楕円体強化基材を含む複合材料の巨視的弾性定数と 巨視的線膨張係数のマイクロメカニクス解析*

荒 木 栄 敏^{*1}, 山 下 浩 儀^{*2}

Micromechanical Analysis of Macroscopic Elastic Moduli and Coefficients of Thermal Expansion for a Composite Material Containing Ellipsoidal Reinforcements

Shigetoshi ARAKI^{*3} and Hironori YAMASHITA

^{*3}Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

Micromechanical analysis of a composite material containing many ellipsoidal reinforcements is performed by using the equivalent inclusion method combined with the Mori-Tanaka theorem. Eshelby tensor for the reinforcement is rearranged as a function of Poisson's ratio of the matrix multiplied by the geometrical factor and is used in the analysis. The geometrical factor is only a function of the aspect ratios of reinforcement and is named by the authors. Since all reinforcements are assumed to align along the same direction in the modeling, the composite material has three perpendicular two-fold rotational symmetries. Therefore, nine components of the macroscopic elastic constant of the composite are derived as a function of the geometrical factor of reinforcement. Moreover, macroscopic coefficients of thermal expansion for the composite are also expressed successfully.

Key Words: Equivalent Inclusion Method, Eshelby Tensor, Geometrical Factor, Composite Material, Macroscopic Elastic Constant, Macroscopic Coefficients of Thermal Expansion

1. 緒 言

Mori-Tanaka の定理⁽¹⁾を導入した等価介在物法⁽²⁾による複合材料の巨視的弾性定数の解析は枚挙に暇が無く、種々の強化基材形状に対して陽な解が求められている^{(3)~(10)}。しかしながら、これらの解は、強化基材形状を特定したものや解に強化基材の Eshelby テンソルが直接含まれるものとなっている。著者らは、Eshelby テンソルを吟味し、これが母材のポアソン比のみの関数と強化基材のアスペクト比のみの関数の積になることを見出した。後者を Eshelby テンソルの形状因子と名付け、種々の形状の楕円体に対してその値を求めており、例えば、回転楕円体では独立な形状因子は 2 個であることを明らかにしている⁽¹¹⁾。この形状因子を用いて整理された Eshelby テンソルを使用することで、楕円体強化基材の形状を特定することなくこれを多数含む複合材料の巨視的弾性定数の解が導出できることになる。楕円体強化基材の主半軸の方

向が揃っている複合材料では、互いに垂直な 3 方向に対して 2 回回転対称性が存在することになる。したがって、このような複合材料においては、斜方晶と同様に 9 個の独立な弾性定数が存在することになる。

そこで本解析では、等価介在物法⁽²⁾を用いて、配列する楕円体強化基材を含む複合材料に対して、独立な 9 個の巨視的弾性定数の一般解を導出することを目的とする。さらに、その過程において求められる巨視的全ひずみの結果を流用することで、巨視的線膨張係数の一般解についても導出する。

2. 楕円体強化基材を含む複合材料の平均場の解析

2・1 幾何学モデル 図 1 に示すように、強化基材 Ω を多数含む複合材料 D を想定する。強化基材 Ω は、主半軸の長さがそれぞれ a_1 , a_2 , a_3 の楕円体であり、方向は全て揃っているが、母材中に完全にランダムに分布しているものとする。母材と強化基材 Ω の弾性定数をそれぞれ C_{ijkl} と C_{ijkl}^* とおき、作用応力 σ_{11}^0 , σ_{22}^0 , σ_{33}^0 及び σ_{23}^0 , σ_{31}^0 , σ_{12}^0 が作用する状態を想定する。なお、後述する等価固有ひずみの解に一般性を与えるため、ここでは Ω 内には固有ひずみ ε_{ij}^0 が存在するものとして取扱う。

2・2 等価式と等価固有ひずみ 等価式は、強化

* 原稿受付 2008 年 5 月 16 日。

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科機械システム工学専攻 (〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} 正員, 三菱電機(株)生産技術センター (〒661-8661 尼崎市塚口本町 8-1-1)。

E-mail: araki@mech.kit.ac.jp

基材 Ω 内で,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^* \\ = C_{ijkl} \{ \varepsilon_{kl}^0 + \bar{\varepsilon}_{kl} + S_{klmn} (\varepsilon_{mn}^p + \varepsilon_{mn}^*) \\ - (\varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^*) \} \\ = C_{ijkl}^* \{ \varepsilon_{kl}^0 + \bar{\varepsilon}_{kl} + S_{klmn} (\varepsilon_{mn}^p + \varepsilon_{mn}^*) - \varepsilon_{kl}^p \} \\ \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

となる. ε_{ij}^* は母材と Ω の弾性定数の違いを代行する等価固有ひずみ, S_{ijkl} は Ω の Eshelby テンソルである. σ_{ij}^0 と ε_{ij}^0 は, 作用応力と作用ひずみであり, $\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0$ なる関係がある. σ_{ij}^0 は固有応力であり,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \{ S_{klmn} (\varepsilon_{mn}^p + \varepsilon_{mn}^*) - (\varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^*) \} \\ \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

