、八戸工業大学工学部(〒031-8501 八戸市大字妙字大開 88-1)。

E-mail: suzuki@hi-tech.ac.jp

方法を使用するに当たっての問題点としては、図1からわかるように、他の繊維に区切られたいわゆる可視部分の長さが短いことや、試料表面から離れるに従って他の繊維に覆われる部分の幅が大きくなり、特に覆われた先端がどこまで伸びているのかわからないことが挙げられる。

先の論文⁽⁹⁾で著者は試料表面からの観察による短繊維強化複合材中の繊維方向分布測定に関する理論的検討を行った。そのなかで、測定精度を高めるためには、より繊維の長い範囲での計測が必要であることを指摘した。したがって、あらかじめ繊維が表面から観察可能な程度(可視部分の長さの分布)および他の繊維に覆われている程度(他の繊維に覆われる幅の分布)を押さえておくことは表面からの観察による繊維方向分布測定にとって重要となる。なぜならば、精度向上には、他の繊維によって区切られて観察される繊維をつなぎ合わせて1本の繊維とみなす作業が必要となるからである。

また、他の繊維に覆われた繊維の先端がどこに存在するかわかれば、文献(9)で述べた方法と合わせて使用することで、繊維の長さ、方向および位置がわかり、このデータを使って有限要素法のメッシュを作成

し、短繊維強化複合材の強度や剛性を実際の状態に即して計算することが可能となるかもしれない。

先に、著者は図1の下図のように(詳細は2・1節で解説する)他の繊維の重なり部分を幅一定の四角形で単純化して、他の繊維に区切られたいわゆる可視部分の長さや⁽¹⁰⁾、他の繊維に覆われる部分の幅⁽¹¹⁾を予測するための理論式を解析的に導いている。誘導に当たり四角形の存在確率は試料表面からの深さに比例すると仮定し、単純に幾何学的に理論式を導いている。これらは解析的な式なので、プログラミングも容易であり、計算時間も短くて済むが、これら理論式がどの程度正確なのかの検証がなされていない。

本研究においては、先に提案した理論の検証を行った。繊維の直径、長さおよび方向分布は既知として、空間中に繊維を数値的に詰め込み、短繊維強化複合材をコンピュータ上で作成した。この複合材を切断して表面から観察し、他の繊維に区切られたいわゆる可視部分の長さや、他の繊維に覆われる部分の幅を求めた。得られた結果と先に提案した理論結果との比較検討を行い、提案した理論の適用範囲を検証した。

2. 繊維の可視部分および覆われる部分の長さ予測理論

2・1 繊維の重なりモデル化

図1の中央の図に示した繊維の重なりを、図1の下図のように単純化する。繊維を試料表面に延長し、交差したところに x 軸の原点 O をとる。 x 軸の方向は、試料表面に投影された繊維の中心軸に平行とする。オリジナルの繊維の試料表面への投影長さを l_w 、重なりを考える範囲の長さを l_{max} とする。この長さ l_{max} は、オリジナルの繊維を試料表面および裏面に延長し、これを試料表面に投影した長さよりも長くしなければならない。さらにオリジナルの繊維の表面に近いほうの端を試料表面に投影したときの x 座標を x_a とする。図1の中央の図を見ると、シミュレーションにおいては、注目する繊維に他の繊維がさまざまな角度で重なり、さらに、繊維の端が重なっている場合も多数見受けられるが、本研究では、注目する繊維に他の1本の繊維が重なった部分を一定幅 w の四角形で単純化する。幅 w は繊維の直径 d 、または無限に長い繊維がランダムに重なったときの重なり部分の幅の平均値 $\pi d/2$ のいずれかとする。繊維両端の間で繊維が重なった部分の幅を w_l 、繊維端まで重なる部分の幅を w_u とする。繊維の重なりを単純化した四角形の位置を四角形の左端の x 座標で表す。繊維端と一つの四角形に挟まれてできる可視部分の長さを l_t 、二つの四角形に挟まれてできる可

Fig.1 Simplification of fiber overlapping on the fiber

視部分の長さを l_v とする.

本研究では重なる繊維の位置の確率密度関数 $f_d(x, \theta)$ は $x = -w \sim x = l_{\max}$ の範囲内で

$$f_d(x, \theta) = a_d x + b_d \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表されるものとする. ここで

$$b_d = \frac{a_d(-l_{\max} + w)}{2} + \frac{1}{l_{\max} + w} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1)は重なる繊維の数が試料両面からの距離に比例して増加することを示している.

