長さの異なる二個の平行き裂を有する圧電厚板の電気熱弾性応答*

上 田 整^{*1}, 石 井 彰 人^{*2}
近 藤 宏 憲^{*3}, 井 川 健^{*3}Thermoelectromechanical Response of a Piezoelectric Strip
with Two Parallel Cracks of Different LengthsSei UEDA^{*4}, Akito ISHII,
Hironori KONDO and Ken IKAWA^{*4} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

The thermoelectromechanical fracture of a piezoelectric material strip with two parallel cracks of different lengths under electric and thermal loadings is considered. The crack faces are supposed to be insulated thermally and electrically. Fourier transform techniques are used to reduce the mixed boundary value problems to two systems of singular integral equations. The singular integral equations are solved by using the Gauss-Jacobi integration formula. Numerical calculations are carried out, and detailed results are presented to illustrate the influence of the parameters of indicating the crack lengths, the crack location and the crack spacing on the stress and electric displacement intensity factors. The results for the temperature and thermal stress distributions are also included. From the numerical results, we can find that the normalized intensity factors are under the great influence of the geometric parameters. Especially, the interaction between two different length cracks is complicated.

Key Words: Stress Intensity Factor, Elasticity, Thermal Stress, Fracture Mechanics, Piezoelectric Material, Two Parallel Cracks, Integral Transform

1. 緒 言

圧電材料は、応答速度および変形制御に優れることから、ヒンサやアクチュエータとして用いられている。この特性を活かすことにより、温度変化に起因する熱変形を適切に制御できる知的材料システムの構築が可能となる⁽¹⁾。このため、圧電材料を用いた知的材料システムの最適設計・開発を目的とした電気熱弾性挙動の解明が要望され、多くの解析結果が報告されている^{(2)~(4)}。さらに、知的材料システムの健全性評価には、熱的環境下にある圧電材料を対象とした電気熱弾性破壊力学的挙動の解明も重要であり、Wang and Mai⁽⁵⁾および著者ら^{(6)~(8)}は、圧電材料を対象に電気的熱的負荷を受ける場合の特異電気熱弾性場を理論解析している。

一方、材料内には多数のき裂が存在し、それらの相互干渉により破壊にいたると考えられる。従って、き裂間相互干渉の影響を解明することも重要であり、二個の等長き裂を対象とした研究が報告されている

^{(9)~(11)}。しかし、実際に重要な長さの異なるき裂を対象とした研究例は見当たらないようである。

そこで本報では、長さの異なる二個の平行き裂を有する圧電厚板を対象に、電気的負荷および熱的負荷が作用する場合を考え、き裂先端の特異場を理論解析した。解析には、Fourier変換法および熱弾性変位ポテンシャル法を用い、問題の解の特異積分方程式の解に帰着して解く方法を採用した^{(12),(13)}。また、特異積分方程式の数値解析には、Gauss-Jacobiの数値積分公式⁽¹⁴⁾を用い、応力・電束密度拡大係数に及ぼす幾何学的形状および電気的熱的負荷の影響を明らかにした。

2. 問題の設定と基礎式

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において、厚さ $h = h_1 + h_2$ の圧電厚板を考え、 $z = \pm h_0$ 面上に長さ $2c$ および $2\mu c$ ($\mu \geq 0$)のき裂が自由表面に平行に存在するものとし、平面ひずみを仮定する。圧電厚板の上面($z = h_1$ 面)および下面($z = -h_2$ 面)の温度がそれぞれ T_{10} , T_{20} に保持され、 z 軸の正の向きに一樣電束密度 D_0 が作用する問題を設定し、分極方向を z 軸方向とする。なお、弾性定数を c_{jk} 、圧電定数を e_{jk} 、誘電定数を ϵ_{jj} 、熱弾性定数を λ_{jj} 、熱伝導率を κ_x , κ_z

* 原稿受付 2008年2月25日。

^{*1} 正員、大阪工業大学工学部(☎ 535-8585 大阪市旭区大宮5-16-1)。^{*2} 准員、大阪工業大学大学院。^{*3} 正員、大阪工業大学大学院。

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

および焦電定数を p_z とし、下添字 x, y, z は座標軸方向を示すものとする。

Fig.1 Two parallel cracks in a piezoelectric strip.

温度を $T_i(x, z)$ 、変位ベクトルの成分を $u_{xi}(x, z)$ 、 $u_{zi}(x, z)$ 、静電ポテンシャルを $\phi_i(x, z)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{xxi}(x, z)$ 、 $\sigma_{zxi}(x, z)$ 、 $\sigma_{zxi}(x, z)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_{xi}(x, z)$ 、 $D_{zi}(x, z)$ ($i = 0, 1, 2$) は次のように与えられる⁽¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xxi} &= c_{11} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{11} T_i \\ \sigma_{zxi} &= c_{13} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{33} T_i \\ \sigma_{zxi} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{xi} &= e_{15} \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ D_{zi} &= e_{31} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + p_z T_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (2)$$

ここに、下添字 $i = 0, 1, 2$ はそれぞれ $-h_0 \leq z \leq h_0$ 、 $h_0 \leq z \leq h_1$ 、 $-h_2 \leq z \leq -h_0$ の領域の場を表す。