により与えられる. また, $\bar{\sigma}_{ij}$ と $\bar{\varepsilon}_{ij}$ は相互作用場であり, これらの間には, Ω の体積含有率 f を介して,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} = -f \sigma_{ij}^0 \\ = -f C_{ijkl} \{ S_{klmn} (\varepsilon_{mn}^p + \varepsilon_{mn}^*) - (\varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^*) \} \\ \therefore \bar{\varepsilon}_{ij} = -f \{ S_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^*) - (\varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^*) \} \\ \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

なる関係がある⁽²⁾. 等価式(1)の静水圧成分は, 式(3)を用いて,

$$\begin{aligned} 3K [\varepsilon_{ii}^0 + (1-f) \{ S_{iikh} (\varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^*) - (\varepsilon_{ii}^p + \varepsilon_{ii}^*) \}] \\ = 3K^* [\varepsilon_{ii}^0 + (1-f) \{ S_{iikh} (\varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^*) \\ - (\varepsilon_{ii}^p + \varepsilon_{ii}^*) \} + \varepsilon_{ii}^*] \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

となる. ここで, K と K^* はそれぞれ母材と Ω の体積弾性係数である.

Eshelby テンソル S_{ijkl} は, 著者らによって定義された強化基材の形状にのみ関係する形状因子 H_i^e , $H_{ij}^{e(11)}$ と母材のポアソン比 ν とに分けられ,

$$\begin{aligned} S_{1111} = H_1^e + \frac{1}{2(1-\nu)} \{ (H_1^e - H_{12}^e) + (H_3^e - H_{31}^e) \} \\ \dots\dots\dots (5 \cdot a) \end{aligned}$$

Fig.1 Composite material containing ellipsoidal reinforcements

$$S_{1122} = \frac{\nu}{1-\nu} H_1^e - \frac{1}{2(1-\nu)} (H_1^e - H_{12}^e) \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

$$S_{2211} = \frac{\nu}{1-\nu} H_2^e - \frac{1}{2(1-\nu)} (H_1^e - H_{12}^e) \dots\dots\dots (5 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} S_{1212} = \frac{1}{2} (H_1^e + H_2^e) - \frac{1}{2(1-\nu)} (H_1^e - H_{12}^e) \\ \dots\dots\dots (5 \cdot d) \end{aligned}$$

なる形に整理することができる. 他の成分については両辺の下付添字(1, 2, 3)を循環置換したものとなる. また, 循環置換で得られないものはゼロである. ここで H_1^e と H_{ij}^e は, 主半軸の長さが $a_3 > a_1 > a_2$ の楕円体に対しては, アスペクト比,

$$\omega_3 = \frac{a_3}{a_1} > 1, \quad \omega_2 = \frac{a_2}{a_1} < 1 \dots\dots\dots (6)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} H_3^e = \frac{\omega_3 \omega_2}{(\omega_3^2 - 1)(\omega_3^2 - \omega_2^2)^{1/2}} \{ F(\theta, k) - E(\theta, k) \} \\ \dots\dots\dots (7 \cdot a) \end{aligned}$$

$$H_2^e = \frac{1}{1 - \omega_2^2} \left\{ 1 - \frac{\omega_3 \omega_2 E(\theta, k)}{(\omega_3^2 - \omega_2^2)^{1/2}} \right\} \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$H_3^e + H_1^e + H_2^e = 1 \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

$$H_{31}^e = \frac{1}{\omega_3^2 - 1} (H_1^e - H_3^e) \dots\dots\dots (7 \cdot d)$$

$$H_{12}^e = \frac{\omega_2^2}{1 - \omega_2^2} (H_2^e - H_1^e) \dots\dots\dots (7 \cdot e)$$

$$H_{23}^e = \frac{\omega_3^2}{\omega_2^2 - \omega_3^2} (H_3^e - H_2^e) \dots\dots\dots (7 \cdot f)$$

となる⁽¹¹⁾. ここで $F(\theta, k)$ と $E(\theta, k)$ はそれぞれ第一種と第二種の不完全楕円積分であり, θ と k はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \theta = \sin^{-1} \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} \right)^{1/2}, \quad k = \left(\frac{\omega_3^2 - 1}{\omega_3^2 - \omega_2^2} \right)^{1/2} \\ \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

である. 静水圧成分の等価式(4)に式(5)を代入すると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}^0 + L_K \varepsilon_{ii}^* + (1-f) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \{ (H_1^e - 1) \varepsilon_{11}^* \\ + (H_2^e - 1) \varepsilon_{22}^* + (H_3^e - 1) \varepsilon_{33}^* \} = 0 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる. ここで $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^*$ であり, また,

$$L_K = \frac{K^*}{K^* - K} \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

である. また, 等価式(1)の偏差成分は,

$$\begin{aligned} 2\mu \left[\varepsilon_{ij}^0 + (1-f) \left\{ \left(S_{ijkl} - \frac{1}{3} S_{mmkl} \right) \varepsilon_{kl}^{**} - \varepsilon_{ij}^{**} \right\} \right] \\ = 2\mu^* \left[\varepsilon_{ij}^0 + (1-f) \right. \\ \left. \times \left\{ \left(S_{ijkl} - \frac{1}{3} S_{mmkl} \right) \varepsilon_{kl}^{**} - \varepsilon_{ij}^{**} \right\} + \varepsilon_{ij}^* \right] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる. ここで μ と μ^* はそれぞれ母材と Ω の剛性率であり, ε_{ij}^0 などは偏差成分を表す.

