非線形マルチスケール材料解析における数値材料実験*

寺田 賢二郎^{*1}, 犬飼 壮典^{*2}, 平山 紀夫^{*3}A Method of Numerical Material Testing
in Nonlinear Multiscale Material AnalysesKenjiro TERADA^{*4}, Takenori INUGAI and Norio HIRAYAMA^{**}Department of Civil Engineering, Tohoku University,
6-6-06 Aramaki, Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai-shi, Miyagi, 980-8579 Japan

A method of numerical material testing is developed for characterizing equivalent or macroscopic mechanical and/or other physical properties of composite materials with heterogeneous microstructures. The proposed method is prepared for testing on a variety of heterogeneous microstructures and nonlinear material behavior of constituents and their interfaces under various patterns of macroscopic loading. The numerical material testing in this method is intended to be carried out by means of the finite element method with a quasi-static implicit solution scheme in conjunction with the homogenization theory for periodic microstructures, i.e., unit cells.

Key Words: Numerical Material Testing, Nonlinear Multiscale Analysis, Homogenization Method, Finite Element Method, Computational Mechanics

1. 緒 言

均質化法^{(1)~(3)}が応用数学における新たな一分野として理論整備が行われ初めたのは 70 年代後半であるが、有限要素法 (以下, FEM) の数学理論が確立した後であったことも幸いして、80 年代半ばには工学分野における主要なジャーナルに具体的な計算例とともに紹介されている^{(4) (5)}。ただし、均質化法が計算力学分野で注目され始めたのは、均質化と局所化解析の過程を材料プリ・ポストプロセスと呼んで今日の CAE への展開を示唆した Guedes と Kikuchi⁽⁶⁾による研究からであり、以降、複合材料に対するマルチスケール解析手法の理論的枠組みの一つとして認められるようになった。

均質化法に基づくマルチスケール材料解析の最大の特徴は、周期的な空間分布が仮定できる微視的 (ミクロ) 構造の幾何性状・材料情報を既知として、巨視的 (マクロ) な材料挙動を数値解析により予測し、これをマクロ構造の数値解析に反映させるとともに、マクロ構造内の各点の応答を発現せしめているミクロ構造の挙動を数値的に評価しうることにある⁽³⁾。線形性が仮定できる材料挙動については、均質化理論も完全に整備されており、汎用化も容易である。

さらに、均質化法の数学理論はほとんどすべての物理現象への適用が可能⁽⁷⁾であり、線形問題と非線形問題で導かれる支配方程式の数値構造に本質的な差はない。ただし、線形問題ではマクロ構成則の関数形が既知であるので、均質化過程でその材料パラメータを算出すれば、ミクロ解析とは独立にマクロ解析を行うことができるのに対して、非線形問題についてはミクロとマクロの応答を切り離すための数値構造が提供されない限り、原則としてミクロおよびマクロ構造に対する支配方程式を連立させて解くしか方策がない^{(8)~(10)}。したがって、非線形マルチスケール材料解析では、ミクロおよびマクロ問題のそれぞれを FEM で同時に解析するミクロ・マクロ連成解法の適用が前提となり、多くの研究成果^{(11) (12)}が得られているものの、計算効率の面で実用的ではなく、汎用 FEM ソフトへの実装が困難であることから、CAE ツールとしての普及には至っていない。

ミクロ・マクロ連成解法の計算コストの軽減を意図した種々の方策も提案されている。Terada と Kikuchi⁽⁸⁾は、有限変形弾塑性問題に対してマクロ応力および材料接線係数を複数の変形パターンに対する数値実験によりデータベース化しておき、これを参照しながらマクロ問題を解析する手法を提案し、Temizer と Wriggers⁽¹³⁾はこのアプローチを超弾性体に適用している。また、Oskay と Fish⁽¹⁴⁾は均質化・局所化に用いる特性関数を少ない自由度で解くミクロ・マクロ連成

* 原稿受付 2008 年 3 月 5 日。

^{*1} 正員, 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)。^{*2} 東北大学大学院工学研究科。^{*3} 日東紡績 (株) 開発推進本部福島研究所 (〒960-8581 福島市郷野目字東 1)。

E-mail: tei@civil.tohoku.ac.jp

解析手法を提案している。一方、渡邊・寺田⁽¹⁵⁾は、非線形マクロ構成則を事前に仮定することでミクロとマクロの境界値問題を非連成化し、線形問題と同様のプロセスにより非線形マルチスケール材料解析を実現するミクロ・マクロ非連成解法を提案している。これらの手法は、それぞれ一長一短を有しており、近似解法であるので解析結果に誤差が含まれることは避けられない。しかし、非線形マルチスケール材料解析の汎用化と実務レベルでの利用を実現させるためには、材料種別はある程度限られることになるが、ミクロ・マクロ非連成解法が現実的な選択であると考えられる。ただし、渡邊・寺田⁽¹⁵⁾では、複合材料の有限変形弾塑性・超弾性問題を題材として非連成化の考え方と簡単な検証例を示すにとどまっており、均質化と局所化の理論を反映した数値材料実験の考え方と方法が確立されているとはいえない。

そこで本論文では、ミクロ・マクロ非連成近似解法⁽¹⁵⁾を用いた非線形マルチスケール材料解析手法の実用化・汎用化を意図して、複合材料の大変形問題に対する数値材料実験手法を整備する。具体的には、均質化法における均質化・局所化解析に係る理論と FEM によるミクロ構造の解析条件とを関連づけて提示することで、汎用的な数値材料実験システムを構築するとともに、これを利用した非線形マルチスケール材料解析を例示する。

以下ではまず、均質化理論により導かれる 2 変数境界値問題を与えて、ミクロ・マクロ非連成解析による非線形マルチスケール材料解析手法を紹介する。そして、ミクロ解析に対する FEM の適用を前提として、均質化理論に基づく数値材料実験の方法を述べる。そして、最後にマクロ材料挙動に異方性超弾性体を選んでミクロ・マクロ非連成解析を行い、非線形マルチスケール材料解析の数値例を示すことにする。

