三次元異材接合体の角部における熱残留応力の特異場の特性*

古口 日出男^{*1}, 谷 口 昂^{*2}Characteristics of Stress Singularity Field of Residual Thermal Stresses
at Vertex in Three-Dimensional Bonded JointsHideo KOGUCHI^{*3} and Takashi TANIGUCHI^{*3} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology,
1603-1 Kamitomioka-cho, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

A mismatch of material properties may cause stress singularity, which lead to failures of bonding part in joints. The stress singularity of thermal residual stresses occurs in a cooling process after bonding the joints at a high temperature. In the present paper, boundary element method and an eigen value analysis based on finite element method are used for evaluating the intensity of singularity for residual thermal stresses at a vertex in three-dimensional joints. Three-dimensional boundary element program based on the fundamental solution for two-phase isotropic body is used for calculating the stress distribution in a three-dimensional joint. Angular function in the singular stress field at the vertex in the three-dimensional joint is calculated using eigen vector determined from the eigen analysis. The distribution of angular function of stress components is well agreed with and the distribution of residual thermal stresses. Furthermore, the angular function for $\sigma_{\theta\theta}$ has a singularity at the cross points of the interface and side free surfaces. In the present paper, the intensity of singularity at the vertex in three-dimensional joints is determined using the characteristic of angular function and the coefficient of power law singularity of stress distribution against the distance from the origin of singularity.

Key Words: Stress Singularity, Interface, Elasticity, Adhesive Joints, Boundary Element Method, Thermal Stresses

1. 緒 言

当研究者らは、これまで二次元・三次元異材接合体の界面端部に発生する応力特異場の特性について調べてきた^{(1)~(11)}。特異応力場は応力特異点を原点とする極座標系において、特異点からの距離の関数として表されることはよく知られている⁽¹²⁾。二次元接合体の接合端における特異応力場の一般解は二次元弾性論により導かれており、それを用いれば応力特異点近傍の応力分布を求めることができる⁽⁶⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹³⁾。三次元接合体の場合には、理論解析上の困難さのため数値解析により応力分布を求めざるを得ない状況にある。

ところで、三次元接合体の特異応力場は特異点からの距離に対する分布に比べ、接合界面端の角部を原点とした球座標系の角度方向の分布については、まだ不明の点がある。例えば、図1に示すように応力特異線も角部の θ , ϕ ($r = \text{一定}$) に対する応力分布に影響を与えていると考えられるが、よくわかっていない。これが三次元特異応力場の特徴を決めているともいえ

る。一般に、特異応力場は

$$\sigma_{ij}(r, \theta, \phi) = \sum_m \bar{K}_m r^{-\lambda_m} f_{ij}^m(\theta, \phi)$$

のように表される。ここで、 r は応力特異点からの距離、 $\bar{K}_m$ は特異応力場の強さ、 $f_{ij}^m(\theta, \phi)$ は応力場の角度依存性を表す関数、 λ_m は特異性のオーダーである。

本研究では電子デバイスに見られる材料の組合せに対して、三次元角部の熱残留応力の特異応力場の分布と強さについて調べる。特に有限要素法による固有値解析により応力特異性のオーダーを求め、その特異性の

Fig. 1 Three-dimensional bonded structures

* 原稿受付 2008 年 1 月 22 日。

^{*1} 正員, フェロー, 長岡技術科学大学工学部 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)。

^{*2} 准員, 長岡技術科学大学工学部。

E-mail: koguchi@mech.nagaokaut.ac.jp

オーダに対応する固有ベクトルから得られる応力場の角度依存関数 $f_{ij}(\theta, \phi)$ と三次元境界要素法から得られる熱残留応力分布を比較する。また、本論文では二次元接合体の応力分布の理論式により三次元応力特異場における角度依存関数の近似式の導出を試みる。特に、界面はく離に係る応力成分について詳細に調べる。最後に、三次元接合体角部の応力特異性の強さを応力特異線の影響も考慮して求める方法を示す。

2. 解析方法

三次元接合体の応力は境界要素法により求める。その式を以下に示す。

$$c_{ij}(P)u_j(P) = \int_{\Omega} U_{ij}^*(P, Q)t_j dS(Q) - \int_{\Omega} T_{ij}^*(P, Q)u_j dS(Q) \quad (1)$$