式(11)に式(9)を代入し、式(5)を用いると、11成分については、

$$\frac{6(1-\nu)}{1-f} \left\{ (\epsilon_{11}^0 - L_{\mu} \epsilon_{11}^0) - \frac{1}{6} (\epsilon_{ii}^0 - L_K \epsilon_{ii}^0) \right\} - \{ L_I - 3(L_{II} + H_I^e - 1) + 3(H_2^e - H_{23}^e) \} \epsilon_{11}^{**} \\ - \{ L_I + 3(H_I^e - H_{12}^e) + (1-2\nu)(1-3H_3^e) \} \epsilon_{22}^{**} - \{ L_I + 3(H_3^e - H_{31}^e) + (1-2\nu)(1-3H_2^e) \} \epsilon_{33}^{**} = 0 \quad (12)$$

となる。ここで、

$$L_{\mu} = \frac{\mu^*}{\mu^* - \mu} \quad (10 \cdot b)$$

$$L_I = \frac{3(1-\nu)}{1-f} L_K - 2(1-2\nu) \quad (10 \cdot c)$$

$$L_{II} = \frac{2(1-\nu)}{1-f} L_{\mu} - \frac{1}{3}(1-2\nu) \quad (10 \cdot d)$$

および、

$$H_I^e = (H_I^e - H_{12}^e) + (H_2^e - H_{23}^e) + (H_3^e - H_{31}^e) \quad (13 \cdot a)$$

であり、また、便宜上用いた L_I は、

$$L_I = \left(\frac{1}{3} L_I + L_{II} - 1 \right) + (1-3H_I^e) \quad (14)$$

である。22, 33成分については式(12)中の下付添字(1, 2, 3)の循環置換で得られる。この操作によって求められた22, 33成分に対する式と式(12)とを連立させて解くと、等価固有ひずみ ϵ_{11}^* は、最終的に、

$$\epsilon_{11}^* = -\epsilon_{11}^0 - \frac{2(1-\nu)}{3(1-f)} D_I \left[\frac{3}{2} D_{II} \left(\frac{\sigma_{ii}^0}{3K} - L_K \epsilon_{ii}^0 \right) - \{ (1+\nu) L_K - (1-2\nu) L_{\mu} \} G_I \epsilon_{ii}^0 + \xi_1 \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu} - L_{\mu} \epsilon_{11}^0 \right) \right. \\ \left. + \eta_3 \left(\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu} - L_{\mu} \epsilon_{22}^0 \right) + \eta_2 \left(\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu} - L_{\mu} \epsilon_{33}^0 \right) \right] \quad (15)$$

となる。他の成分は上式の下付添字(1, 2, 3)を循環置換することで求められる。式(15)で用いた係数のうち、成分に依存しないものは、

$$D_I = L_I D_{II} - 2(1-2\nu) D_V \quad (16 \cdot a)$$

$$D_{II} = (D_{IV})^2 - \left\{ \frac{3}{2} H_I^e + \frac{2}{27} (1-2\nu)^2 H_{III}^e + \frac{2}{3} (1-2\nu) H_{IV}^e \right\} \quad (16 \cdot b)$$

$$D_{III} = L_I D_{IV} - \frac{1}{9} (1+\nu) (1-2\nu) H_{III}^e \quad (16 \cdot c)$$

$$D_{IV} = L_{II} + H_I^e - 1 \quad (16 \cdot d)$$

$$D_V = \frac{1}{9} (1+\nu) \left\{ (L_{II} - 1) H_{III}^e + \frac{2}{3} (1-2\nu) H_V^e + 3 H_{VI}^e \right\} \quad (16 \cdot e)$$

$$D_{VI} = -D_I + \left\{ L_{II} + \frac{1}{3} (1-2\nu) \right\} D_{III} \quad (16 \cdot f)$$

であり、成分に依存するものは、

$$\xi_1 = F_I + 2(1-2\nu) G_I + 2 D_{III} \quad (17 \cdot a)$$

$$\eta_1 = F_I - (1-2\nu) G_I - D_{III} \quad (17 \cdot b)$$

$$F_I = \frac{2}{3} (1+\nu) (1-2\nu) \left\{ (1-3H_I^e)^2 - \frac{1}{3} H_{III}^e \right\} + 3 L_I R_I \quad (17 \cdot c)$$

$$G_I = (1-3H_I^e) (D_{IV} + 3 R_I) - \frac{2}{9} (1-2\nu) H_{III}^e - H_{IV}^e \quad (17 \cdot d)$$

$$R_I = \frac{2}{9} (1-2\nu) (1-3H_I^e) + (H_2^e - H_{23}^e) - \frac{1}{3} H_I^e \quad (17 \cdot e)$$