2. 均質化法に基づくマルチスケール材料解析

本節では、複合材料の大変形問題に対して、均質化法を適用することで導かれる 2 変数境界値問題を示し、対応する非線形マルチスケール材料解析のためのミクロ・マクロ連成および非連成解法について述べる。

2.1 2 変数境界値問題 均質化法⁽³⁾では、非均質材料のミクロ構造とマクロ構造について、それぞれ個別の境界値問題が設定される。ここでは、有限変形問題の枠組みで均質化理論により導出されるそのミクロおよびマクロスケールの支配方程式を与え、2 変数境界値問題⁽¹⁶⁾を設定する。

まず、材料の非均質性の特徴づける周期的なミクロ

構造（ユニットセル）の物理領域の初期配置 $\mathcal{Y}_0$ に対して設定した初期座標 $\mathbf{Y}$ と現配置 $\mathcal{Y}$ における空間位置 $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{Y})$ からミクロ変形勾配を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla_{\mathbf{Y}} \varphi(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{w}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + \mathbf{1} \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^*(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + \mathbf{1} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\nabla_{\mathbf{Y}}$ 、 $\nabla_{\mathbf{X}}$ はそれぞれミクロおよびマクロスケールの初期配置に関する勾配、 $\mathbf{1}$ は 2 階の単位テンソルであり、 $\nabla_{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{u}} := \tilde{\mathbf{H}}$ は後述する（ $\mathbf{Y}$ に独立な）マクロ変位勾配、 $\mathbf{u}^*$ 、 $\mathbf{w}$ はそれぞれミクロスケールの擾乱変位場と実変位場である。なお、式 (1) におけるマクロ変位勾配 $\tilde{\mathbf{H}}$ は、マクロ初期座標 $\mathbf{X}$ のみに依存するので以下で与えるユニットセルの平衡方程式に対する負荷パラメータとみなされる。また、式 (1) の擾乱変位場 $\mathbf{u}^*$ には初期配置のユニットセル境界 $\partial \mathcal{Y}_0$ で次式のような周期拘束が課せられる。

$$\mathbf{u}^*|_{\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}} = \mathbf{u}^*|_{\partial \mathcal{Y}_0^{[-J]}} \quad (J = 1, 2, 3) \quad (2)$$

ここで、ユニットセルが直方体でその境界面が初期配置の座標面と平行に置かれているものとすれば、 $\partial \mathcal{Y}_0^{[\pm J]}$ は Y_J 面（つまり、基底ベクトル $\mathbf{E}^{[J]}$ が法線ベクトルとなる面）に平行な部分的な境界領域である。

また、ミクロスケールのユニットセル $\mathcal{Y}_0$ についての平衡方程式は

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{Y}_0 \quad (3)$$

で与えられ、ミクロ第 1 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{P}$ は式 (1) のミクロ変形勾配 $\mathbf{F}$ の関数として導入される任意の構成則により決定される。また、擾乱変位場 $\mathbf{u}^*$ の周期性より、単位法線ベクトル $\mathbf{N}$ を有する境界面上の Piola 応力ベクトル $\mathbf{T}^{(N)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$ には初期配置のユニットセル境界 $\partial \mathcal{Y}_0$ で反対称性、

$$\mathbf{T}^{[J]} + \mathbf{T}^{[-J]} = \mathbf{0} \quad (4)$$

が課せられる。ここで、ユニットセルの初期配置の Y_J 軸の基底ベクトルを $\mathbf{E}^{[J]}$ として、 $\mathbf{T}^{[\pm J]} := \mathbf{T}^{(\pm \mathbf{E}^{[J]})}$ と定義した。

一方、マクロ領域の初期配置と現配置をそれぞれ $\mathcal{B}_0$ 、 $\mathcal{B}$ 、物質点の初期座標 $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ とその現在の位置 $\mathbf{x} = \tilde{\varphi}(\mathbf{X}) \in \mathcal{B}$ から、マクロ変形勾配 $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{\varphi}$ が定義できるが、これは擾乱変位場 $\mathbf{u}^*$ の周期性により、次式のように対応するミクロ変形勾配のユニットセル体積平均に等しいことを示すことができる。

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{|\mathcal{Y}_0|} \int_{\mathcal{Y}_0} \mathbf{F} d\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{1} \quad (5)$$

ここで、 $|\mathcal{Y}_0|$ はユニットセルの初期体積であり、 $\tilde{\mathbf{H}} = \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ はマクロ変位勾配である。また、同様にマクロ第1 Piola-Kirchhoff 応力も対応するミクロ応力のユニットセルの初期配置での体積平均として

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{|\mathcal{Y}_0|} \int_{\mathcal{Y}_0} \mathbf{P} d\mathbf{Y} \quad (6)$$

で与えられ、次の平衡方程式を満たすことがわかる。

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \text{ in } \mathcal{B}_0 \quad (7)$$

ここで $\tilde{\mathbf{b}}$ は物体力である。一般に、 $\tilde{\mathbf{P}}$ の変形に関する関数形は陽に導かれないので、前述のミクロ問題を解いて得られるミクロ応力を用いて式 (6) から算定することになる。

以上をまとめると、まずミクロ境界値問題（以下、ミクロ問題）は、マクロ平衡方程式 (7) を満たすマクロ変形（例えば $\tilde{\mathbf{H}}$ ）を入力データとして、擾乱変位場 $\mathbf{u}^*$ に周期拘束条件を与えて平衡方程式 (3) を解く問題である。一方、マクロ境界値問題（以下、マクロ問題）は、ミクロ問題の解として得られるミクロ応力のユニットセル体積平均 (6)、すなわちマクロ応力 $\tilde{\mathbf{P}}$ がマクロ構造の平衡方程式 (7) を満たすように定める問題である。このような数理構造を有する問題を2スケール境界値問題と呼んでいる。