ここで、 c_{ij} は領域の形状により決まる定数、 Ω は解析領域の境界、 U_{ij}^* と T_{ij}^* は変位と作用力に対する基本解である。 P および Q はそれぞれ境界上の観測点とソース点である。 t_j と u_j は作用力ベクトルと変位ベクトルである。また、本研究では Rongved の二相体の解を基本解として用いているため、界面における要素分割を必要としない。

ここでは、応力特異性のオーダを有限要素法の定式化に基づく固有値解析により求める。固有値 p は特異性のオーダ λ と $\lambda = 1 - p$ の関係がある。この値 p

Table 1 Material properties and thermal stress

	Young's modulus	Thermal expansion	Poisson's ratio	Thermal stress
	E [Gpa]	α [ppm/K]	ν	σ_{th} [Mpa]
Silicon	166	0.30	0.26	161
Resin	2.74	33	0.38	58.4

Fig. 2 A model of bonded structures for analysis

は次式の固有方程式を解くことにより求められる⁽¹⁴⁾。

$$(p^2[A] + p[B] + [C])\{u\} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ および $[C]$ は弾性定数からなる行列、 $\{u\}$ は変位ベクトルである。

本論文では、境界要素法により熱残留応力の特異応力場の応力分布を求める。表面だけ要素分割すればよい境界要素法を用いることにより、有限要素法と同様の計算をする場合に比べ、少ないデータで計算できる。また、基本解に二相体の解を用いることにより、界面上および界面端の熱応力の特異応力場の分布を高精度に求めることができるなどの利点がある。等方・均質な弾性体において、 ΔT の温度変化を受けるときの自由熱膨張に伴う熱ひずみ ε_{ij}^T は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (3)$$

ここで、 α は材料の線膨張係数であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。自由熱膨張が拘束されていると熱応力が発生する。材料は Hooke 則に従うものとする。応力 σ_{ij} とひずみ ε_{ij} の関係は次式のように表される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (4)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

式(4)から応力をひずみで表すと式(5)が得られる。

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (5)$$

なお、ひずみは式(1)をソース点の座標で微分した式から求める。二つの材料がある温度 T で完全に接合された後、温度変化 ΔT を受ける場合、Duhamel の定理に基づけば、側面に仮想表面力が作用する通常の弾性問題と等価な問題として取扱うことができる。

3. 解析モデルおよび解析条件

本研究の解析モデルおよび寸法を図2に示す。被着材(Silicon)の寸法は高さ H が 0.1 mm、幅 w が 20 mm である。中間層(Resin)の厚さ t は 0.01 mm とし、Silicon を Resin で接合する構造をしている。各材料の物性値については、表1に示すとおりである。図2に示す解析モデルの側面にそれぞれの材料特性に応じた熱応力 $E_i \alpha_i \Delta T / (1 - 2\nu_i)$ ($i=1, 2$) を加え応力解析を行った。そして、解析後に加えた熱応力を除去することにより、熱残留応力を求めた。表1にモデルの

側面に加えた熱応力を示す。本論文では、被着材(Silicon)は同じ材料としているため、応力と変位は中間層の中央面に関して対称である。ここでは、要素数を少なくするためにモデルの対称性を考慮して要素分割を行った。

4. 解析結果および考察

4・1 固有値解析 固有値解析には既報⁽¹⁵⁾で説明した有限要素法モデルを用いた。解析モデルの要素分割図を図3に示す。図3(a)は特異点を原点とする単位球表面を ϕ 方向と θ 方向に分割したもので、(b)は ϕ - θ 面に展開したものである。いま、 ϕ_1 を図2に示すように解析する応力特異点で交わる応力特異線のなす角度とする。ここでは、三次元接合体角部の特異性および応力特異線上の特異性を調べるために $\phi_1=90^\circ$ および $\phi_1=180^\circ$ の場合について解析を行う。要素サイズは $(\theta \times \phi)=6^\circ \times 6^\circ$ である。表2に特異性のオーダー λ の解析結果を示す。本論文では角部からの特異性を λ_{vertex} 、応力特異線上の特異性を λ_{side} とする。なお、 $\phi_1=90^\circ$ について $p=1$ の三重根、 $\phi_1=180^\circ$ について $p=1$ の五重根が得られた。 $p=1$ の重根がある場合、三重根の場合には $\ln \bar{r}$ 、 $(\ln \bar{r})^2$ 、五重根の場合には $\ln \bar{r}$ 、 $(\ln \bar{r})^2$ 、 $(\ln \bar{r})^3$ 、 $(\ln \bar{r})^4$ の対数特異性が発生するため、接合端部の応力場は次のように表すこ