熱伝導方程式は次式となる。

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3)$$

ここに、 $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z$ である。また、文献⁽¹⁷⁾を考慮すると変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x \partial z} \\ + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z} &= \lambda_{11} \frac{\partial T_i}{\partial x} \\ c_{44} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x \partial z} \\ + e_{15} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} &= \lambda_{33} \frac{\partial T_i}{\partial z} \\ e_{15} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x \partial z} \\ - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} &= -p_z \frac{\partial T_i}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4)$$

本問題の温度場に関する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0(x, \theta_{0i}) / \partial z &= 0 \quad (|x| < c_i) \\ T_0(x, \theta_{0i}) &= T_i(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0(x, \theta_{0i}) / \partial z &= \partial T_i(x, \theta_{0i}) / \partial z \quad (|x| \geq 0) \\ T_i(x, \theta_{1i}) &= T_{i0} \quad (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

ここに、

$$(\theta_{0i}, \theta_{1i}, c_i) = \begin{cases} (h_0, h_1, c) & (i = 1) \\ (-h_0, -h_2, \mu c) & (i = 2) \end{cases} \quad (7)$$

また、電気弾性場に関する境界条件式は⁽¹⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}(x, \theta_{0i}) &= 0 \quad (|x| < c_i) \\ u_{z0}(x, \theta_{0i}) &= u_{zi}(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx0}(x, \theta_{0i}) &= 0 \quad (|x| < c_i) \\ u_{x0}(x, \theta_{0i}) &= u_{xi}(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{z0}(x, \theta_{0i}) &= 0 \quad (|x| < c_i) \\ \phi_0(x, \theta_{0i}) &= \phi_i(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}(x, \theta_{0i}) &= \sigma_{zzi}(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq 0) \\ \sigma_{zx0}(x, \theta_{0i}) &= \sigma_{zxi}(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq 0) \\ D_{z0}(x, \theta_{0i}) &= D_{zi}(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zzi}(x, \theta_{1i}) &= 0 \quad (|x| \geq 0) \\ \sigma_{zxi}(x, \theta_{1i}) &= 0 \quad (|x| \geq 0) \\ D_{zi}(x, \theta_{1i}) &= D_0 \quad (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

3. 温度場解析

温度場 $T_i(x, z)$ ($i = 0, 1, 2$) を次のように置く。

$$T_i(x, z) = T^{(1)}(z) + T_i^{(2)}(x, z) \quad (i = 0, 1, 2) \quad (13)$$

ここに、非擾乱温度場 $T^{(1)}(z)$ は前報⁽¹¹⁾と同様で、以下のようになる。

$$T^{(1)}(z) = \frac{1}{h} [T_{10} h_2 + T_{20} h_1 + (T_{10} - T_{20}) z] \quad (14)$$

また、擾乱温度場 $T_i^{(2)}(x, z)$ ($i = 0, 1, 2$) に関する支配方程式および境界条件式は

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0^{(2)}(x, \theta_{0i}) / \partial z &= -dT^{(1)}(\theta_{0i}) / dz \quad (|x| < c_i) \\ T_0^{(2)}(x, \theta_{0i}) &= T_i^{(2)}(x, \theta_{0i}) \quad (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0^{(2)}(x, \theta_{0i}) / \partial z &= \partial T_i^{(2)}(x, \theta_{0i}) / \partial z \quad (|x| \geq 0) \\ T_i^{(2)}(x, \theta_{1i}) &= 0 \quad (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (17)$$

式 (15) に Fourier 変換法を適用して擾乱温度場の一般解を求めると (12)

$$T_i^{(2)}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-c}^{\infty} D_{ij}(s) \exp(|s| \kappa_{ij} z) \times \exp(-isx) ds \quad (i = 0, 1, 2) \quad (18)$$

ここに, $D_{ij}(s)$ ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2$) は境界条件式より決定される未知関数であり, κ_{ij} ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2$) は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{i1} &= -\kappa \\ \kappa_{i2} &= \kappa \end{aligned} \right\} (i = 0, 1, 2) \quad (19)$$

新しい未知関数 $G_{k0}(x)$ ($k = 1, 2$) を次のように導入する (13).

$$G_{k0}(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [T_0^{(2)}(x, \theta_{0k}) - T_k^{(2)}(x, \theta_{0k})] & (|x| < c_k) \\ 0 & (|x| \geq c_k) \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (20)$$

従って, 境界条件式 (17) を考慮すると, 混合境界条件式 (16) の第 1 式より, 未知関数 $G_{10}(t), G_{20}(\mu t)$ に関する次の連立特異積分方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-c}^c \left\{ \left[\frac{1}{t-x} + M_{011} \right] G_{10}(t) - \mu M_{012} G_{20}(\mu t) \right\} dt = \frac{T_{10} - T_{20}}{h} \\ & \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-c}^c \left\{ M_{021} G_{10}(t) - \left[\frac{1}{t-x} + \mu M_{022} \right] G_{20}(\mu t) \right\} dt = \frac{T_{10} - T_{20}}{h} \end{aligned} \right\} (|x| < c) \quad (21)$$

