三重相反境界要素法による自重を考慮した不均質材の軸対称応力解析*

落 合 芳 博^{*1}Axial Symmetric Elastic Analysis with Gravity Load in
Non-Homogeneous Materials by
Triple-Reciprocity Boundary Element MethodYoshihiro OCHIAI^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Kinki University,
3-4-1 Kowakae, Higashi-Osaka-shi, Osaka, 577-8502 Japan

In general, internal cells are required to solve elastic problems with gravity load in non-homogeneous materials using a conventional boundary element method (BEM). However, in this case, the merit of BEM, which is ease of data preparation, is lost. In this study, it is shown that axial symmetric elastic problems with gravity load in non-homogeneous materials can be solved without the use of internal cells, using the triple-reciprocity BEM. A body force distribution is interpolated using boundary integral equations. A new computer program was developed and applied to solving several problems.

Key Words: Boundary Element Method, Gravity Load, Non-Homogeneous Materials, Elasticity

1. 緒 言

自重を伴う均質材の弾性解析は、内部セルを用いなくて従来の境界要素法で容易に行うことができる。しかし、比重が場所により異なる不均質材の場合、領域積分が必要になる。均質な場合の重力や遠心力に関する領域積分は、ガレルキン・テンソルを用いることにより容易に境界積分に変換することが可能である⁽¹⁾。ただし、比重が不均質な場合のように複雑な物体力が作用する場合、ガレルキン・テンソルに基づく方法では領域積分を境界積分へ変換することは一般的に不可能である。領域積分を用いない方法として、二重相反境界要素法が提案されているが、複雑な二次元分布に対応することは困難である⁽²⁾。一方、多重相反境界要素法を用いれば、領域積分から境界積分への変換が可能になる⁽³⁾。ただし、多重相反境界要素法では、物体力が数式で与えられていなければならない。また、物体力の分布によっては、解を収束させるために無限に高次の基本解を必要とする。

一方、著者は、三重相反境界要素法により、セルを用いなくて二次元弾塑性問題を解析する方法を提案している⁽⁴⁾。本論文では、自重を伴う不均質材の軸対称弾性問題を内部セルを用いなくて解析する方法を示す。三重相反法⁽⁴⁾により、自重による物体力分布を境界積分方程式を用いて補間し、この補間値を用いて精度良く解析する方法を示す。軸対称弾性問題における高次基本解を誘導する方法を示している。本手法では境界上および、領域内のいくつかの任意点での物体力の値を用いる。

2. 理 論

2・1 自重を伴う弾性解析 密度 $\rho(q)$ が場所により異なる場合の弾性解析を行う。軸対称の場合なので自重の方向を z とする。自重は、重力加速度を g とすると次式で示す物体力 $b_z^{[1]S}$ とみなすことができる。

$$b_z^{[1]S} = -g\rho(q) \dots\dots\dots (1)$$

上添字 S は分布していることを示す。境界要素法を用いて任意の物体力 $b_z^{[1]S}$ が作用する弾性解析を行うには、次の境界積分方程式を解かなければならない⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

$$c_{ij}u_j(P) = \int_{\Gamma} [b_j(Q)u_j^{[1]}(P, Q)$$

* 原稿受付 2007 年 8 月 24 日。

^{*1} 正員、近畿大学理工学部(〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1)。

E-mail: ochiai@mech.kindai.ac.jp

$$-u_j(Q)p_{ij}(P, Q)]r_0 d\Gamma(Q) \\ + \int_{\Omega} u_{iz}^{[1]}(P, Q)b_z^{[1]S}(Q)r_0 d\Omega(Q) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、記号 u_j および p_j は変位および表面力の j 方向成分であり、 Γ および Ω は境界および領域を示す。 c_{ij} は滑らかな境界上では $0.5 \delta_{ij}$ 、内点では δ_{ij} である。