繊維の重なりを単純化した四角形は $x = -w \sim x = l_{\max}$ の範囲に n_a 個存在するものとする. 四角形の個数 n_a および式(1)の係数 a_d の決定については文献(10)によった. 他の1本の繊維が重なった部分を幅 d の四角形で近似したときの四角形の個数のほうが, 幅

$\pi d/2$ の四角形で近似したときの四角形の個数より多くなった.

2.2 可視部分の長さ分布

本節では, 図1に示した繊維端と一つの四角形に挟まれてできる可視部分の長さ l_i をさらに2種類に分類する. 繊維上端あるいは表面に切られてできる繊維端と一つの四角形に挟まれてできる可視部分の長さを l_{i1} とし, 繊維下端あるいは裏面に切られてできる繊維端と一つの四角形に挟まれてできる可視部分の長さを l_{i2} とする.

繊維上端あるいは表面に切られてできる繊維端と一つの四角形に挟まれてできる可視部分の長さ l_{i1} が $x_d \sim x_d + dx_d$ の範囲にある確率 $f_{i1} dx_d$ は文献(10)より

$$f_{i1} dx_d = \begin{cases} n_a \left[\frac{a_d(2x_d + 2x_a - l_{\max} + w)}{2} + \frac{1}{l_{\max} + w} \right] \left\{ -\frac{a_d[x_d^2 + (2x_a - l_{\max} + w)x_d + (2x_a - l_{\max})w]}{2} \right. \\ \left. + \frac{l_{\max} - x_d}{l_{\max} + w} \right\}^{n_a-1} dx_d & (0 \leq x_d < l_w) \\ 0 & (x_d < 0 \text{ or } x_d \geq l_w) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

繊維下端あるいは裏面に切られてできる繊維端と一つの四角形に挟まれてできる可視部分の長さ l_{i2} が $x_d \sim x_d + dx_d$ の範囲にある確率 $f_{i2} dx_d$ は

$$f_{i2} dx_d = \begin{cases} n_a \left[\frac{a_d(-2x_d + 2x_a + 2l_w - l_{\max} - w)}{2} + \frac{1}{l_{\max} + w} \right] \left\{ -\frac{a_d[-x_d^2 + (2x_a + 2l_w - l_{\max} - w)x_d]}{2} \right. \\ \left. - \frac{a_d(2x_a + l_w - l_{\max})w}{2} + \frac{l_{\max} - x_d}{l_{\max} + w} \right\}^{n_a-1} dx_d & (0 \leq x_d < l_w) \\ 0 & (x_d < 0 \text{ or } x_d \geq l_w) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4)$$

二つの四角形に挟まれてできる可視部分の長さ l_v が $x_d \sim x_d + dx_d$ の範囲にある本数 $f_v dx_d$ は

$$f_v dx_d = \begin{cases} n_a(n_a - 1) \int_{x_1 = x_d - w}^{x_1 = x_d + x_a + l_w - w} f_{i2} P_{i2} dx_1 dx_d & (0 \leq x_d < l_w) \\ 0 & (x_d < 0 \text{ or } x_d \geq l_w) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $f_{i2} dx_1$ および P_{i2} はそれぞれ

$$f_{i2} dx_1 = \left[\frac{a_d(2x_1 - l_{\max} + w)}{2} + \frac{1}{l_{\max} + w} \right] \left[\frac{a_d(2x_1 + 2x_d - l_{\max} + 3w)}{2} + \frac{1}{l_{\max} + w} \right] dx_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$P_{i2} = \left\{ 1 - (x_d + w) \left[\frac{a_d(2x_1 + x_d - l_{\max} + 2w)}{2} + \frac{1}{l_{\max} + w} \right] \right\}^{n_a-2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(3)~(5)は1本の繊維における可視部分の長さ分布を表し, これに角度, 長さ, 位置のそれぞれの微小範囲における繊維本数を掛けて積分すれば, 観察される可視部分の長さ分布を求めることができる⁽¹⁰⁾.

2.3 1本の繊維上に重なる長方形の幅の分布 複数列の四角形からなる長方形の幅の分布を解析的に求めた結果を紹介する. 著者は文献(11)でこの幅の分布を誘導しているが, スペースの関係で, 完全な形では示していない. ここでは, 誘導方法を省略して, 結果のみを示す.