とができる⁽¹²⁾。

$$\sigma_{ij}(\bar{r}, \theta, \phi) = K_{1ij} f_{1ij}(\theta, \phi) \bar{r}^{-1} + K_{2ij} f_{2ij}(\theta, \phi) + \sum_{k=3}^M K_{kij} f_{kij}(\theta, \phi) (\ln \bar{r})^{k-2} \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $\bar{r}=r/t$ 、 $M=4$ (三重根の場合)、6(五重根の場合)である。

4・2 固有ベクトル解析 角部 [図3(b)の要素

分割 $\phi_1=90^\circ$]における固有値 p に対応する固有変位ベクトル[式(2)の $\{u\}$]から得られる角度依存関数 $f_{ij}(\theta, \phi)$ の分布($5^\circ \leq \theta \leq 175^\circ$, $5^\circ \leq \phi \leq 85^\circ$)を図4に示す。これらの分布はすべて $\theta=90^\circ$, $\phi=45^\circ$ における $f_{\theta\theta}$ の値で正規化して得られたものである。これは通常、 $f_{ij}(\theta, \phi)$ の最大値が1になるように正規化することが望ましいことであるが、 $f_{\theta\theta}$ が $\theta=90^\circ$ で、特異応力線に近づくに伴い($\phi \rightarrow 0$ および 90°)発散するためである。さらに、 f_{ij} の成分には $\phi=45^\circ$ で零となるものがあるため、ここではすべての f_{ij} に対して、同じ値で正規化を行っている。

次に、はく離に関係していると考えられる $\sigma_{\theta\theta}$ の角度依存関数 $f_{\theta\theta}$ について調べる。図5は特異性のオーダーに関する固有方程式を導出する際に用いる球座標系である。ここで、 r は原点Oから内点Pまでの距離、 r_0 は球の半径である。固有方程式の定式化の際、無次元距離 $\rho=r/r_0$ で特異場内の変位場を定義する。この球面上の応力分布が、 f_{ij} として求められる。ところで、 θ を一定としたときの ϕ に対する応力は図6のように自由表面と界面との交線である応力特異線からの影響を受けると考えられる。Monchaiら⁽¹⁶⁾は応力特異線に沿って三次元応力場を調べ、応力特異線近傍の特異応力場は指数特異性と対数特異性を組合わせた式で表すことができることを示した。本研究の解析モデルの角部近傍には2本の応力特異線があり、それぞれの応力特異線からの距離に応じて内部の応力分布に影響を与えていると考えられる。これらのことから、角部近傍の応力分布の角度依存関数は図5の球内において式(7)のように書くことができると考える。こ

(a) A mesh division of the surface of a unit sphere with the origin at the vertex

(b) A mesh on the developed $\theta \times \phi$ plane

Fig. 3 FEM model for eigen analysis

Table 2 List of eigen values and the order of stress singularity for joints of $\phi=90^\circ$ and 180°

	Stress singularity of the vertex $\phi=90^\circ$		Stress singularity of the side $\phi=180^\circ$	
	p_{vertex}	λ_{vertex}	p_{side}	λ_{side}
1	1.000	0.000	1.000	0.000
2	1.000	0.000	1.000	0.000
3	1.000	0.000	1.000	0.000
4	0.605	0.395	1.000	0.000
5	-	-	1.000	0.000
6	-	-	0.682	0.318