となる。また、式(7・c)と式(13)より、

$$F_I + F_2 + F_3 = G_I + G_2 + G_3 = R_I + R_2 + R_3 = 0 \quad (18)$$

なる関係がある。 ξ_2 , η_3 などは式(17)の下付添字(1, 2, 3)を循環置換して得られる。さらに、式(16)中の形状因子のみによる係数は、

$$H_{II}^e = \{ (H_I^e - H_{12}^e)^2 + (H_2^e - H_{23}^e)^2 + (H_3^e - H_{31}^e)^2 \} - \frac{1}{3} (H_I^e)^2 \quad (13 \cdot b)$$

$$H_{III}^e = (1-3H_I^e)^2 + (1-3H_2^e)^2 + (1-3H_3^e)^2 \quad (13 \cdot c)$$

$$H_V^e = (1-3H_1^e)(H_2^e - H_{23}^e) + (1-3H_2^e)(H_3^e - H_{31}^e) + (1-3H_3^e)(H_1^e - H_{12}^e) \dots\dots\dots (13\cdot d)$$

$$H_V^e = (1-3H_1^e)^3 + (1-3H_2^e)^3 + (1-3H_3^e)^3 \dots\dots\dots (13\cdot e)$$

$$H_{V1}^e = (1-3H_1^e)^2(H_2^e - H_{23}^e) + (1-3H_2^e)^2(H_3^e - H_{31}^e) + (1-3H_3^e)^2(H_1^e - H_{12}^e) \dots\dots\dots (13\cdot f)$$

である。式(13)で与えられる係数は形状因子のみの関数であるとともに、下付添字(1, 2, 3)の循環置換によって変化しないものである。前述したように、楕円体の主半軸の大きさが $a_3 > a_1 > a_2$ の場合には形状因子は式(7)で与えられる。しかしながら、この順序が(1, 2, 3)の循環置換による順序を保ちながら変化した場合、すなわち、 $a_1 > a_2 > a_3$ あるいは $a_2 > a_3 > a_1$ である場合には、形状因子はこの循環置換にしたがって式(7)の両辺を循環置換したものとなる。したがって、すべての添字を有する形状因子を含む式(13)の値は、この循環置換によっても変化しないことになる。この点に注目して、以後式(13)の係数を形状因子の不変量と呼ぶことにする。

次に、せん断成分について求める。等価式(11)を整理すると、23成分の等価固有ひずみ ε_{23}^* は、

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_{23}^0 - L_\mu \varepsilon_{23}^p) + \frac{(1-f)}{2(1-\nu)} (D_{IV} + S_1) \varepsilon_{23}^{**} &= 0 \\ \therefore \varepsilon_{23}^* &= -\varepsilon_{23}^p - \frac{2(1-\nu)}{(1-f)(D_{IV} + S_1)} \left(\frac{\varepsilon_{23}^0}{2\mu} - L_\mu \varepsilon_{23}^p \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

となる。他の成分については、式(19)の下付添字(1, 2, 3)を循環置換することで求められる。また、

$$S_1 = \frac{2}{3} (1-\nu)(1-3H_1^e) - 2(H_2^e - H_{23}^e) - H_1^e + \frac{2}{3} \dots\dots\dots (20)$$

である。

2・3 固有応力 式(2)に式(5)を代入すると、固有応力 σ_{ij}^o は、

$$\frac{\sigma_{ii}^o}{2\mu} = -\frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)} \{ 2(\varepsilon_{ii}^p + \varepsilon_{ii}^*) + (1-3H_1^e)(\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{11}^*) + (1-3H_2^e)(\varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{22}^*) + (1-3H_3^e)(\varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{33}^*) \} \dots\dots\dots (21\cdot a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}^o}{2\mu} &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{2}{9} (1+\nu)(1-3H_1^e)(\varepsilon_{ii}^p + \varepsilon_{ii}^*) + \left[R_1 - \left\{ H_1^e - \frac{2}{3}(2-\nu) \right\} \right] (\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{11}^*) \right. \\ &\quad \left. + R_3(\varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{22}^*) + R_2(\varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{33}^*) \right] \dots\dots\dots (21\cdot b) \end{aligned}$$

となる。式(21・a)に式(15)の等価固有ひずみを代入して整理すると、静水圧成分 σ_{ii}^o は、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ii}^o}{2\mu} &= \frac{2(1+\nu)}{(1-f)D_1} \left[(D_{11} + D_V) \left(\frac{\sigma_{ii}^0}{3K} - L_K \varepsilon_{ii}^p \right) + \frac{1}{3} \{ L_1 + 2(1-2\nu) \} \left\{ G_1 \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu} - L_\mu \varepsilon_{11}^p \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G_2 \left(\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu} - L_\mu \varepsilon_{22}^p \right) + G_3 \left(\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu} - L_\mu \varepsilon_{33}^p \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (22\cdot a) \end{aligned}$$

となる。

次に偏差成分 σ_{11}^o について求める。今、便宜上 $\alpha_1 = 1-3H_1^e$ とおくと、式(7・c)より、 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ となる。これと式(18)を用いると、

$$\alpha_1 G_2 - \alpha_2 G_1 = (-\alpha_2 - \alpha_3) G_2 - \alpha_2 (-G_2 - G_3) = \alpha_2 G_3 - \alpha_3 G_2 \dots\dots\dots (23)$$