2スケール境界値問題では、ミクロ問題がマクロ変形からマクロ応力を算出する役割を担っており、マクロ構成則そのものとして機能する。したがって、ユニットセルをどのような材料で構成しても陽な関数形でマクロスケールの材料構成則を持たなくてもマクロ平衡問題を解きうることになる。

2.2 ミクロ・マクロ連成解法と非連成近似解法
先に述べたように、2スケール境界値問題では、マクロ応力はミクロ応力を通して陰的にしか与えられないことになるので、FEM で解析する際には、マクロ構造の数値解析モデルのすべての応力評価点において、対応するマクロ変形をデータとしてミクロ問題を解き、得られるミクロ応力のユニットセル体積平均としてマクロ応力を算出する必要がある。特に、増分解法と陰解法の適用を前提とすれば、各荷重増分ステップにおけるマクロ構造の平衡状態を得るために Newton-Raphson 法の各反復ステップにおいて、すべての積分点でのマクロ応力とマクロ接線係数をミクロ問題を解くことで算定したうえで非線形解析を行うことになる^{(10) (16)}。このとき、マクロ応力の算出に際しても、ミクロ問題に対して非線形有限要素解析を逐一行うことになる。

このように両スケールの境界値問題を解きながら進めるマルチスケール解析をミクロ・マクロ連成解析と

呼んでいるが、マクロ構造の数値解析モデルが大規模になれば（すなわちマクロメッシュの要素数が増えれば）計算負荷が増大する。勿論、クラスター型並列計算機などを利用してミクロ解析を複数 CPU に割り当てる手法⁽¹⁷⁾などによりある程度計算負荷を軽減できるが、それでも相当の計算コストがかかり、緒言でも述べたように、マクロスケールでの実際的な解析を想定すると現実的な解析手法とはいえない。

そこで考案された手法が、ミクロ・マクロ非連成近似解法⁽¹⁵⁾である。この手法は、与えられたミクロ構造に対してあらかじめマクロスケールに発現するであろう非線形材料挙動を推定して、手持ちで利用可能なマクロ構成則を仮定し、その材料パラメータをミクロ解析を行うことで同定したうえでマクロ解析を行い、必要に応じてマクロ変形履歴をデータとしてミクロ解析を行うというものである。この手法によるマルチスケール材料解析は以下の手順で行うことになる。

- (i) 与えられたミクロ構造から得られるであろうマクロ構成則を仮定する。
- (ii) ミクロ構造に対して代表的なマクロ変形あるいは応力パターンを設定して、これをデータとするミクロ解析を実施し、対応するマクロ応力・ひずみ関係を得る（均質化プロセス）。このマクロ材料応答を得るための一連のミクロ解析は均質化解析であり、本研究では「数値材料実験」と呼ぶことにする。
- (iii) 数値材料実験で得られた数値的なマクロ応力・ひずみ関係を用いて、仮定したマクロ構成則に含まれる材料パラメータを同定する。（上述の数値材料実験はこのパラメータ同定を想定して適切な実験ケースを選ぶ必要がある。）
- (iv) 同定した材料パラメータを用いてマクロ解析を行う。
- (v) （必要に応じて）マクロ構造内の任意の点で得られるマクロ変形履歴を入力データとしてミクロ解析を行い、ミクロ構造の変形・応力状態を再現する（局所化プロセス）。

均質化法では、ミクロ構造内の構成材料の材料挙動は既知であることが前提となっているので、ステップ (i) で仮定しなければならないマクロ材料の構成則としては、ミクロ構造に導入した構成則の特性を継承するものに限定しようと考えられる。例えば、ミクロ構造を超弾性体で構成すれば、マクロ的にも超弾性構成モデルで対応可能であろうし、弾塑性変形を示す構成材料であれば、マクロ挙動も弾塑性モデルの枠外に出

ることではない。また、ミクロ構造の構成材料のひび割れや材料界面での剥離などの構造形態の変化があったとしても、マクロ的には損傷モデルで近似しようと期待されるし、固体と液体が混在するような材料でも対応する構成則があれば利用可能であろう。勿論、ミクロ構造内の任意の幾何・分布性状を仮定すればマクロ的な材料挙動に異方性が現れ得るので、必要に応じてその点を考慮に入れればよい。ただし、仮定したマクロ構成則は、必ずしも2変数境界値問題の枠組みにおいてミクロ構造の直接的な応答としてのマクロ材料挙動と一致するとは限らないので、この手法はあくまでも近似的な解法である。どのようなマクロ材料挙動の特徴の近似度を上げるかは解析者の要求次第であるといえ、仮にこの種の近似が好ましくないのであれば先に述べたミクロ・マクロ連成解析しか選択肢がないことは言うまでもない。

3. 数値材料実験

前節で述べたミクロ・マクロ非連成近似解法によるマルチスケール材料解析の精度を左右するのは、仮定するマクロ構成則の正当性以外では、ステップ(ii)と(iii)、すなわちミクロ構造に対する均質化解析により数値材料実験を行い、その結果からマクロ材料パラメータを同定するプロセスである。なかでもステップ(ii)の数値材料実験では、マクロ変形(あるいは応力)をデータとして2変数境界値問題におけるミクロ境界値問題を解いて、対応するマクロ応力(あるいは変形)を算定し、数値的なマクロ応力-ひずみ関係を求めることになる。本節ではまず、ミクロ境界値問題を見通しのよい形式に書き換えた後に、FEMによる具体的な数値材料実験⁽¹⁸⁾の方法と手続きについて述べる。

3.1 ミクロ境界値問題 ユニットセルの実変位場 $\mathbf{w}$ は式(1)を積分することにより、 $\mathbf{c}$ を ($\mathbf{Y}$ に依存しない) 積分定数のベクトルとして次式で与えられる。

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{u}^* + \mathbf{c} \quad (8)$$