式中の積分核 $M_{0jk} = M_{0jk}(t, x)$ ($j, k = 1, 2$) は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} M_{011} &= \int_0^{\infty} \left\{ \rho_1(s) \{1 + \exp[-2s\kappa(h_2 + h_0)]\} - 1 \right\} \times \sin[s(t-x)] ds \\ M_{012} &= \int_0^{\infty} \rho_2(s) [\exp(-2s\kappa h_0) + \exp(-2s\kappa h_1)] \times \sin[s(\mu t - x)] ds \\ M_{021} &= \int_0^{\infty} \rho_1(s) [\exp(-2s\kappa h_0) + \exp(-2s\kappa h_2)] \times \sin[s(t - \mu x)] ds \\ M_{022} &= \int_0^{\infty} \left\{ \rho_2(s) \{1 + \exp[-2s\kappa(h_1 + h_0)]\} - 1 \right\} \times \sin[s\mu(t-x)] ds \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここに,

$$\rho_j(s) = \frac{1 + \exp[-2s\kappa(h_j - h_0)]}{1 - \exp(-2s\kappa h)} \quad (j = 1, 2) \quad (23)$$

また, 混合境界条件式 (16) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_{-c}^c G_{k0}(t') dt' = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (24)$$

ここに,

$$t' = \begin{cases} t & (k = 1) \\ \mu t & (k = 2) \end{cases} \quad (25)$$

特異積分方程式 (21) および補足の条件式 (24) を Gauss-Jacobi の数値積分公式 (14) を用いて数値解析することにより, $G_{k0}(t')$ ($k = 1, 2$) が求まる. さらに, 式 (18) の未知関数 $D_{ij}(s)$ ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2$) を得られた $G_{k0}(t')$ ($k = 1, 2$) を用いて表すと, 擾乱温度場 $T_i^{(2)}(x, z)$ ($i = 0, 1, 2$) が次のように決定される.

$$T_i^{(2)}(x, z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{s} R_{ijk}(s) \times \exp[s(\kappa_{ij} z + \kappa h_{ij})] ds \times \int_{-c}^c G_{k0}(t') \sin[s(t' - x)] dt' \quad (i = 0, 1, 2) \quad (26)$$

式中の関数 $R_{ijk}(s)$ および定数 h_{ij} ($i = 0, 1, 2, j, k = 1, 2$) はそれぞれ付録 1 に示す.

4. 電気熱弾性場解析

非擾乱温度場 $T^{(1)}(z)$ は, 特異電気弾性場を誘起しないため, 擾乱温度場 $T_i^{(2)}(x, z)$ ($i = 0, 1, 2$) に起因する電気熱弾性場に注目する. 変位ベクトルの成分 $u_{zi} = u_{zi}(x, z)$, $u_{xi} = u_{xi}(x, z)$ および静電ポテンシャル $\phi_i = \phi_i(x, z)$ ($i = 0, 1, 2$) を次式で表す.

$$\left. \begin{aligned} u_{zi} &= u_{zi}^{(1)} + u_{zi}^{(2)} \\ u_{xi} &= u_{xi}^{(1)} + u_{xi}^{(2)} \\ \phi_i &= \phi_i^{(1)} + \phi_i^{(2)} \end{aligned} \right\} (i = 0, 1, 2) \quad (27)$$

ここに, $u_{zi}^{(1)} = u_{zi}^{(1)}(x, z)$, $u_{xi}^{(1)} = u_{xi}^{(1)}(x, z)$, $\phi_i^{(1)} = \phi_i^{(1)}(x, z)$ は式 (4) における温度場 $T_i(x, z)$ を擾乱温度場 $T_i^{(2)}(x, z)$ とした非同次方程式の特解, $u_{zi}^{(2)} = u_{zi}^{(2)}(x, z)$, $u_{xi}^{(2)} = u_{xi}^{(2)}(x, z)$, $\phi_i^{(2)} = \phi_i^{(2)}(x, z)$ ($i = 0, 1, 2$) は式 (4) において温度場を零とした同次方程式の一般解である.

特解は熱弾性変位ポテンシャル法により, 次のように求まる.

$$u_{zi}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{4ij}^{(1)} F_{ij}(s)}{s|s|} \exp[|s|(\kappa_{ij}z + \kappa h_{ij})] \times \exp(-isx) ds \quad (i=0,1,2) \quad (28)$$

$$u_{xi}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{5ij}^{(1)} F_{ij}(s)}{s^2} \exp[|s|(\kappa_{ij}z + \kappa h_{ij})] \times \exp(-isx) ds \quad (i=0,1,2) \quad (29)$$

$$\phi_i^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{6ij}^{(1)} F_{ij}(s)}{s|s|} \exp[|s|(\kappa_{ij}z + \kappa h_{ij})] \times \exp(-isx) ds \quad (i=0,1,2) \quad (30)$$

ここに、定数 $p_{mij}^{(1)}$ ($m=4,5,6, i=0,1,2, j=1,2$) は前報⁽¹¹⁾の付録2と同様であり、関数 $F_{ij}(s)$ ($i=0,1,2, j=1,2$) は

$$F_{ij}(s) = \sum_{k=1}^2 R_{ijk}(s) \int_{-c}^c G_{k0}(t') \exp(is t') dt' \quad (i=0,1,2, j=1,2) \quad (31)$$