図1の座標系を使用すると、ケルビンの解 $u_{ij}^{[1]}$ は軸対称の場合

$$u_{rr}^{[1]} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r_0 C_1} \left\{ \left[-4(1-\nu)C_1^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(r^2 - r_0^2)^2 + (z - z_0)^2(r^2 + r_0^2)}{C_2} \right] E(m_0) \right. \\ \left. + [4(1-\nu)C_3 - (r^2 + r_0^2)]K(m_0) \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$u_{zr}^{[1]} = \frac{(z - z_0)}{8\pi G(1-\nu)r_0 C_1} \left[\frac{C_4}{C_2} E(m_0) - K(m_0) \right] \\ \dots\dots\dots (4)$$

$$u_{zz}^{[1]} = \frac{-(z - z_0)}{8\pi G(1-\nu)r_0 C_1} \left[\frac{C_5}{C_2} E(m_0) - K(m_0) \right] \\ \dots\dots\dots (5)$$

$$u_{zz}^{[1]} = \frac{1}{4\pi G(1-\nu)C_1} \\ \times \left[\frac{(z - z_0)^2}{C_2} E(m_0) + (3 - 4\nu)K(m_0) \right] \\ \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。ただし、ポアソン比を ν 、横弾性係数を G とし、 $K(\cdot)$ 、 $E(\cdot)$ は第一種および第二種完全だ円積分関数である。また、係数は下記のようになる。

$$C_1 = \sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$C_2 = (r - r_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$C_3 = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$C_4 = r^2 - r_0^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$C_5 = -r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$m_0 = \frac{4rr_0}{C_2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(2)には領域積分が含まれる。そこで、積分方程式を用いた補間法を活用して領域積分を境界積分に変換する。

Fig.1 Cylindrical coordinates

2.2 物体力分布の補間 三重相反法では、補間が重要な事項である。滑らかな分布の場合、軸対称問題では、次式を用いる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$\nabla^2 b_z^{[1]S} = -b_z^{[2]S} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\nabla^2 b_z^{[2]S} = -\sum_{m=1}^M b_z^{[3]P}(m) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

であり、上添字 P は点しか値をもたないディラックのデルタ関数を示す。式(13)、(14)は、次式のように書くことができる。

$$\nabla^4 b_z^{[1]S} = \sum_{m=1}^M b_z^{[3]P}(m) \quad \dots\dots\dots (16)$$

物体力分布が滑らかでない不連続分布の場合、式(13)の代わりに次式を用いる。

$$\nabla^2 b_z^{[1]S} = -b_z^{[2]S} - b_z^{[2]D} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 $b_z^{[2]D}$ は不連続分布を表現する二重層ポテンシャルである。式(13)、(14)、(17)を境界積分方程式で示すために軸対称問題における多重調和関数 $T^{[j]}$ を用いる。軸対称問題における多重調和関数 $T^{[j]}$ は、次の関係がある。

$$\nabla^2 T^{[j+1]} = T^{[j]} \quad \dots\dots\dots (18)$$

本論文で使用する軸対称問題における多重調和関数 $T^{[j]}$ および、その法線方向微分を以下に示す⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$T^{[1]}(p, q) = \frac{K(m_0)}{C_1 \pi} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial T^{[1]}(p, q)}{\partial n} = \frac{1}{C_1 \pi} \left\{ \frac{1}{2r_0} \left[\frac{C_4}{C_2} E(m_0) - K(m_0) \right] n_r \right. \\ \left. + \frac{(z - z_0)}{C} E(m_0) n_z \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$T^{[2]}(p, q) = \frac{C_1 E(m_0)}{2\pi} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{\partial T^{[2]}(p, q)}{\partial n} = \frac{1}{2C_1 \pi} \left\{ \frac{1}{2r_0} [C_1^2 E(m_0) \right. \\ \left. - C_4 K(m_0)] n_r - (z - z_0) K(m_0) n_z \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 n_i を外向き単位法線ベクトルの i 方向成分とする。

2.3 物体力の積分表示 関数 $b_z^{[3]P}$ の数を M とすると、 $b_z^{[1]S}$ はグリーンの定理および式(14)、(17)より次式で与えられる。

$$c b_z^{[1]S}(P) = -\sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_{\Gamma} \left[T^{[j]}(P, Q) \frac{\partial b_z^{[j]S}(Q)}{\partial n} \right. \\ \left. - \frac{\partial T^{[j]}(P, Q)}{\partial n} b_z^{[j]S}(Q) \right] r_0 d\Gamma - \sum_{m=1}^M T^{[2]} r_0 b_z^{[3]P}(m) \\ + \int_{\Gamma} \frac{\partial T^{[1]}(P, q)}{\partial n} b_z^{[2]D}(q) r_0 d\Gamma \quad \dots\dots\dots (23)$$