ここで、擾乱変位の周期性(2)より、実変位についての拘束条件が次式のように得られる。

$$\mathbf{w}^{[J]} - \mathbf{w}^{[-J]} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{L}^{[J]} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{w}^{[\pm k]} := \mathbf{w}|_{\partial \mathcal{Y}_0^{[\pm k]}}$ とおいた。また、擾乱変位の周期拘束が与えられる点同士を結ぶベクトルを

$$\mathbf{L}^{[J]} := \mathbf{Y}|_{\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}} - \mathbf{Y}|_{\partial \mathcal{Y}_0^{[-J]}} \quad (10)$$

と定義し、辺ベクトルと呼ぶことにする。

また、ユニットセル境界の Piola 応力ベクトルにも反対称性(4)があるので、ユニットセル境界面 $\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}$ の表面積を $|\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}|$ と書いて、

$$\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{E}^{[J]} = \tilde{\mathbf{T}}^{[J]} = \frac{1}{|\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}|} \int_{\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}} \mathbf{T}^{[J]} ds \quad (11)$$

が成り立つことが分かる。あるいは、空間座標の基底ベクトルを $\mathbf{e}^{[i]}$ としたとき、

$$\tilde{P}_{ij} = \mathbf{e}^{[i]} \cdot (\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{E}^{[J]}) = \frac{1}{|\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}|} \int_{\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}} T_i^{[J]} ds \quad (12)$$

であり、第1Piola-Kirchhoff 応力(公称応力)の成分は、ミクロスケールの Piola 応力ベクトルを初期配置のユニットセル境界面 $\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}$ ごとに面積平均として算出されることになる。したがって、ユニットセル境界に課せられるミクロ Piola 応力ベクトルの反対称性の関係式(4)の各項の面積平均をとったものは、基底ベクトル $\mathbf{E}^{[J]}$ で規定されるマクロ物質面におけるマクロ Piola 応力ベクトルの作用・反作用の関係式に他ならない。

いま、ミクロ構造を構成する材料として応力の応答関数が $\mathcal{F}(\mathbf{F})$ で与えられる超弾性体を仮定し、改めてミクロ境界値問題を設定すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla_Y \cdot \mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F} &= \nabla_Y \mathbf{w} + \mathbf{1} \\ \mathbf{P} &= \mathcal{F}(\mathbf{F}) \end{aligned} \right\} \text{ in } \mathcal{Y}_0 \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}^{[J]} - \mathbf{w}^{[-J]} &= \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{L}^{[J]} \\ \text{and} \\ \tilde{\mathbf{T}}^{[J]} &= \frac{1}{|\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}|} \int_{\partial \mathcal{Y}_0^{[J]}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}^{[J]} ds \end{aligned} \right\} \text{ on } \partial \mathcal{Y}_0^{[J]} \quad (14)$$

この問題は、ユニットセルの幾何学的情報および材料パラメータ(応答関数の係数)、そしてマクロ問題の解に相当するマクロ変形(ここでは $\tilde{\mathbf{H}}$) あるいはマクロ公称応力をデータとして解くべきユニットセルの静的平衡問題である。荷重条件と境界条件が特殊である以外は通常の境界値問題である。ただし、以下でみるように、これらの境界条件式において、マクロ変形勾配 $\tilde{\mathbf{H}}$ の9成分とマクロ公称応力の9成分 $\tilde{\mathbf{P}}$ は双対の関係にあり、独立に与えることはできないことに注意されたい。

なお、以上の定式化は、いくつかの先行研究⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾でも利用されており、汎用 FEM ソフトでの解析も例示されているが、以下に述べるようなミクロ・マクロ非連成近似解法を用いた大変形マルチスケール材料解析システムへの適用を念頭に置いたものではない。本稿は、そういった立場で改めて均質化理論と FEM による解析条件の対応を整理し、それを実装する汎用的な数値材料実験ツールを提示するものである。

Fig. 1 External material points for controlling relative displacements and reaction forces on unit cell boundary surfaces.

3.2 外部物質点を用いたミクロ問題の境界条件

ここでは、前節で与えたミクロ境界値問題における境界条件について、外部物質点を導入した解釈を解説する。

まず、拘束条件式(9) (すなわち、(14)の第1式)を、

$$w^{[J]} - w^{[-J]} = q^{[J]} \quad (15)$$

と書くことにする。ここで、

$$q^{[J]} := \tilde{H} \cdot L^{[J]} \quad (16)$$

とおいた。そして、図1に示すようにユニットセル境界 $\partial y_0^{[J]}$ に対応して3つの物質点をユニットセル領域外に設け、それぞれにベクトル $q^{[J]}$ の3成分の自由度を付与すると、式(15)は相対する境界上の2点の変位ベクトルと外部物質点1つの変位ベクトルを関連づける拘束条件式とみなすことができる。したがって、ユニットセルにマクロ変位勾配 $\tilde{H}$ の任意の成分を与えるためには、外部物質点の変位成分 $q_i^{[J]}$ を制御すればよいことになる。

いま、式(15)の $q_i^{[J]}$ を外部物質点の既知データとして与えると、相対変位 $w_i^{[J]} - w_i^{[-J]}$ を与えたことになるので、境界 $\partial y_0^{[J]}$ 上のミクロ Piola 応力ベクトル $T_i^{[J]}$ はその全域で反力として未知数となる。このとき、式(12) (すなわち、(14)の第2式) から、境界 $\partial y_0^{[J]}$ 上での面積平均値であるマクロ Piola 応力ベクトル $\tilde{T}_i^{[J]}$ も未知数となる。ただし、既知の変位成分 $q_i^{[J]}$ に対応する外部物質点の反力は、ミクロ Piola 応力ベクトル $T_i^{[J]}$ の合力、すなわち面積積分量

$$\tilde{R}_i^{[J]} = \int_{\partial y_0^{[J]}} T_i^{[J]} ds \quad (17)$$

に他ならないので、これを初期配置のユニットセル境界面 $\partial y_0^{[J]}$ の表面積 $|\partial y_0^{[J]}|$ で除した量がマクロ第