なる関係が得られる。したがって、 $\alpha_1 G_2 - \alpha_2 G_1$ は不変量となることがわかる。これを利用し、 $\alpha_1 G_2 - \alpha_2 G_1$ とこれを循環置換して得られる $\alpha_2 G_3 - \alpha_3 G_2$ 及び $\alpha_3 G_1 - \alpha_1 G_3$ の平均を改めて $\alpha_1 G_2 - \alpha_2 G_1$ と置き、式(17)と式(18)を用いると、

$$\begin{aligned} \alpha_1 G_2 - \alpha_2 G_1 &= \frac{1}{3} \{ (\alpha_1 G_2 - \alpha_2 G_1) + (\alpha_2 G_3 - \alpha_3 G_2) + (\alpha_3 G_1 - \alpha_1 G_3) \} \\ &= \alpha_2 \alpha_3 (R_3 - R_2) + \alpha_3 \alpha_1 (R_1 - R_3) + \alpha_1 \alpha_2 (R_2 - R_1) = \alpha_1^2 (R_3 - R_2) + \alpha_2^2 (R_1 - R_3) + \alpha_3^2 (R_2 - R_1) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。式(21・b)に等価固有ひずみ式(15)を代入した後、この関係を用いると、固有応力の偏差成分 σ_{11}^o は、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}^o}{2\mu} &= \frac{1}{3(1-f)D_1} \left[(1+\nu) \left\{ L_{11} + \frac{1}{3}(1-2\nu) \right\} G_1 \left(\frac{\sigma_{11}^0}{3K} - L_K \varepsilon_{11}^p \right) + (3D_{V1} + \zeta_1) \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu} - L_\mu \varepsilon_{11}^p \right) \right. \\ &\quad \left. + \zeta_3 \left(\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu} - L_\mu \varepsilon_{22}^p \right) + \zeta_2 \left(\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu} - L_\mu \varepsilon_{33}^p \right) \right] \dots\dots\dots (22\cdot b) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\xi_1 = \frac{2}{3}(1+\nu)(1-2\nu)(1-3H_f^e)G_1 + 3D_{II}R_1 - \left\{H_f^e - \frac{2}{3}(2-\nu)\right\}F_1 - 2(1-2\nu)D_V \quad \dots\dots\dots (25)$$

である。式(22・a)と式(22・b)より、固有応力の垂直成分 σ_{ii}^0 が求まり、式(10)と式(17)を用いて整理すると、最終的に、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ii}^0}{2\mu} = & \frac{1}{3(1-f)D_I} \left\langle (1+\nu) \left\{ 2(D_{II} + D_V) + \frac{2(1-\nu)}{1-f} L_\mu G_1 \right\} \left(\frac{\sigma_{ii}^0}{3K} - L_\kappa \epsilon_{ii}^p \right) \right. \\ & + \left\{ \xi_1 + 2D_{VI} + \frac{2(1+\nu)(1-\nu)}{1-f} L_\kappa G_1 \right\} \left(\frac{\sigma_{ii}^0}{2\mu} - L_\mu \epsilon_{ii}^p \right) + \left\{ \xi_3 - D_{VI} + \frac{2(1+\nu)(1-\nu)}{1-f} L_\kappa G_2 \right\} \left(\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu} - L_\mu \epsilon_{22}^p \right) \\ & \left. + \left\{ \xi_2 - D_{VI} + \frac{2(1+\nu)(1-\nu)}{1-f} L_\kappa G_3 \right\} \left(\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu} - L_\mu \epsilon_{33}^p \right) \right\rangle \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。

また、固有応力のせん断成分 σ_{23}^0 については、式(2)に式(5)と式(19)を代入すると、

$$\frac{\sigma_{23}^0}{2\mu} = -\frac{H_f^e - \frac{2}{3}(2-\nu) + S_1}{(1-f)(D_{IV} + S_1)} \left(\frac{\sigma_{23}^0}{2\mu} - L_\mu \epsilon_{23}^p \right) \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。他の成分は下付添字(1, 2, 3)を循環置換することで得られる。

2・4 巨視的全ひずみと全応力 巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ は、内部応力の和の条件から、

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + f(\epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^*) \quad \dots\dots\dots (28)$$

によって求めることができる⁽¹¹⁾。

また、全応力 $\sigma_{ij}^{\text{total}}$ は、式(3)のMori-Tanakaの定理⁽¹⁾から、

$$\text{in } D - \Omega : \quad \sigma_{ij}^{\text{total}} = \sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0 - f\sigma_{ij}^* \quad \dots\dots\dots (29\cdot a)$$

$$\text{in } \Omega : \quad \sigma_{ij}^{\text{total}} = \sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0 + (1-f)\sigma_{ij}^* \quad \dots\dots\dots (29\cdot b)$$

となる。

3. 巨視的弾性定数と巨視的線膨張係数の解析

3・1 巨視的弾性定数 式(15)の等価固有ひずみ ϵ_{ii}^* を式(28)に代入し、便宜上与えた固有ひずみ ϵ_{ij}^p を $\epsilon_{ij}^0 = 0$

と置くと、巨視的全ひずみの11成分は、

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{11} = & \frac{1}{E} \{ \sigma_{11}^0 - \nu(\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0) \} - \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_I E} \left\langle \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{II} + (1+\nu)\xi_1 \right\} \sigma_{11}^0 + \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{II} + (1+\nu)\eta_3 \right\} \sigma_{22}^0 \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{II} + (1+\nu)\eta_2 \right\} \sigma_{33}^0 \right\rangle \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