また、一般解は Fourier 変換法により、次のように求まる⁽¹²⁾。

$$u_{zi}^{(2)} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} p_{4ij}^{(2)} A_{ij}(s) \exp(|s|\gamma_{ij}z) \times \exp(-isx) ds \quad (i=0,1,2) \quad (32)$$

$$u_{xi}^{(2)} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|}{s} p_{5ij}^{(2)} A_{ij}(s) \exp(|s|\gamma_{ij}z) \times \exp(-isx) ds \quad (i=0,1,2) \quad (33)$$

$$\phi_i^{(2)} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} p_{6ij}^{(2)} A_{ij}(s) \exp(|s|\gamma_{ij}z) \times \exp(-isx) ds \quad (i=0,1,2) \quad (34)$$

ここに、 $A_{ij}(s)$ ($i=0,1,2, j=1,2,\dots,6$) は境界条件式より決定される未知関数であり、定数 $p_{mij}^{(2)}$ ($m=4,5,6, i=0,1,2, j=1,2,\dots,6$) は付録2に示す。

温度場解析と同様に、問題の解を特異積分方程式の解に導くため、次の新しい未知関数 $G_{km}(x)$ ($k=1,2, m=1,2,3$) を導入する⁽¹³⁾。

$$G_{k1}(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [u_{z0}(x, \theta_{0k}) - u_{zk}(x, \theta_{0k})] & (|x| < c_k) \\ 0 & (|x| \geq c_k) \end{cases} \quad (k=1,2) \quad (35)$$

$$G_{k2}(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [u_{x0}(x, \theta_{0k}) - u_{xk}(x, \theta_{0k})] & (|x| < c_k) \\ 0 & (|x| \geq c_k) \end{cases} \quad (k=1,2) \quad (36)$$

$$G_{k3}(x) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} [\phi_0(x, \theta_{0k}) - \phi_k(x, \theta_{0k})] & (|x| < c_k) \\ 0 & (|x| \geq c_k) \end{cases} \quad (k=1,2) \quad (37)$$

境界条件式 (11), (12) を考慮すると、混合境界条件式 (8) ~ (10) の第1式より、未知関数 $G_{km}(t')$ ($k=1,2, m=1,2,3$) に関する6本の連立特異積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \left[\frac{Z_{1111}^{(1)\infty}}{t-x} + M_{111}^{(1)} \right] G_{11}(t') + M_{112}^{(1)} G_{12}(t') + \left[\frac{Z_{1131}^{(1)\infty}}{t-x} + M_{113}^{(1)} \right] G_{13}(t') + \mu \sum_{m=1}^3 M_{12m}^{(1)} G_{2m}(t') \right\} dt = \sigma_{z0}^T(x', h_0) \quad (|x| < c) \quad (38)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ M_{211}^{(1)} G_{11}(t') + \left[\frac{Z_{2121}^{(1)\infty}}{t-x} + M_{212}^{(1)} \right] G_{12}(t') + M_{213}^{(1)} G_{13}(t') + \mu \sum_{m=1}^3 M_{22m}^{(1)} G_{2m}(t') \right\} dt = \sigma_{x0}^T(x', h_0) \quad (|x| < c) \quad (39)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \left[\frac{Z_{3111}^{(1)\infty}}{t-x} + M_{311}^{(1)} \right] G_{11}(t') + M_{312}^{(1)} G_{12}(t') + \left[\frac{Z_{3131}^{(1)\infty}}{t-x} + M_{313}^{(1)} \right] G_{13}(t') + \mu \sum_{m=1}^3 M_{32m}^{(1)} G_{2m}(t') \right\} dt = D_{z0}^T(x', h_0) + D_0 \quad (|x| < c) \quad (40)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \sum_{m=1}^3 M_{11m}^{(2)} G_{1m}(t') + \left[\frac{Z_{1211}^{(2)\infty}}{t-x} + \mu M_{121}^{(2)} \right] G_{21}(t') + \mu M_{122}^{(2)} G_{22}(t') + \left[\frac{Z_{1231}^{(2)\infty}}{t-x} + \mu M_{123}^{(2)} \right] G_{23}(t') \right\} dt = \sigma_{z0}^T(x', -h_0) \quad (|x| < c) \quad (41)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \sum_{m=1}^3 M_{21m}^{(2)} G_{1m}(t') + \mu M_{221}^{(2)} G_{21}(t') + \left[\frac{Z_{2221}^{(2)\infty}}{t-x} + \mu M_{222}^{(2)} \right] G_{22}(t') + \mu M_{223}^{(2)} G_{23}(t') \right\} dt = \sigma_{x0}^T(x', -h_0) \quad (|x| < c) \quad (42)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \sum_{m=1}^3 M_{31m}^{(2)} G_{1m}(t') + \left[\frac{Z_{3211}^{(2)\infty}}{t-x} + \mu M_{321}^{(2)} \right] G_{21}(t') + \mu M_{322}^{(2)} G_{22}(t') + \left[\frac{Z_{3231}^{(2)\infty}}{t-x} + \mu M_{323}^{(2)} \right] G_{23}(t') \right\} dt = D_{z0}^T(x', -h_0) + D_0 \quad (|x| < c) \quad (43)$$