1Piola-Kirchhoff 応力の成分 $\tilde{T}_i^{[J]} = \tilde{P}_{ij}$ となる (式(11)および(12)参照)。

逆に、マクロ第1Piola-Kirchhoff 応力の成分 $\tilde{P}_{ij}$ を既知データとして与えるには、式(11)あるいは式(12)から、外部物質点に反力(17)に対応する力をデータとして与えればよい。このとき、対応する外部物質点の変位ベクトルの成分 $q_i^{[J]}$ が未知数であり、拘束条件式(15)より、ユニットセル境界面 $\partial y_0^{[J]}$ におけるミクロスケールの実変位 $w_i^{[\pm J]}$ も未知となる。

均質化理論では、ユニットセル領域はマクロ物質点に対応しており、マクロ応力・変位勾配などのテンソル成分は、この点を通る3つ座標面上のベクトル成分と対応付けられる。本節で導入した3つの外部物質点は、このマクロ物質点を通る3つ座標面上のベクトル量を付与するために設けたものであり、材料力学の視点から均質化理論の定式化を整理するうえで見通しを良くしている。

3.3 ミクロ問題の有限要素解析

前項で述べたような外部物質点を用いて記述したミクロ境界値問題をFEMで解く際の具体的な方法を述べる。

ミクロ問題の解析に際しては、ユニットセル本体のメッシュに加え、外部物質点に質点の属性を与えた節点を設けて、節点変位あるいは節点荷重のいずれかを入力データとして与えることになる。上でみたように、このデータを与えることは、ユニットセルから算出されるマクロ応力あるいはマクロ変形勾配を制御することを意味するので、以下では、この付加的な節点を、制御節点 (あるいはコントロール節点) と呼ぶことにする。

まず、ユニットセルの平均的な変形を既知として、対応するマクロ変形勾配の全成分を与える場合を考える。このとき、式(16)より、 $\partial y_0^{[J]}$ ($J = 1, 2, 3$) に

対して設けた3つの制御節点の変位ベクトルのすべての成分 $q_i^{[j]}$ を与えて、平衡方程式 (13) を解けばよい。この有限要素解析の結果としては、ミクロ変位・変形・応力が求められるが、同時に変形後の制御節点の反力 $\mathbf{R}^{[j]}$ も求められ、式 (12) (すなわち、(14) の第2式) から、マクロ第1Piola-Kirchhoff 応力 $\hat{\mathbf{P}}$ が算出される。すなわち、マクロ応力は、式 (6) のようにミクロ応力の体積平均として数値積分などして求める必要はない。また、マクロ変位勾配 $\hat{\mathbf{H}}$ からマクロ変形勾配 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \hat{\mathbf{H}}$ およびそのヤコビアン $\hat{J} = \det \hat{\mathbf{F}}$ が求められるので、マクロ真 (Cauchy) 応力は $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{F}}^T / \hat{J}$ により算出すればよい。なお、制御節点の反力 $\mathbf{R}^{[j]}$ は変形後のユニットセル境界の表面力の合力であるので、変形後の境界の表面積で除することでもマクロ真応力を算出可能である。しかし、変形後の境界面は一般に曲面であることに加え、そこでの要素の表面積を個別に算出する必要があるのでこの方法は推奨されない。

一方、ユニットセルにマクロ第1Piola-Kirchhoff 応力の全成分を与える場合、その初期の境界面積を勘案して、制御節点の自由度に対応する荷重を与えることになる。このとき、ユニットセルを構成する全節点変位に加えて、対応する制御節点の変位が未知数である。いま、これらの3つのユニットセル境界面における制御節点の変位とマクロ変形との勾配関係式 (16) を並べて書くと $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{L}$ となる。ここで、 $\mathbf{Q} = [q^{[1]} \ q^{[2]} \ q^{[3]}]$ および $\mathbf{L} = [L^{[1]} \ L^{[2]} \ L^{[3]}]$ と定義した。これより、与えたマクロ応力に対応して、ミクロ解析の結果として得られる制御節点の変位から、マクロ変位勾配 $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^{-1}$ が一意に定められ、同時にマクロ変形勾配 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \hat{\mathbf{H}}$ およびそのヤコビアン $\hat{J} = \det \hat{\mathbf{F}}$ が求められる。このとき、マクロ右および左 Cauchy-Green 変形テンソルは、それぞれ $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}}$ 、 $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^T$ のように算出される。そして、マクロ右ストレッチテンソル $\hat{\mathbf{U}}$ と左ストレッチテンソル $\hat{\mathbf{V}}$ の固有値を λ_α 、固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{N}_\alpha$ と $\mathbf{n}_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ とすれば、以式のようなスペクトル分解形にすることができる。

$$\hat{\mathbf{C}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha, \quad \hat{\mathbf{b}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \quad (18)$$

実際の解析では、ミクロ問題の解析でユニットセルに与えるべきマクロ変形勾配 $\hat{\mathbf{H}}_{ij}$ およびマクロユニットセルにマクロ第1Piola-Kirchhoff 応力の成分 $\hat{P}_{ij}$ を決め、対応して9つの制御節点に変位 $q_i^{[j]}$ あるいは荷重 $R_i^{[j]}$ のいずれかを与えることになる。同一の制御節点に $q^{[j]}$ と $\mathbf{R}^{[j]}$ の同一成分を同時に与えることはできないことに注意されたい。

Fig. 2 Unit cell of uni-directional fiber-reinforced composite.