図1のように, n_a 個の四角形が $x = -w \sim x = l_{\max}$ の範囲にあるとき, この中のいくつかの四角形が重なって細長い長方形を形成する. k 個の四角形が重なって位置が x_i , 幅 w_i の長方形が形成されたとき, この長方形に残りの $n_a - k$ 個の四角形の中の一つの四角形も重ならない確率 $P_u(x_i, w_i, n_a - k, \theta)$ は

$$P_u(x_i, w_i, n_a - k, \theta) = \left[-\frac{a_d}{2} w_i^2 - (a_d x_i + a_d w + b_d) w_i + \frac{a_d}{2} w^2 - b_d w + 1 \right]^{n_a-k} \quad \dots\dots\dots (8)$$

次に、四角形が他の四角形に重ならず単独に存在する確率を示す。繊維上で幅 w の四角形が $x = x_l \sim x = x_l + dx_l$ の範囲にあり、この四角形に他の四角形が重ならない確率 $g_{c1}(x_l, \theta)dx_l$ は

$$g_{c1}(x_l, \theta)dx_l = n_a f_d(x_l, \theta) P_d(x_l, w, n_a - 1, \theta) dx_l \quad \dots\dots\dots (9)$$

2 個以上の四角形が重なってできる長方形の幅の分布を示そう。 n_a 個ある四角形の中の 2 個以上が重なってできる長方形の位置が $x = x_l \sim x = x_l + dx_l$ の範囲にあり、その幅が $w_l \sim w_l + dw_l$ の範囲にあり、他の四角形がこの長方形と重ならない確率 $f_c(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l$ は次式で表すことができる。

$$f_c(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l = \sum_{k=n_r}^{n_a} P_k^{n_a} f_{ck}(x_l, w_l, \theta) \times P_d(x_l, w, n_a - k, \theta) dx_l dw_l \quad (w < w_l \leq n_a w) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$n_r = \text{int}(w_l/w) + 1 \quad \dots\dots\dots (11)$$

であり、 $P_k^{n_a}$ は順列の数、 $f_{ck}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l$ は、 n_a 個ある四角形の中の k 個が重なってできる長方形の位置が $x = x_l \sim x = x_l + dx_l$ の範囲にあり、その幅が $w_l \sim w_l + dw_l$ の範囲にある確率である。確率 $f_{ck}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l$ は長方形の幅 w_l の $2k - 3$ 次式で与えられ、長方形の幅 w_l が $n_k w \leq w_l \leq (n_k + 1)w$ ($n_k = 1, 2, \dots, k - 1$) の範囲にあるとき

$$f_{ck}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l = \sum_{i=0}^{2k-3} (C_{k, l_1+i} w_l^i) dx_l dw_l \quad \dots\dots\dots (12)$$

で表される。ここで係数 C_{k, l_1+i} の下添字 k は、長方形が k 個の四角形により構成されていることを表し、 l_1 は

$$l_1 = 2(k - 2)(n_k - 1) \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。

$k = 2$ の場合、確率 $f_{c2}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l$ は次式で与えられる。

$$f_{c2}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l = (C_{2,0} + C_{2,1} w_l) dx_l dw_l \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで

$$C_{2,0} = A(a_d x_l + b_d) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$C_{2,1} = a_d(a_d x_l + b_d) \quad \dots\dots\dots (16)$$

であり、さらに

$$A = a_d(x_l - w) + b_d \quad \dots\dots\dots (17)$$

である。

$k > 2$ の場合、長方形の幅 w_l が $w < w_l \leq 2w$ の範囲では、 $n_k = 1$ で $l_1 = 0$ となることを考慮して、確率 $f_{ck}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l$ の係数 $C_{k,i}$ は次式により求める

ことができる。

$$C_{k,0} = -A \sum_{j=0}^{2k-5} \frac{C_{k-1,j}}{j+1} w^{j+1} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$C_{k,1} = A C_{k-1,0} - a_d \sum_{j=0}^{2k-5} \frac{C_{k-1,j}}{j+1} w^{j+1} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$C_{k,i} = \frac{A C_{k-1,i-1}}{i} + \frac{a_d C_{k-1,i-2}}{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, 2k-4) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$C_{k,2k-3} = \frac{a_d C_{k-1,2k-5}}{2k-4} \quad \dots\dots\dots (21)$$