(a) Distribution of angular function f_{rr}

(d) Distribution of angular function $f_{\phi\phi}$

(b) Distribution of angular function $f_{\theta\theta}$

(e) Distribution of angular function $f_{r\theta}$

(c) Distribution of angular function $f_{\phi\theta}$

(f) Distribution of angular function $f_{r\phi}$

Fig. 4 Distribution of angular function f_{ij} on the θ - ϕ plane

Fig. 5 Spherical coordinate system with an origin at the singularity point

Fig. 6 The influence of singularity line on stress singularity field

で、 $L_{1\theta\theta} \sim L_{6\theta\theta}$ は応力特異線上の点の特異応力場の強さであり、添字の A, B は図 6 における各応力特異線上の点、 λ_{side} は応力特異線近傍の応力場の特異性のオーダーである。

$$f_{\theta\theta}^{\theta}(\rho_A, \rho_B, \phi, \lambda_{\text{side}}) = L_{1\theta\theta}^A \rho_A^{\lambda_{\text{side}}} + L_{1\theta\theta}^B \rho_B^{\lambda_{\text{side}}} + L_{2\theta\theta} \\ + \sum_{k=3}^6 L_{k\theta\theta}^A (\ln \rho_A)^{k-2} + \sum_{k=3}^6 L_{k\theta\theta}^B (\ln \rho_B)^{k-2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 ρ_A, ρ_B は球座標系の点 $P(\rho, \theta, \phi)$ から各応力特異線までの距離で、それぞれ $\rho_A = \rho \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi}$ 、 $\rho_B = \rho \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}$ である。さらに、ここでは $\rho = 1$ とする。

図 7 は、 $\theta = 90^\circ$ (界面) における $f_{\theta\theta}$ を角度 ϕ に対して $\circ$ で示したものである。これを実線のように式 (7) で近似し、 ϕ 方向の特異応力場の強さ $L_{\theta\theta}$ を得た。得られた係数を表 3 に示す。本論文のモデルでは、界面

Table 3 Coefficients of $f_{\theta\theta}$ determined by approximating for ϕ

$L_{1\theta\theta}$	$L_{2\theta\theta}$
0.532	-0.179

Fig. 7 Profile of $f_{\theta\theta}$ at $\theta = 90^\circ$ for ϕ

Fig. 8 Profile of $f_{\theta\theta}$ at $\phi = 45^\circ$ for θ

と側面とのなす角が両側面で同じであるので $L_{k\theta\theta}^A, L_{k\theta\theta}^B (k=1 \sim 6)$ は同じである。図 8 は、 $\phi = 45^\circ$ における $f_{\theta\theta}$ を θ に対して $\circ$ で示したものである。なお、実線は後述する近似曲線である。 $\phi = 45^\circ$ における応力分布は接合体角部を構成する側面からの影響が少ないと考え、二次元接合体の理論解を用いて図 8 の応力分布を近似することを試みる。Bogy⁽⁶⁾、井上、古口ら⁽¹³⁾ により求められた二次元接合体の θ 方向の応力分布は、式 (8) の Airy の応力関数 Φ を Mellin 変換を用いて得られ、式 (9) ~ (11) のように表される。

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$f_{\theta\theta}^{\theta}(\lambda_{\text{vertex}}, \theta) = \lambda_{\text{vertex}}(\lambda_{\text{vertex}} - 2) \\ \times \{a \sin[(\lambda_{\text{vertex}} - 2)\theta] + b \cos[(\lambda_{\text{vertex}} - 2)\theta] \\ + c \sin[\lambda_{\text{vertex}}\theta] + d \cos[\lambda_{\text{vertex}}\theta]\} \quad \dots\dots (9) \\ f_{rr}^{\theta}(\lambda_{\text{vertex}}, \theta) = -(\lambda_{\text{vertex}} - 1) \\ \times \{a(\lambda_{\text{vertex}} - 2) \sin[(\lambda_{\text{vertex}} - 2)\theta] \\ + b(\lambda_{\text{vertex}} - 2) \cos[(\lambda_{\text{vertex}} - 2)\theta]$$

Table 4 Coefficients in Eqs. (9)

	a	b	c	d
$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$	-0.620	-0.818	-1.10	0.762
$90^\circ \leq \theta < 180^\circ$	-0.635	-0.324	0.743	-0.0474