4. 数値解析例

本節では、母材が大きく変形するような一方向繊維強化複合材料を対象として、前節で提示した数値材料実験手法をミクロ・マクロ非連成近似解法による非線形マルチスケール材料解析に適用し、その適用性と有用性を例示する。マルチスケール解析は2.1節のステップに従うこととし、ミクロおよびマクロ問題のFEMによる解析はANSYS⁽²¹⁾を用いて行うことにする。

4.1 ミクロ構造とマクロ構成則 ここでは、2.1節のステップ (i) における、ミクロ構造の定義とマクロ構成則の仮定を行う。

対象とする一方向繊維強化複合材料について、図2に示すようなユニットセルを用意する。要素には10節点2次の四面体要素 (ANSYSの要素タイプ SOLID 187⁽²¹⁾) を用い、母材には Mooney-Rivlin モデル⁽²¹⁾を用いてその材料パラメータは次のように設定する。

$$C_{10} = 0.277, C_{01} = 0.148, 1/D = 1.0 \times 10^3 \text{ [MPa]}$$

また、繊維には Neo-Hookean モデルを用いてせん断弾性係数 700 [MPa] と体積弾性係数 10^3 [MPa] を用いる。

また、このユニットセルから得られるマクロ材料挙動を表現しうる構成則として、次式のような弾性エネルギー関数で特徴付けられる異方性超弾性体の構成則⁽²²⁾を採用する。

$$\mathcal{W}(\bar{\mathbf{C}}, \bar{J}; \mathbf{X}) = \mathcal{W}_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, \bar{I}_5) + \mathcal{W}_{\text{vol}}(\bar{J}) \quad (19)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{C}}$ は、マクロ変形勾配の等積成分を $\bar{\mathbf{F}} = \bar{J}^{-1/3} \hat{\mathbf{F}}$ としたときに $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = \bar{J}^{-2/3} \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}}$ (すなわち、 $\bar{I}_3 = \det \bar{\mathbf{C}} = 1$) で定義される右 Cauchy-Green 変形テンソルの等積成分である。また、 $\bar{I}_\alpha (\alpha = 1, 2, 4, 5)$ はその不変量であり、ユニットセルの初期配置における繊維の方向と平行な単位ベクトル (異方性の方向ベクトル) を $\mathbf{A}$ として、それぞれ次のように定義されている。

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \text{tr} \bar{\mathbf{C}}, \bar{I}_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \bar{\mathbf{C}} - \text{tr} \bar{\mathbf{C}}^2) \\ \bar{I}_4 = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A}, \bar{I}_5 = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{A} \end{cases} \quad (20)$$

このエネルギー関数 (19) から, 第 2Piola-Kirchhoff 応力は次式のように導かれる.

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \tilde{J}^{-2/3} \mathbf{Q} : 2 \frac{\partial \mathcal{W}_{\text{iso}}}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} + \tilde{J} \frac{\partial \mathcal{W}_{\text{vol}}}{\partial \tilde{J}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \quad (21)$$

ここに,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{C}} \quad (22)$$

と定義した⁽²²⁾.

以下の解析例における $\mathcal{W}_{\text{iso}}$ と $\mathcal{W}_{\text{vol}}$ の具体的な関数形としては, Kaliske⁽²³⁾ の提案した次式を採用する.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{iso}} = & \sum_{i=1}^{N_{ab}} a_i (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^{N_{ab}} b_j (\bar{I}_2 - 3)^j \\ & + \sum_{k=2}^{N_{cd}} c_k (\bar{I}_4 - 1)^k + \sum_{l=2}^{N_{cd}} d_l (\bar{I}_5 - 1)^l \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathcal{W}_{\text{vol}} = \frac{1}{D} (\tilde{J} - 1)^2 \quad (24)$$

ここで, a_i, b_j, c_k, d_l, D が同定すべき材料パラメータである. なお, $1 \leq N_{ab} \leq 3, 2 \leq N_{cd} \leq 6$ であり, 式 (23) の第 3, 4 項において係数 $c_k = 0, d_l = 0$ とおけば, 多項式形式の等方性超弾性モデルである. なお, 以下では $a_1, a_2, b_1, b_2, c_2, d_2, D$ の 7 つのパラメータのみを考慮して同定することにする.

4.2 数値材料実験によるマクロ材料パラメータ同定

ここでは, 2.1 節のステップ (ii) と (iii) に対応して, 前項で与えたユニットセルモデルを数値供試体として数値材料実験を行い, 前節で導入した構成モデルの材料パラメータ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_2, d_2, D$ を同定する.

パラメータ同定に際しては, 実験ケースとして次の 6 つのマクロ変形・応力パターンを考え, ミクロ解析では対応する外部節点の変位を制御することにする.

Case-1: X_1 方向一軸引張

$$\hat{\mathbf{H}}^{[1]} = \begin{bmatrix} \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{[1]} = \begin{bmatrix} \square & \diamond & \diamond \\ \diamond & 0 & \diamond \\ \diamond & \diamond & 0 \end{bmatrix}$$

Case-2: X_2 方向一軸引張

$$\hat{\mathbf{H}}^{[2]} = \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H} & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & \diamond & \diamond \\ \diamond & \square & \diamond \\ \diamond & \diamond & 0 \end{bmatrix}$$

Case-3: X_3 方向一軸引張

$$\hat{\mathbf{H}}^{[3]} = \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & \diamond & \diamond \\ \diamond & 0 & \diamond \\ \diamond & \diamond & \square \end{bmatrix}$$

Case-4: X_2X_3, X_3X_2 方向せん断

$$\hat{\mathbf{H}}^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H} \\ 0 & \hat{H} & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{[4]} = \begin{bmatrix} \diamond & \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond & \square \\ \diamond & \square & \diamond \end{bmatrix}$$

Case-5: X_3X_1, X_1X_3 方向せん断

$$\hat{\mathbf{H}}^{[5]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{H} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{H} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{[5]} = \begin{bmatrix} \diamond & \diamond & \square \\ \diamond & \diamond & \diamond \\ \square & \diamond & \diamond \end{bmatrix}$$

Case-6: X_1X_2, X_2X_1 方向せん断

$$\hat{\mathbf{H}}^{[6]} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H} & 0 \\ \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{[6]} = \begin{bmatrix} \diamond & \square & \diamond \\ \square & \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond & \diamond \end{bmatrix}$$

ここで, マクロ変位勾配 $\hat{\mathbf{H}}$ における $\hat{H}$ と $\blacksquare$ は, それぞれ制御する変位勾配の成分としない成分であり, 0 は解析を通してゼロに固定することを意味する. また, マクロ公称応力における $\square$ と $\diamond$ は, それぞれ制御する変形に対応する成分と 0 に固定した変形により生じる応力成分であり, 0 は解析を通して応力フリーにすることを意味する.