長方形の幅 w_l が $2w < w_l \leq (k-1)w$ の範囲では、確率 $f_{ck}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l$ の係数 C_{k, l_1+i} は次式により求めることができる。

$$C_{k, l_1} = A B \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$C_{k, l_1+1} = a_d B + A D_1 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$C_{k, l_1+i} = a_d D_{i-1} + A D_i \quad (i = 2, 3, \dots, 2k-4) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$C_{k, l_1+2k-3} = a_d D_{2k-4} \quad \dots\dots\dots (25)$$

であり、さらに

$$B = \sum_{j=0}^{2k-5} \frac{1}{j+1} [(C_{k-1, l_2+j} - C_{k-1, l_3+j})(n_k w)^{j+1} - (-1)^{j+1} C_{k-1, l_3+j} w^{j+1}] \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$D_i = \frac{C_{k-1, l_3+i-1}}{i} - \sum_{j=i}^{2k-4} \frac{(-1)^{j-i} C_i^j C_{k-1, l_3+i-1} w^{j-i}}{j} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで

$$l_2 = 2(k-2)(n_k-2) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$l_3 = 2(k-2)(n_k-3) \quad \dots\dots\dots (29)$$

であり、 C_i^j は組合せの数である。

長方形の幅 w_l が $(k-1)w < w_l \leq kw$ の範囲では、確率 $f_{ck}(x_l, w_l, \theta)dx_l dw_l$ の係数 C_{k, l_1+i} は次式により求めることができる。

$$C_{k, l_1} = A E \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$C_{k, l_1+1} = a_d E - A F_1 \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$C_{k, l_1+i} = -a_d F_{i-1} - A F_i \quad (i = 2, 3, \dots, 2k-4) \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$C_{k, l_1+2k-3} = a_d F_{2k-4} \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここで

$$E = \sum_{j=0}^{2k-5} \frac{\{[(k-1)w]^{j+1} - (-w)^{j+1}\} C_{k-1, l_2+j}}{j+1} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$F_i = \sum_{j=i}^{2k-4} \frac{(-1)^{j-i} C_i^j C_{k-1, l_2+i-1} w^{j-i}}{j} \quad \dots\dots\dots (35)$$

2・4 他の繊維によって覆われる幅の予測法 式

(9) および式(10)により、四角形あるいは長方形で近似した他の繊維が 1 本の繊維に重なる部分の幅の分布を求めることができる。これを使って、試料表面から

観察して得られる繊維の先端部分が他の繊維によって覆われる幅 w_{it} の分布および繊維端の間で他の繊維に覆われる幅 w_i の分布の求め方を考えよう。

試料表面に近い端の部分が覆われる幅の確率と遠い端の部分が覆われる幅の確率を別々に評価して加え合わせる必要がある。繊維の中心軸が試料表面に垂直な方向に対してなす角度が θ で、繊維表面に近いほうの端の x 座標が x_a であるとき、試料表面に近いほうの端付近が他の繊維に覆われる幅が $w_{it} \sim w_{it} + dw_{it}$ の範囲にある確率 $f_{itu}(w_{it}, x_a, \theta)dw_{it}$ は次式で求めることができる。

$$f_{itu}(w_{it}, x_a, \theta)dw_{it} = \begin{cases} g_{cl}(w_{it} + x_a - w, \theta)dw_{it} + \int_{w_i=w}^{w_i=-x_i+x_a+l_w} f_c(w_{it} + x_a - w, w_i, \theta)dw_i dw_{it} & (0 < w_{it} < w) \\ \int_{w_i=w_{it}}^{w_i=-x_i+x_a+l_w} f_c(w_{it} + x_a - w, w_i, \theta)dw_i dw_{it} & (w \leq w_{it}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (36)$$

繊維中心軸が試料表面に垂直な方向に対してなす角度が θ で、繊維表面に近いほうの端の x 座標が x_a で、繊維の試料表面への投影長さが l_w のとき、試料表面から遠いほうの端付近が他の繊維に覆われる幅が $w_{it} \sim w_{it} + dw_{it}$ の範囲にある確率 $f_{iti}(w_{it}, x_a, \theta)dw_{it}$ は次式で求めることができる。

$$f_{iti}(w_{it}, x_a, l_w, \theta)dw_{it} = \begin{cases} g_{cl}(-w_{it} + x_a + l_w, \theta)dw_{it} + \int_{w_i=w}^{w_i=n_a w} f_c(-w_{it} + x_a + l_w, w_i, \theta)dw_i dw_{it} & (0 < w_{it} < w) \\ \int_{w_i=w_{it}}^{w_i=n_a w} f_c(-w_{it} + x_a + l_w, w_i, \theta)dw_i dw_{it} & (w \leq w_{it}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (37)$$