ただし、 c は滑らかな境界上では 0.5 、内点では 1 である。 $b_z^{[2]S}$ は式(14)より同様に次式で与えられる。

$$cb_z^{[2]S}(P) = \int_r \left[T^{[1]}(P, Q) \frac{\partial b_z^{[2]S}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T^{[1]}(P, Q)}{\partial n} b_z^{[2]S}(Q) \right] r_0 d\Gamma + \sum_{m=1}^M T^{[1]} r_0 b_{z(m)}^{[3]P} \quad (24)$$

式(23), (24)において $b_z^{[2]S}(Q)=0$ とおき, 離散化して, 未知の $b_z^{[3]P}$ と $\partial b_z^{[1]S}(Q)/\partial n$ を求める. 一定要素を用い, $b_z^{[1]S}(Q)$ と $\partial b_z^{[1]S}(Q)/\partial n$ をベクトル $\mathbf{B}_f$ と $\mathbf{V}_f$ で表現すると式(23)は次式のように表現できる.

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{B}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{B}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_2^P \mathbf{B}_3^P + \mathbf{H}_1^P \mathbf{B}_2^P \quad (25)$$

ただし, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{G}_2^P$, $\mathbf{H}_1^P$ の成分は以下のようになる.

$$H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{r_j} \frac{\partial T^{[1]}(P_i, Q_j)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j \quad (26)$$

$$G_{1ij} = \int_{r_j} T^{[1]}(P_i, Q_j) r_0 d\Gamma_j \quad (27)$$

$$H_{2ij} = \int_{r_j} \frac{\partial T^{[2]}(P_i, Q_j)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j \quad (28)$$

$$G_{2ij} = \int_{r_j} T^{[2]}(P_i, Q_j) r_0 d\Gamma_j \quad (29)$$

$$G_{2ij}^P = T^{[2]}(P_i, q_j^P) r_0 \quad (30)$$

$$H_{1ij}^P = \int_{r_j} \frac{\partial T^{[1]}(P_i, Q_j)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j \quad (31)$$

式(25)の項 $\mathbf{B}_2$ は, 式(24)より次式となる.

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{B}_2 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_1^P \mathbf{B}_3^P \quad (32)$$

ここで, $\mathbf{G}_1^P$ の成分は次式となる.

$$G_{1ij}^P = T^{[1]}(P_i, q_j^P) r_0 \quad (33)$$

内点の値 $b_z(p^P)$ を用いると, 式(23)より次式が得られる.

$$\mathbf{B}(p^P) = -\mathbf{H}_3 \mathbf{B}_1 + \mathbf{G}_3 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_4 \mathbf{B}_2 - \mathbf{G}_4 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_3^P \mathbf{B}_3^P + \mathbf{H}_2^P \mathbf{B}_2^P \quad (34)$$

ただし, $\mathbf{H}_3$, $\mathbf{G}_3$, $\mathbf{H}_4$, $\mathbf{G}_4$, $\mathbf{G}_3^P$, $\mathbf{H}_2^P$ の成分は以下のようになる.

$$H_{3ij} = \int_{r_j} \frac{\partial T^{[1]}(p_i^P, Q_j)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j \quad (35)$$

$$G_{3ij} = \int_{r_j} T^{[1]}(p_i^P, Q_j) r_0 d\Gamma_j \quad (36)$$

$$H_{4ij} = \int_{r_j} \frac{\partial T^{[2]}(p_i^P, Q_j)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j \quad (37)$$

$$G_{4ij} = \int_{r_j} T^{[2]}(p_i^P, Q_j) r_0 d\Gamma_j \quad (38)$$

$$G_{3ij}^P = T^{[2]}(p_i^P, q_j^P) r_0 \quad (39)$$

$$H_{2ij}^P = \int_{r_j} \frac{\partial T^{[1]}(p_i^P, Q_j)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j \quad (40)$$