式中の定数 $Z_{jkm}^{(n)\infty}$ ($j, m=1,2,3, n, k, l=1,2$) は前報⁽¹¹⁾の付録3と同様であり、積分核 $M_{jkm}^{(n)} = M_{jkm}^{(n)}(t', x')$ ($j, m=1,2,3, k=1,2$) は次式で与えられる。

$$M_{jkm}^{(n)} = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \sum_{l=1}^2 [Z_{jkm}^{(n)}(s) - Z_{jkm}^{(n)\infty}] \sin[s(t' - x')] ds \\ \quad (m=1, 3) \\ - \int_0^\infty \sum_{l=1}^2 [Z_{jkm}^{(n)}(s) - Z_{jkm}^{(n)\infty}] \cos[s(t' - x')] ds \\ \quad (m=2) \\ \quad (j=1, 3) \\ \int_0^\infty \sum_{l=1}^2 [Z_{jkm}^{(n)}(s) - Z_{jkm}^{(n)\infty}] \cos[s(t' - x')] ds \\ \quad (m=1, 3) \\ \int_0^\infty \sum_{l=1}^2 [Z_{jkm}^{(n)}(s) - Z_{jkm}^{(n)\infty}] \sin[s(t' - x')] ds \\ \quad (m=2) \\ \quad (j=2) \end{array} \right\} \quad (n, k=1, 2) \quad (44)$$

ここに,

$$x' = \begin{cases} x & (n=1) \\ \mu x & (n=2) \end{cases} \quad (45)$$

また, $\sigma_{z0}^T(x', \pm h_0)$, $\sigma_{zx0}^T(x', \pm h_0)$ および $D_{z0}^T(x', \pm h_0)$ は, 擾乱温度場 $T^{(2)}(x, z)$ に起因し, き裂が存在しない厚板の $z = \pm h_0$ 面上での熱応力・電束密度成分に相当するもので, 次のように得られる.

$$\sigma_{z0}^T(x', \pm h_0) = \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{p_{10j}^{(2)}}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^\infty |s| \Gamma_{1j} \exp(-isx) ds \\ - \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{ip_{10j}^{(1)}}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s} \Gamma_{2j} \exp(-isx) ds \quad (46)$$

$$\sigma_{zx0}^T(x', \pm h_0) = \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{ip_{20j}^{(2)}}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^\infty s \Gamma_{1j} \exp(-isx) ds \\ + \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{p_{20j}^{(1)}}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|s|} \Gamma_{2j} \exp(-isx) ds \quad (47)$$

$$D_{z0}^T(x', \pm h_0) = \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{p_{30j}^{(2)}}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^\infty |s| \Gamma_{1j} \exp(-isx) ds \\ - \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{ip_{30j}^{(1)}}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s} \Gamma_{2j} \exp(-isx) ds \quad (48)$$

式中の $\Gamma_{kj} = \Gamma_{kj}(s)$ ($k=1, 2, j=1, 2, \dots, 6$) は前報⁽¹¹⁾の式(42)中の $F_{ij}(s)$ ($i=0, 1, 2, j=1, 2$) を式(31)に置き換えたものと同様である. また, 混合境界条件式(8)~(10)の第2式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_{-c}^c G_{km}(t') dt' = 0 \quad (k=1, 2, m=1, 2, 3) \quad (49)$$

特異積分方程式(21), (38)~(43) および補足の条件式(24), (49)を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁴⁾を用いて数値解析するために, 解の特異性を考慮し, $G_{km}(t')$ を滑らかな関数 $\Phi_{km}(t')$ ($k=1, 2, m=0, 1, 2, 3$) を用いて次のように置く.

$$G_{km}(t') = \frac{c_k}{[(c_k + t')(c_k - t')]^{1/2}} \Phi_{km}(t') \quad (k=1, 2, m=0, 1, 2, 3) \quad (50)$$

従って, き裂先端の特異挙動を評価すると⁽¹⁸⁾, 応力拡大係数 $K_I^\pm, K_{II}^\pm$ および電束密度拡大係数 $K_D^\pm$ が次のように得られる.

$$\left. \begin{array}{l} K_I^+ = (\pi c_k)^{1/2} [Z_{1111}^\infty \Phi_{11}(c_k) + Z_{1131}^\infty \Phi_{13}(c_k)] \\ K_{II}^+ = (\pi c_k)^{1/2} Z_{2121}^\infty \Phi_{12}(c_k) \\ K_D^+ = (\pi c_k)^{1/2} [Z_{3111}^\infty \Phi_{11}(c_k) + Z_{3131}^\infty \Phi_{13}(c_k)] \end{array} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{array}{l} K_I^- = (\pi c_k)^{1/2} [Z_{1211}^\infty \Phi_{21}(c_k) + Z_{1231}^\infty \Phi_{23}(c_k)] \\ K_{II}^- = (\pi c_k)^{1/2} Z_{2221}^\infty \Phi_{22}(c_k) \\ K_D^- = (\pi c_k)^{1/2} [Z_{3211}^\infty \Phi_{21}(c_k) + Z_{3231}^\infty \Phi_{23}(c_k)] \end{array} \right\} \quad (52)$$

ここに, 上添字+, - はそれぞれ $z = h_0, -h_0$ 面上のき裂に関する諸量を示す.