繊維の表面に近いほうの端の x 座標 x_a 、試料表面への投影長さ l_w および角度 θ をもつ繊維が複合材中に存在する確率を、文献(10)を参考にして求める。これを式(36)および式(37)に掛け合わせ合計することにより、複合材表面から観察される繊維の先端部分が他の繊維に覆われる幅 w_{it} の分布を推定する。

複合材表面から観察される繊維の端の間が他の繊維に覆われるとき、重なり部分を近似した長方形は二つの繊維端の間にある。この条件のもと、式(9)および式(10)に、繊維の表面に近いほうの端の x 座標 x_a 、試料表面への投影長さ l_w および角度 θ をもつ繊維が複合材中に存在する確率を掛けて合計し、繊維端の間で他の繊維に覆われる幅 w_i の分布を求める。

Fig. 2 Schematic diagram for definition of fiber orientation distribution

3. 繊維の詰め込み問題

3.1 詰め込み手法の概要

2章に示した理論により予測される繊維の可視部分および他の繊維に覆われる部分の長さ分布の検証を行うために、直径 d 、長さ l_f の繊維を模した円柱を、立方体状の空間中に詰め込み問題を考える。繊維等の物体をコンピュータ上で空間中に詰め込むには、文献(12)のように、さまざまな手法がある。本研究で採用した手法の詳細については文献(9)に述べられている。ここでは、その概略を説明する。

乱数で候補者である繊維の位置および方向を決め、この繊維を立方体状の空間中に配置し、すでに空間中に配置してある他の繊維と重なる場合にはこれを破棄して、次の繊維を配置する。他の繊維と重なりがなければ、この繊維を複合材中の繊維として採用する。この操作を所定の繊維体積含有率になるまで繰返す。

立方体の境界では繰返しの条件を導入する。すなわち、境界から外側に伸びる繊維は、この境界と反対側の境界から空間内に入り込むものとする。

3.2 繊維方向分布 本研究では、複合材中の繊維方向分布を試料表面に対して垂直な方向に回転軸をもつ回転円体の内部の体積で表す。図2を使って回転円体で表現される繊維方向分布を説明する。図2では回転軸は z 軸となっている。回転円体の中心を座標軸の原点におき、回転円体が x 軸および y

軸と交わる座標を a , z 軸と交わる座標を c とする。回転円筒体の中心を通り, z 軸に対して角度 θ をなす曲面と角度 $\theta + d\theta$ をなす曲面とで円筒体の表面で囲まれる部分の体積で, 角度が $\theta \sim \theta + d\theta$ の間にある繊維の割合 $f_\theta(\theta)d\theta$ を表す。本研究では方向分布を表すパラメータとして回転円筒体の主軸の長さの比 c/a を採用する。方向分布を表すパラメータ c/a が 1 を境として, パラメータ c/a が 1 より小さいときには試料表面に対して平行に近い繊維が多くなり, パラメータ c/a が 1 より大きいときには試料表面に対して垂直に近い繊維が多くなる。

3.3 繊維の詰め込みの例 繊維長さ l_f が繊維直径 d の 20 倍すなわち $20d$ の繊維を, 一辺の長さが $3(l_f + d/2)$ の立方体中に繊維体積含有率 v_f が 0.15 となるように詰め込んだ。このコンピュータ上で作成した複合材を, 厚さ t が繊維直径 d の 10 倍の厚板状に切断した。結果の例を図 3 に示す。厚さ方向を z 軸の方向としている。図は 3.2 節で定義した繊維方向を表すパラメータ c/a が 1.0 で三次元ランダムなときの結果である。パラメータ c/a が 1 未満のとき, 表面に平行に近い繊維が多く, 1 を超えると, 表面に垂直に近い繊維が多い。先に示した図 1 は図 3 に示した複合材を表面から観察した図である。シミュレーションで

Fig. 3 Circumstances of the packed fibers

Fig. 4 Probabilistic density functions f_l and f'_l of visible length l_v on a fiber end estimated by the simple theory and the computer-simulation

得られた複合材を表面から観察して繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v , 他の 2 本の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v , 先端部分が他の繊維に覆われる幅 w_{it} および繊維端の間が他の繊維に覆われる幅 w_{it} の分布を求めた。