$\mathbf{B}_2=0$ と仮定すると, 式(25), (32), (34)より次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2^P \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^P \\ \mathbf{G}_3 & -\mathbf{G}_4 & -\mathbf{G}_3^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{B}_3^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{H}_1 \mathbf{B}_2^P \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_3 \mathbf{B}_1 + \mathbf{H}_2^P \mathbf{B}_2^P + \mathbf{B}(p^P) \end{bmatrix} \quad (41)$$

2・4 三重相反法 関数 $u_{ij}^{[1]}$ に対して次式を満足する関数 $u_{ij}^{[f]}$ が存在すると仮定する.

$$\nabla^2 u_{ij}^{[f+1]} = u_{ij}^{[f]} \quad (42)$$

式(14), (17), (42)およびグリーンの定理より, 式(2)は次式になる.

$$c_{ij} u_{ij} = \int_r [u_{iz}^{[1]}(P, Q) p_j(Q) - p_{ij}(P, Q) u_j(Q)] r_0 d\Gamma(Q) - \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_r \left[\frac{\partial u_{iz}^{[f+1]}}{\partial n} b_z^{[1]S} - u_{iz}^{[f+1]} \frac{\partial b_z^{[1]S}}{\partial n} \right] r_0 d\Gamma + \sum_{m=1}^M u_{iz}^{[3]}(P, q) r_0 b_{z(m)}^{[3]P}(q) - \int_r \frac{\partial u_{iz}^{[2]}}{\partial n} b_z^{[2]D} r_0 d\Gamma \quad (43)$$

2・5 軸対称高次基本解の誘導 式(42)を満足する軸対称高次基本解を, 三次元高次基本解から誘導する方法を示す. 三次元問題におけるラプラシアンを $\nabla_{(3)}^2$ とすると, 三次元多重調和関数 $T_{(3)}^{[f]}$ は次の関係がある.

$$\nabla_{(3)}^2 T_{(3)}^{[f+1]} = T_{(3)}^{[f]} \quad (44)$$

したがって, f 重調和関数 $T_{(3)}^{[f]}$ は次式で求めることができる.

$$T_{(3)}^{[f+1]} = \int_{r^2}^1 \left(\int_{r^2} T_{(3)}^{[f]} dr \right) dr \quad (45)$$

三次元の場合の f 重調和関数 $T_{(3)}^{[f]}$ は, 一般に次式で与えられる.

$$T_{(3)}^{[f]} = \frac{r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!} \quad (46)$$

三次元高次ケルビン解は次式から得られる.

$$u_{(3)ij}^{[f]} = \frac{-1}{2(1-\nu)G} T_{(3),ij}^{[f+1]} + \frac{\delta_{ij} T_{(3),kk}^{[f+1]}}{G} \quad (47)$$

式(46)に式(47)を代入すると, 関数 $u_{ij}^{[f]}$ が得られる.

$$u_{ij}^{[f]} = \frac{(2f-1)r^{2f-3}}{8\pi(1-\nu)G(2f)!} [(4f-1-4f\nu)\delta_{ij} - (2f-3)r_i r_j] \quad \dots\dots\dots (48)$$

z 方向の力に関連する軸対称高次基本解は、式(48)を円周方向に積分することにより次式で得られる。

$$u_{iz}^{[f]} = \int_0^{2\pi} u_{ij}^{[f]} z d\theta \quad \dots\dots\dots (49)$$

ただし、 i は r, z となり、式(48)の r_i は次式となる。

$$r_r = \frac{r - r_0 \cos \theta}{R} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$r_z = \frac{z - z_0}{R} \quad \dots\dots\dots (51)$$

である。ただし、

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta + (z - z_0)^2} \quad \dots\dots\dots (52)$$