Fig. 9 Profile of f_{rr} at $\phi = 45^\circ$ for θ

Fig. 10 Profile of $f_{r\theta}$ at $\phi = 45^\circ$ for θ

$$\begin{aligned}
& +c(\lambda_{\text{vertex}}+2)\sin(\lambda_{\text{vertex}}\theta) \\
& +d(\lambda_{\text{vertex}}+2)\cos(\lambda_{\text{vertex}}\theta)\} \cdots \cdots \cdots (10) \\
f_{r\theta}^{\theta}(\lambda_{\text{vertex}}, \theta) & = (\lambda_{\text{vertex}}-1) \\
& \times \{a(\lambda_{\text{vertex}}-2)\cos[(\lambda_{\text{vertex}}-2)\theta] \\
& -b(\lambda_{\text{vertex}}-2)\sin[(\lambda_{\text{vertex}}-2)\theta] \\
& +c \cdot \lambda_{\text{vertex}} \cos(\lambda_{\text{vertex}}\theta) \\
& -d \cdot \lambda_{\text{vertex}} \sin(\lambda_{\text{vertex}}\theta)\} \cdots \cdots \cdots (11)
\end{aligned}$$

ここで、 $a \sim d$ は未定係数である。ただし、特異性のオーダー λ は二次元接合体の値ではなく、三次元角部での λ_{vertex} を使い、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ および $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ について、それぞれ $f_{\theta\theta}$ を近似し、未定係数 $a \sim d$ を求めた。得られた係数を表 4 に示す。この係数を $f_{\theta\theta}$ 以

外の $f_{rr}, f_{r\theta}$ についても適用し、その結果を図 9, 10 に実線で示す。図 8 および図 10 から界面における応力の連続条件を完全ではないが、ほぼ満足していることがわかる。なお本研究では、角度関数 $f_{\theta\theta}(\theta, \phi)$ は $f_{\theta\theta}^{\theta}(\lambda_{\text{vertex}}, \theta)$ と $f_{\theta\theta}^{\phi}(\lambda_{\text{side}}, \phi)$ の積であると考え、未定係数 $a \sim d$ を求めた。

4・3 特異応力場近傍の応力分布 次に示す応力分布は境界要素法を用いた熱残留応力解析により得られた結果である。図 11 は $r/t=0.01$ における θ, ϕ に対する σ_{ij} の応力分布 ($5^\circ \leq \theta \leq 175^\circ, 5^\circ \leq \phi \leq 85^\circ$) である。各応力は固有値解析と同様に $\theta=90^\circ, \phi=45^\circ$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の値を σ_0 として正規化を行ってある。熱

Fig. 11 Distribution of stress components σ_{ij} on the θ - ϕ plane for $r/t=0.01$

残留応力の分布は図4に示した固有値解析により得られた f_{ij} の結果と比較すると、両者はよく合っていることがわかる。このことから熱残留応力のように外力が作用しない場合の応力場は、固有値解析から得られる角度依存関数で容易に表すことができるといえる。

次に、 r に対する応力分布について調べる。図12は $\theta=90^\circ$ で $\phi=5^\circ\sim 45^\circ$ における応力 $\sigma_{\theta\theta}$ を r/t に対してプロットしたものである。図12から側面 ($\phi=0^\circ$) に近づくに伴い、応力分布全体が大きくなっていることがわかる。この分布を応力特異場の式(6)で $\ln \bar{r}$, $(\ln \bar{r})^2$ まで対数特異性の項を考慮し、近似する。近似により r 方向の特異応力場の強さ $K_{1\theta\theta}=0.251$ が得られた。ここで、式(7)において示した ϕ 方向の角度依存関数である $f_{\theta\theta}^{\phi}(\lambda_{\text{side}}, \phi)$ について考察する。角度依存関数 $f_{\theta\theta}^{\phi}(\lambda_{\text{side}}, \phi)$ は、 r 方向の特異場と同様に $\theta=90^\circ$ の界面上において自由表面に近づくに伴い発散する。角度依存関数 $f_{\theta\theta}^{\phi}(\lambda_{\text{side}}, \phi)$ において、 $L_{1\theta\theta}$ は応力特異線上の応力特異場の強さを表している。そこで、特異応力場の強さを表すパラメータである r 方向の特異応力場の強さ $K_{1\theta\theta}$ および上述の $L_{1\theta\theta}$