4. 計算結果および考察

4.1 可視部分の長さの分布および平均値 2.2 節で述べた方法により, 繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v および 2 本の他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v の分布を計算した。繊維長さ l_f を繊維直径 d の 20 倍, すなわち $20d$, 試料の厚さ t を繊維直径の 10 倍, すなわち $10d$, 繊維体積含有率 v_f を 0.15, 繊維方向分布を表すパラメータ c/a を 0.2, 0.5, 1.0, 2.0 および 4.0 とした。繊維の重なり部分を近似する四角形の幅 w を繊維直径 d と同一の場合と, 幅 w の繊維が二次元的にランダムに重なったときの幅の平均値 $\pi d/2$ の場合の 2 種類とした。

可視部分の長さ分布の計算例として, 繊維方向分布を表すパラメータ c/a が 1.0 (三次元ランダム) のときの繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v の理論により得られる確率密度関数 f_l およびシミュレーションにより得られる確率密度関数 f'_l を図 4 に, 2 本の他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v の理論により得られる確率密度関数 f_v およびシミュレーションにより得られる確率密度関数 f'_v を図 5 に示す。

図 4 に注目すると, 繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v の確率密度関数は理論結果もシミュレーション結果も, $l_v = 0$ から単調に減少し, $l_v = 10d$ ではほぼ零になることがわかる。シミュレーション

Fig. 5 Probabilistic density functions f_v and f'_v of visible length l_v separated by two fibers estimated by the simple theory and the computer-simulation

ンによって得られる繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの確率密度関数は、近似する四角形の幅 w を d としたときに得られる繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの確率密度関数により近い。

図5に注目すると、2本の他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さ l_v の確率密度関数は理論結果もシミュレーション結果も、 $l_v=0$ から単調に減少し、 $l_v=5d$ でほぼ零になることがわかる。シミュレーションによって得られる2本の他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの確率密度関数は、近似する四角形の幅 w を繊維直径 d と同一として予測した結果により近い。

理論により得られる繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値 $\bar{l}_e$ およびシミュレーションにより得られる繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値 $\bar{l}_e'$ を求め図6に示す。繊維方向分布を表すパラメータ c/a が増加するにつれて平均値 $\bar{l}_e$ および $\bar{l}_e'$ は減少する。試料表面に対して繊維が垂直に近くなり、試料表面への繊維の投影長さが短くなるにつれて、繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値は減少する。シミュレーションにより得られる繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値は、近似する四角形の幅 w を繊維直径 d と同一として予測した平均値にほぼ一致する。

理論により得られる他の2本の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値 $\bar{l}_v$ およびシミュレーションにより得られる他の2本の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値 $\bar{l}_v'$ を求め図7に示す。理論により得られる他の2本の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値は、繊維方向分布を表すパラメータ

c/a が0.2から1.0の範囲では、近似する四角形の幅 w を繊維直径 d としたときほぼ d 、近似する四角形の幅 w を $\pi d/2$ としたときほぼ $1.5d$ 一定で、 c/a が1.0を超えると増加する。これに対して、シミュレーションにより得られる他の2本の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値は、繊維方向分布を表すパラメータ c/a が0.2のとき、すなわち、試料中の繊維が試料表面に平行に近く、繊維が二次元的に配置されたときには、近似する四角形の幅 w を $\pi d/2$ として予測した可視部分の長さの平均値にほぼ等しく、繊維方向分布を表すパラメータ c/a が0.5を超えると、近似する四角形の幅 w を d として予測した可視部分の長さの平均値にほぼ等しい。

さらなる詳細な検討が必要であるが、著者は可視部分の長さの平均値は他の繊維が重なる数に大きく依存すると考えている。本研究では、繊維方向が試料表面に平行な面内でランダムとして計算を行っている。繊維が無限に長ければ、近似する四角形の幅 w を $\pi d/2$ とおいて求めた本数だけ注目する繊維に他の繊維が重なる。繊維方向分布を表すパラメータ c/a が0.2のとき、近似する四角形の幅 w を $\pi d/2$ として予測した他の2本の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの平均値が、シミュレーションにより得られる可視部分の長さの平均値に近いのはこのためであろう。しかし、多くの場合繊維長さが有限で端が存在するために、試料表面への投影長さが長くなり、他の繊維が重なる本数が多くなる。このため、四角形の幅 w を d として予測した可視部分の長さの平均値はシミュレーション結果に近い値になったと考えられる。