式(49)の積分を行うことにより、高次のケルビンの解 $u_{iz}^{[f]}$ は次式となる。

$$u_{rz}^{[2]} = \frac{(z - z_0)r_0}{32\pi G(1-\nu)r} \left[-C_1 E(m_0) + \frac{C_3}{C_1} K(m_0) \right] \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$u_{zz}^{[2]} = \frac{r_0}{16\pi G(1-\nu)} \left[(7-8\nu)C_1 E(m_0) - \frac{(z - z_0)^2}{C_1} K(m_0) \right] \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$u_{rz}^{[3]} = \frac{(z - z_0)r_0 C_1}{576\pi G(1-\nu)r} \left[-C_7 E(m_0) + C_2 K(m_0) \right] \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$u_{zz}^{[3]} = \frac{r_0 C_1}{864\pi G(1-\nu)} \{ [4(11-12\nu)C_3 - 9(z - z_0)^2] E(m_0) - (11-12\nu)C_2 K(m_0) \} \quad \dots\dots\dots (56)$$

ただし、

$$C_7 = 7r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (57)$$

である。式(4)、(6)の $u_{iz}^{[1]}, u_{zz}^{[1]}$ も同様に得られる。当然のことであるが、これらの関数は式(42)を満足している。式(43)に必要な式(53)～(57)の法線方向微分は、次式となる。

$$\frac{\partial u_{rz}^{[2]}}{\partial n} = \frac{1}{32\pi G(1-\nu)rC_1} \left\{ \frac{(z - z_0)}{r_0} \left[-\frac{C_{21}}{C_2} E(m_0) + (r^2 + r_0^2)K(m_0) \right] n_r - \left[\frac{C_{22}}{C_2} E(m_0) - C_{24}K(m_0) \right] n_z \right\} \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zz}^{[2]}}{\partial n} = & \frac{1}{16\pi G(1-\nu)C_1} \left\{ \frac{1}{2r_0} \left[\frac{[(7-8\nu)C_1^2 C_2 - (z - z_0)^2 C_4]}{C_2} E(m_0) + [-(7-8\nu)C_4 + (z - z_0)^2]K(m_0) \right] n_r \right. \\ & \left. + (z - z_0) \left[\frac{(z - z_0)^2}{C_2} E(m_0) + (5-8\nu)K(m_0) \right] n_z \right\} \quad \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^{[3]}}{\partial n} = & \frac{1}{576\pi G(1-\nu)rr_0 C_1} \{ (z - z_0) \{ C_1^2 C_{11} E(m) + [C_4^2 - 2r^2(z - z_0)^2]K(m) \} n_r \\ & + r_0 [-C_4^2 C_{47} E(m) + C_{54}K(m)] n_z \} \quad \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zz}^{[3]}}{\partial n} = & \frac{(z - z_0)}{576\pi G(1-\nu)r_0 C_1} \{ \{ C_1^2 [(11-12\nu)C_7 - 3(z - z_0)^2] E(m_0) + C_1 [-(11-12\nu)C_2 C_1^2 \\ & + 3(z - z_0)^2 C_4] K(m_0) \} n_r + 6(z - z_0)r [3(3-4\nu)C_1^2 E(m_0) - (z - z_0)^2 K(m_0)] n_z \} \quad \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

ただし、

$$C_{11} = r_0^2 - 11r^2 + (z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$C_{21} = [(r^2 - r_0^2)^2 + (z - z_0)^2(r^2 + r_0^2)] \quad \dots\dots\dots (63)$$

$$C_{22} = (r^2 - r_0^2)^2 + (z - z_0)^2 [3r_0^2 + r^2 + 2(z - z_0)^2] \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$C_{24} = r_0^2 - r^2 + 2(z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$C_{47} = 8r_0^2 - 7r^2 + 4(z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$C_{54} = (r^2 - r_0^2)^2 + [5r_0^2 - r^2 + 4(z - z_0)^2](z - z_0)^2 \quad \dots\dots\dots (67)$$

である。内部応力は、変位を差分することにより求めた。

3. 解 析 例

本解法の精度を確かめるために、図2に示すように重力加速度 g が z 軸方向に $-g$ の強さで作用する円筒の応力を求めた。円筒の高さ H は 100 mm であり、外力は作用しないものとする。ただし、ヤング率 $E = 210$ GPa、ポアソン比 0.3 として計算する。密度 $\rho(z)$ は次式とする。

$$\rho(z) = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots (68)$$

ただし、 $g\rho_0 = 1 \times 10^{-4}$ N/mm² とする。図2の境界上の点および内点に密度を与える。図3、4に $r = 70$

mm および $r=130$ mm での変位分布および応力分布を示す。図中の実線は、一次元問題として考えた場合の次の厳密解である。

Fig. 2 Circle cylinder (boundary elements and internal points)