となる。また、式(19)の ϵ_{23}^* を式(28)に代入し、 $\epsilon_{ij}^p = 0$ と置くと、巨視的全ひずみの23成分は、

$$\bar{\epsilon}_{23} = \left\{ 1 - \frac{2(1-\nu)f}{(1-f)(D_{IV} + S_1)} \right\} \frac{\sigma_{23}^0}{2\mu} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。他の成分については下付添字を循環置換すると求まる。

図1に示した複合材料は、斜方晶と同様に9個の独立な弾性定数を有する。これを考慮して、巨視的平均ひずみと作用応力との関係式を、垂直成分については、

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\bar{\nu}_{12}}{E_{22}} & -\frac{\bar{\nu}_{13}}{E_{33}} \\ -\frac{\bar{\nu}_{21}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\bar{\nu}_{23}}{E_{33}} \\ -\frac{\bar{\nu}_{31}}{E_{11}} & -\frac{\bar{\nu}_{32}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{22}^0 \\ \sigma_{33}^0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (32\cdot a)$$

また、せん断成分については、

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{23} \\ \bar{\epsilon}_{31} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\bar{\mu}_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{31}^0 \\ \sigma_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (32\cdot b)$$

と定める。なお、ここで巨視的弾性定数の対称性から、

$$\frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_{11}} = \frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_{22}}, \quad \frac{\bar{\nu}_{32}}{\bar{E}_{22}} = \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_{33}}, \quad \frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_{33}} = \frac{\bar{\nu}_{31}}{\bar{E}_{11}} \quad \dots\dots (33)$$

なる関係がある。

式(30)と式(32・a)を係数比較することによって、巨視的弾性係数 $\bar{E}_{11}$ と巨視的ポアソン比 $\bar{\nu}_{12}$ は、それぞれ、

$$\frac{\bar{E}_{11}}{\bar{E}} = \frac{1}{1 - \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1} \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{11} + (1+\nu)\xi_1 \right\}} \quad \dots\dots (34)$$

$$\bar{\nu}_{12} = \frac{\nu + \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1} \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{11} + (1+\nu)\eta_3 \right\}}{1 - \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1} \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{11} + (1+\nu)\xi_2 \right\}} \quad \dots\dots (35)$$

となる。 $\bar{E}_{22}$, $\bar{E}_{33}$ と $\bar{\nu}_{23}$, $\bar{\nu}_{31}$ は上式の下付添字の循環置換によって求められる。

また、式(31)と式(32・b)を係数比較することによって、巨視的剛性率 $\bar{\mu}_{23}$ は、

$$\frac{\bar{\mu}_{23}}{\mu} = \frac{1}{1 - \frac{2(1-\nu)f}{(1-f)(D_{IV} + S_1)}} \quad \dots\dots (36)$$

となる。 $\bar{\mu}_{31}$, $\bar{\mu}_{12}$ は上式の下付添字の循環置換で得られる。

式(34)～式(36)の巨視的弾性定数の解は、すべて式(7)で規定される強化基材形状のアスペクト比のみに依存する形状因子の関数であるため、いかなる楕円体形状にも適用できる。この意味でこれらの解を一般解と呼ぶことにする。

3・2 巨視的弾性定数の一般解の確認

3・2・1 解の対称性 巨視的弾性係数の式(34)から循環置換によって $\bar{E}_{22}$ を求め、これを用いて巨視的ポアソン比の式(35)を除することで、

$$\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_{22}} = \frac{1}{\bar{E}} \left[\nu + \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1} \times \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{11} + (1+\nu)\eta_3 \right\} \right] \quad \dots\dots (37)$$

を得る。また、式(30)を循環置換して $\bar{\varepsilon}_{22}$ を求め、 σ_{11}^0 の係数を式(32・a)と比較すると、

$$\frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_{11}} = \frac{\nu}{\bar{E}} + \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1 \bar{E}} \times \left\{ \frac{3}{2}(1-2\nu)D_{11} + (1+\nu)\eta_3 \right\} \quad \dots\dots (38)$$

を得る。これは式(37)と完全に一致する。したがって、式(34)と式(35)の巨視的弾性定数の一般解は、式(33)の対称性の条件を満足することがわかる。

3・2・2 回転楕円体強化基材の場合 図1に示した強化基材の形状が回転楕円体の場合には、例えば、 x_3 軸を回転対称軸とすると、幾何学的には x_1 - x_2 面内

において4回回転対称性を有することは明らかである。したがって、独立な弾性定数の数は正方晶と同様に6個となるはずである。まず、この点について確認する。

x_3 軸を回転対称軸とする回転楕円体強化基材の形状因子は、既報⁽¹¹⁾の結果より、

$$H_1^e = H_2^e = \frac{1}{2}(1 - H_3^e) \quad \dots\dots (39\cdot a)$$

$$H_{12}^e = \frac{1}{4}(1 - H_{31}^e) \quad \dots\dots (39\cdot b)$$

$$H_{23}^e = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}H_3^e + H_{31}^e \quad \dots\dots (39\cdot c)$$

となるため、これより、

$$\begin{aligned} H_2^e - H_{23}^e &= \frac{1}{2}(1 - H_3^e) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}H_3^e - H_{31}^e \\ &= H_3^e - H_{31}^e \quad \dots\dots (39\cdot d) \end{aligned}$$