5. 数値結果および考察

数値計算を行い, 特異電気熱弾性場に及ぼすき裂長さ比 c/h , き裂長さの相異を表すパラメータ μ , き裂位置を表すパラメータ h_2/h , き裂間隔比 h_0/h の影響を解明する. 数値計算例には, 次に示すセレン化カドミウムの電気熱弾性特性を用いた⁽³⁾.

$$\left. \begin{array}{l} c_{11} = 7.41 \times 10^{10} [\text{Pa}], \quad c_{33} = 8.36 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ c_{44} = 1.32 \times 10^{10} [\text{Pa}], \quad c_{13} = 3.93 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ e_{31} = -0.160 [\text{C/m}^2], \quad e_{33} = 0.347 [\text{C/m}^2] \\ e_{15} = -0.138 [\text{C/m}^2] \\ \varepsilon_{11} = 0.825 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \varepsilon_{33} = 0.903 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \lambda_{11} = 0.621 \times 10^6 [\text{Pa/K}] \\ \lambda_{33} = 0.551 \times 10^6 [\text{Pa/K}] \\ p_z = -2.94 \times 10^{-6} [\text{C/Km}^2] \end{array} \right\} \quad (53)$$

熱伝導率に関しては, $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z = 1/1.5$ と仮定した.

まず, 温度場 $T_i(x, z)$ ($i=0, 1, 2$) について検討する. 図2は, $h_0/h = 0.2$, $h_2/h = 0.5$, $c/h = 0.5$ とした場合の $z = \pm h_0$ 面上における標準化された温度分布 $(T_i - T_{20})/T_0$ ($i=0, 1, 2$) を $\mu = 0.5, 1.0$ として示したグラフであり, $T_0 = T_{10} - T_{20}$ である. $\mu = 1.0$ の場合, 対称性により $T_1^{(2)}(x, h_0) = -T_2^{(2)}(x, -h_0)$, $T_0^{(2)}(x, h_0) = -T_0^{(2)}(x, -h_0)$ となる. $\mu = 0.5$ の場合, き裂上下面の温度差は上側のき裂では大となり下側のき裂では小となる.

Fig.2 The temperatures on the crack faces and the crack extended lines.

次に、電気熱弾性場について検討する。図 3, 4, 5 は図 2 の温度場によって発生する $z = \pm h_0$ 面上における標準化された応力成分 $(\sigma_{z0}^T, \sigma_{zx0}^T)/\lambda_{33}T_0$ および電束密度成分 D_{z0}^T/p_zT_0 を示したグラフである。 $\mu = 1.0$ の場合、対称性により、 $\sigma_{z0}^T(x, h_0) = -\sigma_{z0}^T(x, -h_0)$, $\sigma_{zx0}^T(x, h_0) = \sigma_{zx0}^T(x, -h_0)$, $D_{z0}^T(x, h_0) = -D_{z0}^T(x, -h_0)$ となる。 $z/h = -0.2$ の場合、 $[\sigma_{z0}^T(x, -h_0)]_{\mu=0.5} < [\sigma_{z0}^T(x, -h_0)]_{\mu=1.0}$ となるが、 $[\sigma_{zx0}^T(x, -h_0)]_{\mu=0.5} > [\sigma_{zx0}^T(x, -h_0)]_{\mu=1.0}$ となる。 $\mu = 0.5$ の場合、上側のき裂上下面の温度差は大となり、 $\sigma_{z0}^T(x, h_0)$, $\sigma_{zx0}^T(x, h_0)$ および $D_{z0}^T(x, h_0)$ の絶対値は $\mu = 1.0$ の場合と比べ比較的大となる。

Fig.3 σ_{z0}^T due to the temperatures shown in Fig.2.

Fig.4 σ_{zx0}^T due to the temperatures shown in Fig.2.

Fig.5 D_{z0}^T due to the temperatures shown in Fig.2.

最後に、応力・電束密度拡大係数に及ぼす幾何学的形状および電気的熱的影響を検討する。図 6 は、電気的熱のみが作用する場合の $(K_I^{\pm}, K_{II}^{\pm})/\sigma_0(\pi c)^{1/2}$ および $K_D^{\pm}/D_0(\pi c)^{1/2}$ に及ぼす μ の影響を示したグラフであり、 $h_0/h = 0.2$, $h_2/h = 0.5$, $c/h = 0.5$ とした。ここで、 $\sigma_0 = -D_0 e_{33}/\varepsilon_{33}$ である。 μ の増加に伴い、 $K_D^{\pm}$ は単調に増大し、 $K_I^{\pm}$ は $0.7 < \mu < 1.0$ で急激に変化する。 $\mu = 0.0$ の場合は、前報⁽¹⁶⁾の結果と一致する。また、 $\mu = 1.0$ の場合、対称性により $K_I^+ = K_I^-$, $K_{II}^+ = -K_{II}^-$, $K_D^+ = K_D^-$ となり、二個の等長き裂の結果⁽¹¹⁾と一致する。

Fig.6 The effect of μ on the stress and electric displacement intensity factors under pure electrical load.