本研究では, 上記のマクロ変形・応力パターンを負荷するに際して, ユニットセルの座標系 $O-Y_1Y_2Y_3$ とマクロスケールの座標系 $O-X_1X_2X_3$ の向き (基底ベクトルの組) を一致させることにする. このとき, 図 2 の立方体のユニットセルの一边が $\hat{L}$ であれば, 辺ベクトルは次のようになる.

$$\mathbf{L}^{[1]} = \begin{bmatrix} \hat{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{L} \end{bmatrix} \quad (25)$$

したがって, 例えば Case-1 については, 式 (16) より, Y_1 -面上の制御節点に次の強制変位を与えることになる.

$$\mathbf{q}^{[1]} = \hat{\mathbf{H}}^{[1]} \mathbf{L}^{[1]} = \begin{bmatrix} \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}\hat{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

この制御節点の変位成分はすべて既知量であるので, 呼応して生ずる反力ベクトルの成分に対応する第 1PK 応力 $\tilde{\mathbf{P}}^{[1]}$ の第 1 列の成分はすべて未知量となる. 対して, Y_2, Y_3 -面上の制御節点の変位 $\mathbf{q}^{[2]}$ と $\mathbf{q}^{[3]}$ は, それぞれ次のようになる.

$$\mathbf{q}^{[2]} = \hat{\mathbf{H}}^{[1]} \mathbf{L}^{[2]} = \begin{bmatrix} \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Table 1 Identified material parameters for anisotropic hyperelastic model.

Parameters	a_1	a_2	b_1	b_2	c_2	d_2	$1/D$
[MPa]	3.551	-9.086	-1.726	11.504	87.073	-6.375	9.88×10^{-4}

Fig. 3 Results of numerical experiments.

$$\mathbf{q}^{[3]} = \hat{\mathbf{H}}^{[1]} \mathbf{L}^{[3]} = \begin{bmatrix} \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bullet \end{pmatrix} \quad (28)$$

ここで、制御しない成分 $\blacksquare$ による $\mathbf{q}^{[2]}$ の第2成分と $\mathbf{q}^{[3]}$ の第3成分の $\bullet$ は未知量であり、対応する反力ベクトルの成分、すなわち第1PK応力 $\hat{\mathbf{P}}^{[1]}$ の22成分と33成分が既知量（ここではゼロ）となる。

用意した6ケースのマクロ変形・応力パターンのそれぞれを、上で説明した方法でユニットセルの制御節点のデータとして与え、ミクロ問題の解析を行う。ここでの解析例では、ユニットセルの10%程度の伸びを想定して $\hat{H}$ には最大0.1を与えることにする。解析結果として得られる拘束していない制御節点の変位成分と、拘束している制御節点の自由度に対応する節点反力から、マクロ変形勾配と公称応力の全成分を算定する。得られた各実験ケースの代表的な応力-変形関係と最終行程で得られたユニットセルの変形図を von-Mises 応力の分布と合わせて図3に示す。なお、 $Y_1 Y_2$ 面は幾何学的な対称性を有するにも関わらず、図中の $\tilde{S}_{11} \sim \tilde{H}_{11}$ と $\tilde{S}_{22} \sim \tilde{H}_{22}$ （および $\tilde{S}_{13} \sim \tilde{H}_{13}$ と

Fig. 4 Comparison of stress-deformation gradient curves.

$\tilde{S}_{23} \sim \tilde{H}_{23}$ の応答が高ひずみ域でずれるのは、ユニットセルの有限要素モデルに用いたメッシュの対称性と要素数が十分で無いことによる数値誤差である。

上記の数値材料実験から得られたマクロ変形・応力を計測結果とみなし、最小二乗法によりマクロ構成則の材料パラメータを同定すると表1に示すような結果を得た。同定方法の詳細は文献⁽²⁴⁾を参照されたい。また図4は、それぞれの実験ケースに対応して構成則(21)を評価したマクロ応答と、数値材料実験の結果とを合わせて示したものである。この図から、せん断変

Fig. 5 Macroscopic problem.

形に対して若干のずれがあるものの、マクロ材料パラメータはある程度正確に同定されていることがわかる。

Fig. 6 Macro- and microscopic analysis results.

4.3 マクロ解析と局所化 最後に、前項で同定したマクロ材料パラメータを用いて、2.1節のステップ(iv)のマクロ解析、次いでステップ(v)の局所化解析を行う。

簡単のため、図5に示すような単純なマクロ構造を対象とする。座標系 $O-X_1X_2X_3$ は、4.2節の数値材料実験で参照したものと同じである。支持条件と負荷条件は図中に示す通りであり、支持面は剛結合として、載荷面には X_1 -軸と垂直を保つような拘束とともに、 $-X_2$ 方向に合力 600 N を 15 N ずつ 40 ステップに分けて与える。また、繊維方向ベクトル A 、すなわち図2の Y_3 -軸方向は X_3 -軸方向と一致させる。一方、局所化には図5に示した2つのマクロ構造内の要素(中心点)を選び、マクロ解析の各荷重ステップ得られた変位勾配を式(15)および(16)に従って制御節点変位に変換して与える。