なる関係を得る。したがって、式(17)、式(20)と式(25)に定めた係数はすべて x_1 成分と x_2 成分が一致することになるため、式(34)～式(36)より、

$$\bar{E}_{11} = \bar{E}_{22}, \quad \frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_{33}} = \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_{33}}, \quad \bar{\mu}_{23} = \bar{\mu}_{31} \quad \dots\dots (40)$$

なる関係を得る。これより、独立な弾性定数の数は9個から6個に減少し、正方晶のそれと一致することがわかる。

さらに、この条件に加えて、幾何学的には六方晶と同じように、 x_1 - x_2 面内における等方性の条件、すなわち、垂直成分とせん断成分の間に、

$$\left\{ \frac{1}{\bar{E}_{11}} - \left(-\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_{22}} \right) \right\} - \frac{1}{2\bar{\mu}_{12}} = \chi = 0 \quad \dots\dots (41)$$

なる関係が成立しなければならない。式(41)に式(34)～式(36)を代入した後、式(17)と楕円体強化基材の条件式(39)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 \left\{ \left(\frac{F_3}{2} - D_{III} \right) (D_{IV} + S_3) + D_I \right\} \\ &= \chi_0 \left\{ (1+\nu)(1-2\nu) \left(\frac{D_{IV}}{3} + \frac{R_3}{2} \right) \alpha_3^2 + D_I \right. \\ &\quad \left. - L_I (D_{IV})^2 + \frac{9}{4} L_I R_3^2 \right\} \quad \dots\dots (42) \end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha_1 = 1 - 3H_1^e$ であり、また、

$$\chi_0 = \frac{(1-\nu)f}{(1-f)\mu D_I (D_{IV} + S_3)} \quad \dots\dots (43)$$

である。なお、式(39)と式(13・a)を用いて、式(17・e)と式(20)から回転楕円体に対する関係式、

$$S_3 - \frac{3}{2}R_3 = 0 \quad \dots\dots (44)$$

が得られるため、式(42)ではこれを用いて S_i を R_i へと変換した。さらに $\beta_1 = H_2^e - H_{23}^e$ を用いると、式(13)で与えられる形状因子の不変量は、

$$\left. \begin{aligned} H_{11}^e &= \frac{1}{6}(H_1^e)^2 - H_1^e \beta_3 + \frac{3}{2} \beta_3^2 \\ H_{111}^e &= \frac{3}{2} \alpha_3^2, \quad H_{11}^e = \frac{3}{2} \alpha_3 \beta_3 - \frac{1}{2} H_1^e \alpha_3 \\ H_{111}^e &= \frac{3}{4} \alpha_3^3, \quad H_{111}^e = \frac{3}{4} \alpha_3^2 \beta_3 + \frac{1}{4} H_1^e \alpha_3^2 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (45)$$

となる。式(42)中の α_3^2 , R_3^2 , $\alpha_3^2 R_3$ を式(45)を用いて不変量に変換すると、

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 \left[D_1 - L_1 D_{11} + \frac{2}{9} (1+\nu)(1-2\nu) \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ (L_{11}-1) H_{111}^e + \frac{2}{3} (1-2\nu) H_{111}^e + 3 H_{111}^e \right\} \right] \\ &\cdots \cdots (46) \end{aligned}$$

となる。これに式(16)を代入すると、最終的に $\chi=0$ となり、式(41)が成立すること、すなわち、回転楕円体強化基材を含む場合には、六方晶と同様に独立な弾性定数の数は5個となることが証明できた。

3・2・3 球形強化基材の場合 既報⁽¹¹⁾の結果より、球形強化基材の場合には、

$$\begin{aligned} H_1^e &= H_2^e = H_3^e = \frac{1}{3}, \quad H_{12}^e = H_{23}^e = H_{31}^e = \frac{1}{5} \\ &\cdots \cdots (47) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\alpha_1=1-3H_1^e=0$, $\beta_1=H_2^e-H_{23}^e=2/15$ となるため、これを式(13)に代入すると、

$$\begin{aligned} H_1^e &= \frac{2}{5}, \quad H_{11}^e = H_{111}^e = H_{11}^e = H_{11}^e = H_{11}^e = 0 \\ &\cdots \cdots (48) \end{aligned}$$

を得る。これを式(17)と式(20)に代入すると、

$$R_1 = F_1 = G_1 = S_1 = 0 \cdots \cdots (49)$$

となる。したがって、式(17)より、巨視的弾性定数の式(34)～式(36)に含まれる ξ_i , η_i と S_i はゼロとなることがわかる。これより、巨視的弾性定数は全て成分に依存しないこと、すなわち、等方性となることが証明できた。

3・3 巨視的線膨張係数 母材と強化基材 Ω の線膨張係数をそれぞれ α , α^* とおく。このとき、母材の熱膨張を基準にとると Ω の相対的な熱膨張ひずみは、温度変化を ΔT とおくと、

$$\varepsilon_{ij}^0 = \delta_{ij}(\alpha^* - \alpha)\Delta T \cdots \cdots (50)$$

と表すことができる。ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

式(28)に式(15)の等価固有ひずみ ε_{ij}^* を代入した後、さらに、式(50)の固有ひずみ ε_{ij}^0 を代入し、作用応力 $\sigma_{ij}^0=0$ と置くと、 ΔT だけ温度変化したときの巨視的全ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ が求まり、