Fig. 3 Displacement of circle cylinder

Fig. 4 Stress distribution (σ_{zz})

$$D_{is} = -\frac{\rho_0 g}{12EH^2} \times [-(H-z)^2(9H^2+2Hz+z^2)+9H^4] \quad \dots\dots\dots(69)$$

$$\sigma(z) = -\rho_0 g(H-z) \times \left[1 + \frac{3H^2-3H(H-z)+(H-z)^2}{3H^2} \right] \quad \dots\dots\dots(70)$$

一次元の場合の解と $r=70$ mm および $r=130$ mm での変位および応力の差は有限要素法の場合と同じであった⁽⁹⁾。

比重が滑らかな分布でない例として、比重分布が次式で与えられるように不連続な分布を含む場合を解析した。

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right), & 0 \leq z \leq \frac{H}{2} \\ \rho_0 \left(0.5 + \frac{z}{H}\right), & \frac{H}{2} < z \leq H \end{cases} \quad \dots\dots\dots(71)$$

他の条件は図2の場合と同じとする。図5は、計算に

Fig. 5 Circle cylinder with discontinue distribution of density

Fig. 6 Distribution of interpolated body force ($r=100$)

Fig. 7 Stress distribution (σ_{zz} : kPa)

Fig. 8 Circle cylinder with rim

使用した要素分割と内点を示す。内部の線に不連続量を与える。図6に補間された密度分布を、与えられた式(71)の値とともに示す。図7は、応力分布 σ_{zz} を示す。

厳密解を求めることが困難な例として、図8のリブをもつ円筒の応力分布を計算する。軸からの距離を r とすると、比重分布は次式で与えられるものとする。

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{100} \right) \dots\dots\dots (72)$$

他の条件は図2の場合と同じとする。図9, 10に変位分布と応力分布を示す。これらの値は、有限要素法による値とよく一致することを確かめた。

4. 結 言

三重相反境界要素法により内部セルを用いなくて、自重を考慮に入れた不均質材の軸対称弾性解析が可能

Fig. 9 Deformation caused by body force

Fig. 10 Stress distribution (σ_{rr} : kPa)

なことが示された。不均質を示すデータ内点および境界上の点を用いて入力し、内部セルが不要なため、データの 입력が容易である境界要素法の利点が、維持できることがわかった。また、比重分布が、不連続でも適用可能であることが示された。

文 献

- (1) Brebbia, C. A. et al., *Boundary Element Techniques-Theory and Applications in Engineering*, (1984), pp. 252-266, Springer-Verlag, Berlin.
- (2) Partridge, P. W. et al., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, (1992), pp. 223-253, Computational Mechanics Publications.
- (3) Nowak, A. J. and Neves, A. C. eds., *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, (1994), pp. 25-43, Computational Mechanics Publications.
- (4) Ochiai, Y. and Kobayashi, T., Initial Strain Formulation without Internal Cells for Elastoplastic Analysis by Triple-Reciprocity BEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50 (2001), pp.

- 1877-1892.
- (5) Martin, M., *Ein Integralgleichungsverfahren zur Lösung Rotationssymmetrischer Elastizitätsprobleme*, (1975), p. 52, Dissertation, München.
 - (6) Drexler, W., *Ein Betrag zur Lösung Rotationssymmetrischer Thermoelastischer Kerbprobleme Mitterls der Randintegralgleichungsmethode*, (1981), p. 30, Dissertation, München.
 - (7) Ochiai, Y., Axisymmetric heat conduction analysis by improved multiple-reciprocity boundary element method, *Heat Transfer—Japanese Research*, Vol. 23, No. 6 (1995), pp. 498-512.
 - (8) Ochiai, Y., Axisymmetric Numerical Integration by Boundary Element Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 28, No. 7 (2004), pp. 843-848.
 - (9) Nakasone, Y., et al., *Engineering Analysis with ANSYS Software*, (2007), pp. 51-106, Butterworth-Heinemann.
-