4・2 他の繊維に覆われる幅の分布および平均値

2・3節で述べた方法により繊維の先端部分が他の繊維

Fig.6 Difference between average values of visible length $\bar{l}_e$ and $\bar{l}_e'$ on a fiber end estimated by the simple theory and the computer-simulation in several fiber orientation distributions

Fig.7 Difference between average values of visible length $\bar{l}_v$ and $\bar{l}_v'$ separated by two fibers estimated by the simple theory and the computer-simulation in several fiber orientation distributions

に覆われる幅 w_{it} の分布および繊維端の間が他の繊維に覆われる幅 w_l の分布を計算した。繊維長さ l 、試料の厚さ t 、繊維体積含有率 v_f および繊維方向分布を表すパラメータ c/a の値はそれぞれ 4・1 節の計算に使用した値と同一とした。繊維の重なり部分を近似する四角形の幅 w を d の場合と、 $\pi d/2$ の場合の 2 種類とした。

他の繊維に覆われる幅の分布の計算例として、繊維方向分布を表すパラメータ c/a が 1.0 (三次元ランダム) のときの繊維の先端部分が他の繊維に覆われる幅 w_{it} の理論により得られる確率密度関数 $f_{w_{it}}$ およびシミュレーションにより得られる確率密度関数 $f'_{w_{it}}$ を図 8 に、繊維端の間が他の繊維に覆われる幅 w_l の理論により得られる累積確率 F_w およびシミュレーションにより得られる累積確率 F'_w を図 9 に示す。

図 8 に注目すると、理論により求めた繊維の先端部分が他の繊維に覆われる幅の確率密度関数 $f_{w_{it}}$ は、 $w_{it}=0$ から重なり部分を近似した四角形の幅まで徐々に減少し、そこを過ぎると急激に減少する。これ

に対して、シミュレーションにより求めた繊維の先端部分が他の繊維に覆われる幅 w_{it} の確率密度関数 $f'_{w_{it}}$ は、 w_{it} が繊維直径 d の位置で折れ曲がることは、重なり部分を繊維直径 d で近似したときの理論結果と同様であるが、それまでの減少率がシミュレーションにより求めた確率密度関数のほうが大きい。本研究で用いた理論では、他の繊維が重なる幅を一定値としており、これも原因となって減少率の差が生じている。

図 9 に注目すると、理論により求めた繊維端の間が他の繊維に覆われる幅 w_l の累積確率 F_w は重なり部分を近似した四角形の幅のところで約 0.4 まで立上がり、その後は単調に増加する。これに対して、シミュレーションにより求めた累積確率 F'_w は $w_l=0$ から単調に増加し、 w_l が $10d$ になるとほぼ 1 になる。図 9 に示したような繊維方向分布が三次元ランダムの場合には、理論結果の立上がり部分を除いて、シミュレーションにより求めた累積確率 F'_w の曲線は、繊維の重なり部分を近似する四角形の幅 w を d として求めた累積確率の曲線と、 $\pi d/2$ として求めた累積確率の曲

Fig. 8 Probabilistic density functions $f_{w_{it}}$ and $f'_{w_{it}}$ of length of the overlapping part on a fiber end w_{it} estimated by the simple theory and the computer-simulation

Fig. 9 Cumulative probabilities F_w and F'_w of length of the overlapping part between fiber tips w_l estimated by the simple theory and the computer-simulation

Fig. 10 Difference between average lengths of overlapping part on a fiber end $\bar{w}_{it}$ and $\bar{w}'_{it}$ estimated by the simple theory and the computer-simulation in several fiber orientation distributions

Fig. 11 Difference between average lengths of overlapping part between fiber tips $\bar{w}_l$ and $\bar{w}'_l$ estimated by the simple theory and the computer-simulation in several fiber orientation distributions

線の間にある。この傾向は、繊維体積含有率を0.15以下にしても同様である。

理論により得られる繊維の先端部分が他の繊維に覆われる幅の平均値 $\bar{w}_a$ およびシミュレーションにより得られる繊維の先端部分が他の繊維に覆われる幅の平均値 $\bar{w}_b$ を求め図10に示す。また、理論により得られる繊維端の間が他の繊維に覆われる幅の平均値 $\bar{w}_c$ およびシミュレーションにより得られる繊維端の間が他の繊維に覆われる幅の平均値 $\bar{w}_d$ を求め図11に示す。各平均値は、繊維方向を表すパラメータ c/a の増加とともに減少する傾向にあるが、理論により求めた平均値とシミュレーションにより求めた平均値は必ずしも一致しない。