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \frac{2(1-\nu)fL_K}{(1-f)D_1} \left\{ \frac{3}{2} D_{11} + (1+\nu)G_1 \right\} \\ &\times (\alpha^* - \alpha)\Delta T \cdots \cdots (51) \end{aligned}$$

となる。式(51)の巨視的全ひずみは、母材の熱膨張を基準とするものであることに注意して、複合材料の巨視的線膨張係数 $\bar{\alpha}_{11}$ を、

$$\bar{\alpha}_{11}\Delta T = \bar{\varepsilon}_{11} + \alpha\Delta T \cdots \cdots (52)$$

と定義する。式(52)に式(51)を代入すると、巨視的線膨張係数の一般解は、最終的に、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha}_{11}}{\alpha} &= 1 + \frac{2(1-\nu)fL_K}{(1-f)D_1} \left\{ \frac{3}{2} D_{11} + (1+\nu)G_1 \right\} \\ &\times \left(\frac{\alpha^*}{\alpha} - 1 \right) \cdots \cdots (53) \end{aligned}$$

となる。他の成分 $\bar{\alpha}_{22}$, $\bar{\alpha}_{33}$ については、式(53)の下付添字を循環置換すると求まる。

巨視的体積ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ii}$ は、式(51)とこれを循環置換したものとの和を取ることにより、その結果に式(18)の関係をを用いると、

$$\bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{9(1-\nu)fL_K D_{11}}{(1-f)D_1} (\alpha^* - \alpha)\Delta T \cdots \cdots (54)$$

となる。複合材料の巨視的体膨張係数 $\bar{\alpha}_K$ を、

$$\bar{\alpha}_K \Delta T = \bar{\varepsilon}_{ii} + 3\alpha\Delta T \cdots \cdots (55)$$

と定義し、これに式(54)を代入すると、

$$\frac{\bar{\alpha}_K}{\alpha} = 3 + \frac{9(1-\nu)fL_K D_{11}}{(1-f)D_1} \left(\frac{\alpha^*}{\alpha} - 1 \right) \cdots \cdots (56)$$

を得る。

3・4 巨視的線膨張係数の一般解の確認 弾性定数と同様に、回転楕円体強化基材については式(39)より $G_1=G_2$ となるため、式(53)より、 $\bar{\alpha}_{11}=\bar{\alpha}_{22}$ となることが容易に確認できる。

また、球形強化基材の場合については式(49)となるため、これを式(53)に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha}_{11}}{\alpha} &= 1 + \frac{3(1-\nu)fL_K}{(1-f)D_1} D_{11} \left(\frac{\alpha^*}{\alpha} - 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\alpha}_K}{\alpha} \right) \\ &\cdots \cdots (57) \end{aligned}$$

を得る。これより、球形強化基材の場合には、線膨張係数は等方性で、その値は体膨張係数の1/3となることが証明できた。

4. 結 言

本解析では等価介在物法により、強化基材のアスペクト比のみの関数である形状因子を用いて整理した Eshelby テンソルを用いて、任意の楕円体強化基材を含む複合材料の巨視的弾性定数を解析し、9個の独立な弾性定数の一般解を導出した。さらに、その計算過程において求められる巨視的全ひずみの結果を流用することで、巨視的線膨張係数の一般解も導出した。

次報では、本報で得られた一般解を用いて強化基材形状を連続的に変化させる方法について検討するとともに、検討結果を用いて具体的に数値計算を行い、強

化基材形状による巨視的弾性定数の変化を求めることにする。

文 献

- (1) Mori, T. and Tanaka, K., *Acta Metallurgica*, Vol. 21 (1973), pp. 571-574.
- (2) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids Second*, Revised ed., (1987), p. 177-187, Martinus Nijhoff Publishers.
- (3) Wakashima, K., *J. Japan Society for Composite Material* (in Japanese), Vol. 2, No. 4 (1976), pp. 161-167.
- (4) Takahashi, K., *J. Japan Society for Composite Material* (in Japanese), Vol. 8, No. 2 (1982), pp. 46-52.
- (5) Takao, Y., Chou, T. W. and Taya, M., *Trans. ASME, J. Applied Mechanics*, Vol. 49 (1982), pp. 536-541.
- (6) Hojo, M., Takahashi, K. and Hayashi, R., *J. Japan Society for Composite Material* (in Japanese), Vol. 9, No. 2 (1983), pp. 64-71.
- (7) Benveniste, Y., *Mechanics of Materials*, Vol. 6 (1987), pp. 147-157.
- (8) Zhao, Y. H. and Weng, G. J., *Trans. ASME, J. Applied Mechanics*, Vol. 57 (1990), pp. 158-167.
- (9) Araki, S., Saito, K., Kato, T. and Nakahara, I., *Trans. JSME, A*, Vol. 61, No. 588 (1995), pp. 1833-1840.
- (10) Araki, S., Saito, K. and Kato, T., *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 45 (1996), pp. 67-78.
- (11) Araki, S., Yamashita, H. and Minami, A., *Trans. JSME, A*, Vol. 71, No. 701 (2005), pp. 157-164.