図 7~10 により、熱的熱のみが作用する場合 ($D_0/p_z T_0 = 0.0$) について検討する。図 7 は $K_{II}^{\pm}/\lambda_{33} T_0(\pi c)^{1/2}$ に及ぼす c/h の影響を示したグラフであり、 $h_0/h = 0.2$, $h_2/h = 0.5$ とした。 $\mu = 0.5$ の場合、 c/h の増加に伴い、 $K_{II}^{\pm}/\lambda_{33} T_0(\pi c)^{1/2}$ は単調に増大するが、 $K_{II}^-/\lambda_{33} T_0(\pi c)^{1/2}$ は増大し、最大値をとった後減少する。 $\mu = 0.0, 1.0$ の場合、前報^{(6), (11)}の結果とそれぞれ一致する。

図 8 は $K_I^{\pm}, K_{II}^{\pm}$ および $K_D^{\pm}$ に及ぼす μ の影響を示したもので、 $h_0/h = 0.2$, $h_2/h = 0.5$, $c/h = 0.5$ とした。 K_I^+, K_{II}^+ および $|K_D^+|$ は μ の増加に伴い減少する傾向を示す。 K_{II}^- は μ の増加に伴って増大し、

$K_I^-, |K_D^-|$ はそれぞれ $\mu \approx 0.75, 0.54$ で最大値をとる。 $\mu = 1.0$ の場合、対称性より $K_I^+ = -K_I^-$, $K_{II}^+ = K_{II}^-$, $K_D^+ = -K_D^-$ となる。

Fig.7 The effect of c/h on the stress intensity factor K_{II} .

Fig.8 The effect of μ on the stress and electric displacement intensity factors.

図9は $K_I^\pm, K_{II}^\pm$ および $K_D^\pm$ に及ぼす h_2/h の影響を示したグラフであり、 $h_0/h = 0.2$, $c/h = 0.5$, $\mu = 0.5$ とした。 h_2/h の増加に伴い、 $K_I^\pm, K_{II}^\pm$ は単調に増大するが、 $K_D^\pm$ は単調に減少する。

Fig.9 The effect of h_2/h on the stress and electric displacement intensity factors.

図10は $K_I^\pm, K_{II}^\pm$ および $K_D^\pm$ に及ぼす h_0/h の影響を示したグラフであり、 $h_2/h = 0.5$, $c/h = 0.5$, $\mu = 0.5$ とした。この場合の応力・電束密度拡大係数は h_0/h に依存し複雑に変化する。 h_0/h の増加に伴い、 K_{II}^+ , $|K_D^-|$ は減少し、 K_I^+ , $|K_D^+|$ は増大する。しかし、き裂

が自由表面に接近するとそれぞれの絶対値は減少する傾向を示す。

Fig.10 The effect of h_0/h on the stress and electric displacement intensity factors.

6. 結 言

本報は、長さの異なる二個の平行き裂を有する圧電厚板に電気熱的負荷が作用する場合の応力・電束密度拡大係数を理論解析したものである。また、特別な場合として単一き裂と二個の等長き裂の解も求め、既存解との比較を通して妥当性の検討も行った。数値結果より、(1) 標準化された応力・電束密度拡大係数は幾何学的形状 (c/h , μ , h_2/h , h_0/h) により大きな影響を受けること、(2) 二個の等長き裂⁽¹¹⁾と比較して応力・電束密度拡大係数に及ぼすき裂間相互干渉の影響はより複雑になること、(3) き裂間隔が狭くなると K_{II}^+ が増大することから、モードII型の破壊が予想されることなどが明らかになった。

付 録 1

関数 $R_{ijk}(s)$ および定数 h_{ij} ($i = 0, 1, 2$, $j, k = 1, 2$) は

$$\left. \begin{aligned} R_{011}(s) &= -\rho_1(s) \exp(-2s\kappa h_2)/2 \\ R_{012}(s) &= \rho_2(s)/2, \quad R_{021}(s) = \rho_1(s)/2 \\ R_{022}(s) &= -\rho_2(s) \exp(-2s\kappa h_1)/2 \\ R_{11k}(s) &= -1/\{1 + \exp[-2s\kappa(h_1 - h_0)]\} \\ &\quad \times [R_{02k}(s) - R_{01k}(s) \exp(-2s\kappa h_0)] \\ R_{22k}(s) &= -1/\{1 + \exp[-2s\kappa(h_2 - h_0)]\} \\ &\quad \times [R_{01k}(s) - R_{02k}(s) \exp(-2s\kappa h_0)] \\ R_{12k}(s) &= -R_{11k}(s), \quad R_{21k}(s) = -R_{22k}(s) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2) \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{01} &= h_{02} = -h_0, \quad h_{11} = h_{22} = h_0 \\ h_{12} &= -2h_1 + h_0, \quad h_{21} = -2h_2 + h_0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

付 録 2

定数 $p_{mij}^{(2)}$ ($m, j = 1, 2, \dots, 6$, $i = 0, 1, 2$) は

$$\left. \begin{aligned} p_{1ij}^{(2)} &= c_{13}a_{ij} + \gamma_{ij}(c_{33} - \epsilon_{33}b_{ij}) \\ p_{2ij}^{(2)} &= c_{44}(\gamma_{ij}a_{ij} - 1) + \epsilon_{15}b_{ij} \\ p_{3ij}^{(2)} &= \epsilon_{31}a_{ij} + \gamma_{ij}(\epsilon_{33} + \epsilon_{33}b_{ij}) \\ p_{4ij}^{(2)} &= -i, \quad p_{5ij}^{(2)} = a_{ij}, \quad p_{6ij}^{(2)} = -ib_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (56)$$