を考慮して、三次元特異応力場における応力分布を表すと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(\bar{r}, \rho_A, \rho_B) = & K_{1\theta\theta} \left\{ L_{1\theta\theta}^A \rho_A^{-\lambda_{\text{side}}} + L_{1\theta\theta}^B \rho_B^{-\lambda_{\text{side}}} \right. \\ & + L_{2\theta\theta} + \sum_{k=3}^m L_{k\theta\theta}^A [\ln \rho_A]^{k-2} \\ & + \sum_{k=3}^m L_{k\theta\theta}^B [\ln \rho_B]^{k-2} \left. \right\} \bar{r}^{-\lambda_{\text{vertex}}} f_{1\theta\theta}^{\theta}(\theta, \lambda_{\text{vertex}}) \\ & + K_{2\theta\theta} f_{2\theta\theta}(\theta, \phi) + \sum_{l=3}^n K_{l\theta\theta} [\ln \bar{r}]^{l-2} f_{l+2\theta\theta}(\theta, \phi) \\ & \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

この式で対数項を考慮せず、解析モデルの対称性 ($\phi=45^\circ$) から $L_{1\theta\theta}^A=L_{1\theta\theta}^B$ であることを考慮すると式(12)は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(\bar{r}, \rho_A, \rho_B) = & K_{1\theta\theta} L_{1\theta\theta} [\rho_A^{-\lambda_{\text{side}}} + \rho_B^{-\lambda_{\text{side}}} \\ & + (L_{2\theta\theta}/L_{1\theta\theta})] \bar{r}^{-\lambda_{\text{vertex}}} f_{1\theta\theta}^{\theta}(\theta, \lambda_{\text{vertex}}) \\ & + K_{2\theta\theta} f_{2\theta\theta}(\theta, \phi) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

この式の r 方向の特異応力場の強さと応力特異線の特異応力場の強さの積 $K_{1\theta\theta} L_{1\theta\theta}$ が、三次元の特異応力場の強さであると考える。ここで、三次元の特異応力場の強さを $K_{1\theta\theta}^{3D}$ とすると、本研究の解析モデルの特

Fig. 12 Stress distribution for several ϕ at $\theta=90^\circ$ against r/t

Fig. 13 Stress distribution of several ϕ direction at $\theta=90^\circ$ against r/t

Fig. 14 Coefficients of $K_{2\theta\theta} f_{2\theta\theta}(\theta, \phi)$

Fig. 15 Stress distribution for several θ at $\phi=45^\circ$ against r/t

Fig. 16 Stress distribution for several θ at $\phi=45^\circ$ against r/t

異応力場の強さは $K_{100}^{3D}=0.134$ となる。式 (13) を変形して $K_{100}^{3D} \bar{r}^{-\lambda_{\text{vertex}}}$ を求めると、次式が得られる。

$$K_{100}^{3D} \bar{r}^{-\lambda_{\text{vertex}}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(\bar{r}, \rho_A, \rho_B) - K_{200} f_{200}(\theta, \phi)}{[\rho_A^{\lambda_{\text{side}}} + \rho_B^{\lambda_{\text{side}}} + (L_{200}/L_{100})] f_{100}^{\theta}(\theta, \lambda_{\text{vertex}})} \quad \dots\dots\dots (14)$$

いま、この式の左辺を $G(\bar{r})$ とおく。この式は角度 ϕ, θ によらないはずである。一方、右辺は角度 ϕ, θ の影響により変化する可能性がある。いま、右辺を $\sigma^*(\bar{r}, \theta, \phi)$ とする。 $G(\bar{r})$ および $\sigma^*(\bar{r}, \theta, \phi)$ を $\bar{r}$ に対してプロットした結果が図 13 である。ここで、 $K_{200} f_{200}(\theta, \phi)$ は図 12 の応力分布を近似することにより求めた。 ϕ, θ に対する $K_{200} f_{200}(\theta, \phi)$ を図 14 に示す。図 13 を見ると $r/t < 0.3$ において指数特異性が支配的であり、 ϕ 方向の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布の角度依存性は式 (13) により表せることがわかる。図 15 は $\phi=45^\circ$ における $\theta=50^\circ \sim 130^\circ$ の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ を r/t に対してプロットしたものである。図 13 と同様に $G(\bar{r})$ および $\sigma^*(\bar{r}, \theta, \phi)$ の r/t に対する分布を図 16 に示す。 ϕ 方向と同様に、 $r/t < 0.3$ において三次元の指数特異性が支配的であり、 θ 方向の角度依存性は $f_{100}^{\theta}(\theta, \lambda_{\text{vertex}})$ および ρ_A, ρ_B で表すことができることがわかる。