これに関しても詳細な検討が必要であるが、著者は他の繊維に覆われる幅の平均値は、他の1本の繊維が重なった部分の幅に大きく依存すると考えている。繊維方向分布を表すパラメータ c/a が0.2と試料表面に対して平行に近い繊維が多い場合には、1本の繊維が重なった部分の幅の平均値は $\pi d/2$ に近くなり、近似する四角形の幅を $\pi d/2$ として予測した結果にシミュレーション結果は近い値となる。これに対して、繊維方向分布を表すパラメータ c/a が大きくなると、繊維の端が重なる確率が高くなって、1本の繊維が重なった部分の幅の平均値が低下する。このため、予測した結果に比べシミュレーション結果は小さい値となったと考えられる。

5. 結 言

本研究においては、短繊維強化複合材をスライスし、表面から観察される繊維像に関して、他の繊維に区切られたいわゆる可視部分の長さや、他の繊維に覆われる部分の幅を予測するための理論の検証を行った。空間中に繊維を数値的に詰め込み、短繊維強化複合材をコンピュータ上で作成した。この複合材を切断して表面から観察し、他の繊維に区切られたいわゆる可視部分の長さや、他の繊維に覆われる部分の幅を求めた。得られた結果と先に提案した理論結果との比較検討を行い、提案した理論の適用範囲を検証した。得られた知見は以下のとおりである。

(1) 繊維方向分布が三次元ランダムの場合、繊維端と他の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの分布も、他の2本の繊維に挟まれてできる可視部分の長さの分布も、重なり部分の幅 w を繊維直径 d で近似したほうが、 $\pi d/2$ で近似するよりも、シミュレーション結果に近い結果が得られた。

(2) 繊維方向分布をさまざまに変化させても、理論で得られた可視部分の長さ平均値は、重なり部分 w を繊維直径 d で近似すれば、繊維方向分布が二次元分布に近い場合を除き、実用上十分な精度で予測できることがわかった。

(3) 繊維方向分布が三次元ランダムの場合、シミュレーションで得られた他の繊維に覆われる部分の幅の分布は、幅が繊維直径以上の範囲で、重なり部分の幅 w を繊維直径 d で近似し理論的に求めた分布と、 $\pi d/2$ で近似し理論的に求めた分布の間に入った。

(4) 繊維方向分布をさまざまに変化させて、理論で得られる他の繊維に覆われる部分の幅の平均値とシミュレーションで得られる他の繊維に覆われる部分の幅の平均値を比較した。両者は同じオーダーではあるが、現在までの理論では完全には他の繊維に覆われる部分の幅の平均値を予想するに至っていないといえた。

本研究の一部は(財)高橋産業経済研究財団研究助成によったものであることを付記し謝意を表す。また、本研究の遂行に当たっては八戸工業大学大学院学生の三津谷郷氏〔現：(株)荒井製作所〕の助力を得たことを付記し謝意を表す。

文 献

- (1) Gusev, A. A., *Macromolecules*, Vol. 34 (2001), pp. 3081-3093.
- (2) Advani, S. G. and Tucker, C. L. III, *Journal of Rheology*, Vol. 31 (1987), pp. 751-784.
- (3) Chung, D. H. and Kwon, T. H., *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol. 14 (2002), pp. 175-188.
- (4) Hille, D. et al., *Composites Science and Technology*, Vol. 35 (1989), pp. 195-206.
- (5) Clarke, A. R. et al., *Composites Science and Technology*, Vol. 55 (1995), pp. 75-91.
- (6) Royer, S. M. and Kinnamon, J. C., *Microscopy Research and Technique*, Vol. 29 (1994), pp. 381-407.
- (7) Eberhardt, C. N. and Clarke, A. R., *Journal of Microscopy*, Vol. 2002 (2001), pp. 41-53.
- (8) Davidson, N. C. et al., *Journal of Microscopy*, Vol. 185 (1997), pp. 233-242.
- (9) Suzuki, H., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 73, No. 725 (2007), pp. 26-33.
- (10) Suzuki, H., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 66, No. 648 (2000), pp. 1468-1476.
- (11) Suzuki, H., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 69, No. 683 (2003), pp. 719-726.
- (12) Torquato S., *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*, (2001), p. 54, Springer-Verlag.