定数 γ_{ij} ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6$) は、次の特性方程式の根である。

$$\begin{aligned} &(f_4g_3 + g_4f_3)\gamma_{ij}^6 + (f_4g_1 + f_2g_3 + g_4f_1 + g_2f_3)\gamma_{ij}^4 \\ &+ (f_2g_1 + f_0g_3 + g_2f_1 + g_0f_3)\gamma_{ij}^2 + (f_0g_1 + g_0f_1) \\ &= 0 \quad (i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (57) \end{aligned}$$

ここに、 $\text{Re}[\gamma_{0j}] < \text{Re}[\gamma_{0j+1}]$, $\text{Re}[\gamma_{1j}] < \text{Re}[\gamma_{1j+1}]$,

$\text{Re}[\gamma_{2j}] > \text{Re}[\gamma_{2j+1}]$ ($j = 1, 2, \dots, 5$) であり

$$\left. \begin{aligned} f_4 &= c_{44}\epsilon_{33}, \quad f_0 = c_{11}\epsilon_{15} \\ f_3 &= c_{33}(\epsilon_{15} + \epsilon_{31}) - \epsilon_{33}(c_{13} + c_{44}) \\ f_2 &= (c_{13} + c_{44})(\epsilon_{15} + \epsilon_{31}) - c_{11}\epsilon_{33} - c_{44}\epsilon_{15} \\ f_1 &= -c_{44}(\epsilon_{15} + \epsilon_{31}) + \epsilon_{15}(c_{13} + c_{44}) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} g_4 &= c_{44}\epsilon_{33}, \quad g_0 = c_{11}\epsilon_{11} \\ g_3 &= \epsilon_{33}(\epsilon_{15} + \epsilon_{31}) + \epsilon_{33}(c_{13} + c_{44}) \\ g_2 &= -(\epsilon_{15} + \epsilon_{31})^2 - c_{11}\epsilon_{33} - c_{44}\epsilon_{11} \\ g_1 &= -\epsilon_{15}(\epsilon_{15} + \epsilon_{31}) - \epsilon_{11}(c_{13} + c_{44}) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

また、定数 a_{ij}, b_{ij} ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{g_3\gamma_{ij}^3 + g_1\gamma_{ij}}{g_4\gamma_{ij}^4 + g_2\gamma_{ij}^2 + g_0} \\ b_{ij} &= -\frac{(c_{44}\gamma_{ij}^2 - c_{11})a_{ij} - (c_{13} + c_{44})\gamma_{ij}}{\gamma_{ij}(\epsilon_{15} + \epsilon_{31})} \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (60)$$

文 献

- (1) Rao, S. S. and Sunar, M., Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures : A Survey, *Applied Mechanics Review*, Vol.47 (1994), pp.113-123.
- (2) Noda, N. and Kimura, S., Deformation of a Piezothermoelastic Composite Plate, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.21 (1998), pp.359-379.
- (3) Ashida, F. and Tauchert, T. R., Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk Under Axisymmetric Heating, *Acta Mechanica*, Vol.128 (1998), pp.1-14.
- (4) Ootao, Y. and Tanigawa, Y., Three-Dimensional Transient Piezothermoelasticity in Functionally Graded Rectangular Plate Bonded to a Piezoelectric Plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37 (2000), pp.4377-4401.
- (5) Wang, B. L. and Mai, Y. W., A Cracked Piezoelectric Material Strip under Transient Thermal Loading, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.539-546.
- (6) Ueda, S. and Ikawa, K., The Crack Problem in Piezoelectric Strip under Thermoelectric Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.715 (2006), pp.309-316.
- (7) Ueda, S. et al., Thermal Stress Intensity Factors for a Normal Crack in a Semi-Infinite Piezoelectric Material, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.716 (2006), pp.513-519.
- (8) Ueda, S. and Tani, Y., Thermal Stress Intensity Factors for a Normal Crack in a Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.722 (2006), pp.1487-1494.
- (9) Chen, Z. T. and Worswick, M. J., Antiplane Mechanical and Inplane Electric Time-Dependent Load Applied to Two Coplanar Cracks in Piezoelectric Ceramic Material, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.33, No.715 (2000), pp.173-184.
- (10) Ueda, S. and Tani, Y., Thermal Stress Intensity Factors for Two Coplanar Cracks in a Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.736 (2007), pp.1410-1416.
- (11) Ueda, S. and Ikawa, K., Thermoelectromechanical Interaction between Two Parallel Cracks in a Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.738 (2008), pp.42-49.
- (12) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (13) Erdogan, F. and Wu, B. H., Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.19 (1996), pp.237-265.
- (14) Erdogan, F. et al., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by G.C.Sih), (1972), Noordhoff, Leyden.
- (15) Wang, B. L. and Mai, Y. W., Impermeable Crack and Permeable Crack Assumptions, Which One Is More Realistic?, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.71 (2004), pp.575-578.
- (16) Ueda, S. et al., Electroelastic Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.716 (2006), pp.520-526.
- (17) Hou, P. et al., A Point Heat Source on the Surface of a Semi-Infinite Transversely Isotropic Piezothermoelastic Material, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.75 No.1 (2008), pp.011013.1-011013.8.
- (18) Watanabe, K. et al., *Mathematical Analyses in Elasticity for New Applications*, (2007), pp.163-179, Yokendo.