以上のように三次元接合体角部の特異応力場の強さは、特に応力特異線上の応力特異性と関係のある応力成分では、三次元角部から見て r 方向および ϕ 方向の角度依存関数の特性を考慮しながら求めることが必要である。この点が二次元接合体界面端における特異応力場の強さの求め方の違いといえる。

5. 結 言

本論文は中間層を有する三次元異材接合体の熱残留応力の特異応力場を詳細に調べたものである。その結

果をまとめると以下ようになる。

(1) 固有変位ベクトルおよび境界要素法から得た特異応力場の分布を $\theta=90^\circ, \phi=45^\circ$ で無次元化を行い、球面座標上にプロットした。両者を比較した結果、よく合っていることがわかった。

(2) 三次元接合体角部を原点とする球座標系で界面 ($\theta=90^\circ$) と ϕ 方向で自由表面との交点は応力特異線上の応力特異性を有している。このことを考慮して応力場の角度依存関数を定義し、三次元接合体の角部における特異応力場を表す必要があることがわかった。

(3) ϕ 方向の特異応力場の強さと r 方向の特異応力場の強さの積により三次元の特異応力場の強さを決定した。

(4) 二次元接合体の特異応力場の式で $\phi=45^\circ$ における応力分布を、ある程度近似できることがわかった。

文 献

- (1) Miura, K., Nishimura, A., Kawai, S. and Nishi, K., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 55, No. 516 (1989), pp. 1763-1769.
- (2) Seo, K., Kusaka, M., Nogata, F., Terasaki, T., Nakao, Y. and Saida, K., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 55, No. 510 (1989), pp. 312-317.
- (3) Kobayashi, H., Arai, Y., Nakamura, H. and Nakamura, M., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 55, No. 512 (1989), pp. 750-754.
- (4) Bogy, D. B., On the Problem of Edge-Bonded Elastic Quarter Planes Loaded at the Boundary, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6 (1970), pp. 1287-1313.
- (5) Bogy, D. B., Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38 (1971), pp. 377-386.
- (6) Bogy, D. B. and Wang, K. C., Stress Singularities at Interface Corners in Bonded Dissimilar Isotropic Elastic Materials, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7 (1971), pp. 993-1005.
- (7) Dempsey, J. P. and Sinclair, G. B., On the Stress Singularities in the Plane Elasticity of the Composite Wedge, *J. Elasticity*, Vol. 9 (1979), pp. 373-391.
- (8) Yuuki, R. and Xu, J. O., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 58, No. 556 (1992), pp. 2394-2400.
- (9) Munz, D. and Yang, Y. Y., Stress Singularity at the Interface in Bonded Dissimilar Materials Under Mechanical and Thermal Loading, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59 (1992), pp. 857-861.
- (10) Munz, D., Matthias, A. and Yang, Y. Y., Thermal Stresses in Ceramic-Metal Joints with an Interlayer, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 78, No. 2 (1995), pp. 285-290.
- (11) Ioka, S., Masuda, K. and Kubo, S., Singular Stress

- Distributions near the Edge of Interface of Bonded Dissimilar Materials with an Interlayer, *Journal of the Society of Materials Science*, Vol. 53, No. 8 (2004), pp. 841-845.
- (12) Koguchi, H., Yamaguchi, M., Minaki, K. and Prukvilailert, M., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 69, No. 679 (2003), pp. 585-593.
- (13) Inoue, T., Koguchi, H. and Yada, T., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 61, No. 581 (1995), pp. 73-79.
- (14) Pageau, S. S. and Bigger, Jr. S. B., Finite Element Evaluation of Free-Edge Singular Stress Fields in Anisotropic Material, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38 (1995), pp. 2225-2239.
- (15) Koguchi, H., Sakai, H. and Prukvilailert, M., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 71, No. 703 (2005), pp. 402-410.
- (16) Monchai, P. and Koguchi, H., Boundary element analysis of the stress field at the singularity lines in three-dimensional bonded joints under thermal loading, *J. Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 2, No. 1 (2007), pp. 149-166.
-