図6に、荷重増分ステップ 20/40 と 40/40 のときのマクロ解析と局所化解析の結果を合わせて示す。なお、ミクロ応力のユニットセル体積平均はマクロ変位勾配を抽出した点におけるマクロ応力と一致することは確認済みである。回転の卓越するA点ではユニットセルが剛体的に回転し、比較的大きな伸張ひずみが生じるB点ではユニットセルにも大きな伸びが生ずることが再現されている。これは、マクロ物質点の変位勾配に含まれる変形と回転の双方の成分が、ユニットセルの形態変化や剛体回転として適切に反映されたことを示すものであり、本研究で提示した均質化・局所化の方法が有限変形理論の枠組みにおける2変数運動学⁽¹⁶⁾に忠実に従うことを例証している。

5. 結 言

本論文では、ミクロ・マクロ非連成近似解法を用いた実用的かつ汎用的な非線形マルチスケール材料解析システムの構築を意図して、均質化理論とFEMによる解析条件の対応を整理し、それを実装した数値材料実験手法を提示した。そして、具体的な複合材料のユニットセルモデルに適用して大変形マルチスケール材料解析を例示した。

均質化法は、ミクロ問題の解を数値解析により求めることを想定した数理モデリングの方法論として計算力学分野に浸透してきた経緯から、これに基づく非線形マルチスケール解析ではミクロとマクロスケールの境界値問題を連成して解く手法の開発がごく自然な展開であった。しかし、実用的な問題を解くのに必要とされる計算コストは膨大であり、現実問題としてそのような連成手法はCAEの実務には利用され得ない。本

研究では、線形問題の均質化材料特性を算出するために取る手続きを踏襲した“ミクロ・マクロ非連成近似解法”を採用することで、複合材料の大変形問題を対象した非線形マルチスケール解析が実務レベルでの実現を可能とした。

線形・非線形に関わらず、均質化法に基づくマルチスケール解析法は、はじめにユニットセルに対する数値材料実験からマクロ構成則の材料パラメータを求め(均質化プロセス)、次いでマクロ解析を行い、最後にマクロ変形をユニットセルに返してミクロ応答を評価する(局所化プロセス)という手続きを踏む手法と捉えられる。近似的にでもマクロ構成則の関数形を決めることができれば、ミクロ問題とマクロ問題を個別に解くことで、線形問題と同様の手順で非線形問題のマルチスケール解析も可能となるので、提示した手法の工学的意義は極めて大きいといえる。

文 献

- (1) Benssousan, A., Lions, J.-L., Papanicoulau, G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, (1978), North-Holland.
- (2) Suquet, P.M., *Elements of homogenization theory for inelastic solid mechanics*, *Homogenization Techniques for Composite Media*, (1987), pp.193–278.
- (3) Terada, K., Kikuchi, N., *Introduction to the method of homogenization*, (2003), Mruzen.
- (4) Ln, F., Leguillon, D., Homogenized constitutive law for a partially cohesive composite material, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 18 (1982), pp. 443–458.
- (5) Devries, F., Dumontet, H., Duvaut, G., Ln, F., Homogenization and damage for composite Structures, *Internat J. for Numer. Methods Engrg.*, Vol. 27 (1989), pp. 285–298.
- (6) Guedes, J.M., Kikuchi, N., Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 83 (1990), pp. 143–198.
- (7) Sanchez-Palencia, E., *Non-homogeneous media and vibration theory*, (1980), Springer-Verlag.
- (8) Terada, K., Kikuchi, N., Nonlinear homogenization method for practical applications, *Computational Methods in Micromechanics*, AMSE AMD 212 (1995), pp. 1–16.
- (9) Smit, R.J.M., Brekelmans, W.A.M., Meijer, H.E.H., Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 155, No. 1–2 (1998), pp. 181–192.
- (10) Terada, K., Kikuchi, N., A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190 (2001), pp. 5427–5464.
- (11) Kaneko, K., Terada, K., Kyoya, T., Kishino, Y., Global-local analysis of granular media in quasi-static equilibrium, *Internat. J. Solids Struct.*, Vol. 40, No. 15 (2003), pp. 4043–4069.
- (12) Yamada, T., Iterative algorithms for computing the averaged response of nonlinear composites under stress-controlled loadings, *Internat. J. Multiscale Comput. Engrg.*, Vol. 4, No. 4 (2006), pp. 475–486.
- (13) Temizer, ., Wriggers, P., An adaptive method for homogenization in orthotropic nonlinear elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.196 (2007), pp.3409–3423.
- (14) Oskay, C., Fish, J., Eigendefinition-based reduced order homogenization for failure analysis of heterogeneous materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 196, No. 7 (2007), pp. 1216–1243.
- (15) Watanabe, I., Terada, K., Decoupled micro-macro analysis method for two-scale BVPs in nonlinear homogenization theory, *JSCE J. Appl. Mech.*, Vol. 8 (2005), pp. 277–285.
- (16) Terada, K., Saiki, I., Matsui, K., Yamakawa, Y., Two-scale kinematics and linerization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192 (2003), pp. 3531–3563.
- (17) Matsui, K., Terada, K., Yuge, K., Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures, *Comput. Struct.*, Vol. 82, No. 7–8 (2004), pp. 593–606.

- (18) Terada, K., Invitation to numerical material testing, Part 3: Theory and practice in linear elasticity, *Reinforced Plastics*, Vol. 53, No. 5 (2007), pp. 246–253.
 - (19) Segurado, J., Llorca, J., A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 50 (2002) pp. 2107–2121.
 - (20) Saiki, I., Ooue, K., Nakajima, N., Terada, K., Multi-scale modeling for microstructures with structural elements and its application to cellular solids, *Transactions of JSCEs.*, Paper No. 20020004 (2002), pp. 139–144.
 - (21) Release 11.0 Documentation for ANSYS, (2008), ANSYS Inc.
 - (22) Holzapfel, G.A., *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, (2000), John Wiley & Sons, Inc.
 - (23) Kaliske, M., A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 185 (2000), pp. 225–243.
 - (24) Terada, K., Inugai, T., Hamana, Y., Hirayama, N., Miyori, A., Parameter identification for anisotropic hyperelastic materials by numerical material testing, Preprint.
-