デジタル画像相関法を用いたタイヤの
面内ひずみ・面外変位同時計測*平岡直樹^{*1}, 松崎亮介^{*2}, 轟 章^{*2}

Concurrent Monitoring of In-Plane Strain and Out-of-Plane Displacement of Tire Using Digital Image Correlation Method

Naoki HIRAOKA^{*3}, Ryosuke MATSUZAKI and Akira TODOROKI^{*3} Department of Mechanical Sciences and Engineering, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1-11-58 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

In order to improve performance of anti lock brake system (ABS) and detect condition of road surface, intelligent tires that monitor strain of interior surface and rolling radius of tire are demanded. However, the high stiffness of an attached sensor like a strain gauge causes debonding of sensors from tire rubber. In the present study, noncontact concurrent monitoring method is proposed using digital image correlation method (DICM) and spotlight projection. In-plane strain and out-of-plane displacement (rolling radius) are calculated by using image processing with an image of interior surface of tire that is taken with a single CCD camera fixed on wheel rim. New monitoring system is applied to AI beam and commercially available radial tire. As a result, this monitoring system is proved to be able to measure in-plane strain and out-of-plane displacement with high accuracy, and confirmed to be effective for concurrent monitoring of tires.

Key Words: Optical Measurement, Laser, Sensor, Image Processing, Digital Image Correlation, Spotlight Projection, Intelligent Tire

1. 結 言

近年, 自動車の ABS の性能向上や路面状態の検知などを目的として, タイヤと路面との摩擦係数やスリップ率を計測するインテリジェントタイヤの開発が期待されている⁽¹⁾⁽²⁾. 摩擦係数を知るためにはタイヤに負荷されている荷重, すなわちタイヤのひずみを計測する必要がある, スリップ率を知るためには転がり半径の計測が必要となる⁽³⁾. Pohl ら⁽⁴⁾は SAW (Surface acoustic wave) センサをタイヤ内側表面に設置し, トレッドの変形を計測することで路面摩擦係数が測定可能であることを示した. また, Yilmazoglu ら⁽⁵⁾はタイヤ内部に磁気センサを埋め込むことで, トレッドの変形を計測できることを示した. Matsuzaki ら⁽⁶⁾はタイヤベルト部のスチールワイヤをコンデンサと抵抗の並列回路と見なし, その電気的特性の変化からタイヤのひずみ計測が可能であることを示した.

しかし, タイヤにセンサを搭載する際には,

- (1) 接触型・埋め込み型センサを使用した場合, 柔軟材料であるタイヤとの弾性率の差異から, 運用中にセンサがタイヤからはく離する, もしくはセンサ自体がタイヤの変形を阻害しタイヤの性能低下につながる.
- (2) タイヤ内部という特殊な環境では, 空間的に大規模なセンサを設置することが不可能である.
- (3) タイヤ自体が比較的安価な製品なので, 高価なセンサを使用することが経済的に困難である.
- (4) 摩擦係数を計測するためにはタイヤ接地面周辺に発生するひずみ分布 ($-1000 \sim 3000 \mu$) を計測する必要があるが, 局所的なひずみ計測しかできないセンサでは瞬時的な分布計測に対応できない.

などの問題点があり, 実用化には至っていない.

そこで本研究の目的としては, タイヤ内部のホイールリム部に小型 CCD カメラを 1 台設置し, 撮影したタイヤ内部底面の画像から, デジタル画像相関法とスポット光投影法を用いてタイヤの面内ひずみと転がり半径 (面外変位) を同時計測するシステムを開発する. この手法は非接触計測であるため弾性率の差異に起因する問題を回避でき, また光学的な計測のため撮影範囲に対して全視野的な計測が可能となる.

* 原稿受付 2008 年 3 月 10 日.

^{*1} 学生員, 東京工業大学理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-11-58).

^{*2} 正員, 東京工業大学機械物理工学専攻.

E-mail: nhiraoka@ginza.mes.titech.ac.jp

光学的に対象のひずみ・変形を計測する手法としてデジタル画像相関法が広く用いられている⁽⁸⁾⁻⁽¹³⁾。しかし、タイヤのように測定対象が3次元的な変形を含む場合、面外変位が存在することで対象とカメラの間の撮影距離が変化し、それに伴って撮影画像が画像中心点を対象点として拡大・縮小されるため単一カメラでは表面ひずみを測定することができない。よって、2台のカメラを用いて異なる角度から対象を撮影する必要があるが、センサ自体が大型化するためタイヤのひずみ計測には適さない。

以上のことを踏まえて、本研究ではスポット光投影法を使用して対象の面外変位を計測することで対象の3次元的な形状を推定し、その形状情報を用いてデジタル画像相関法で求めた面内変形量を修正することで、対象の表面ひずみも同時に計測する新しい手法を提案する。このように、2つの光学的計測を組み合わせることで、1台のカメラによる1度の撮影で、3次元変形を含む対象の表面ひずみ分布測定が可能となる。

まず、梁の式により理論的な変形が既知であるAI梁の三点曲げの様子を撮影し、梁の表面ひずみとたわみの同時計測を行うことでシステムの有効性を実証する。その後、システムを実際のタイヤに適用し、タイヤの面内ひずみと面外変位の計測が可能であるかを実験的に検討した。

2. 計測方法

2・1 画像解析 スポット光投影法はレーザ光と撮影方向の間の角度を利用した三角測量法であり、ポイント測定しかできない代わりに、簡便な装置で高精度な面外変位測定が可能な手法である。デジタル画像相関法は面内のパターンの移動量を計算する手法であり、特殊な光源などの外部装置を必要としないため、タイヤ内部のようなセンサの設置空間自体が狭く、また振動などの外部の影響が大きい環境でも問題なく使用することができる。本研究では図1のような画像をCCDカメラによって収録し、スポット光の位置から面外変位を、スポット光以外の部分のランダムパターンから面内変形量を計算する。なお、本研究では画像収録から解析、計算までの全てのプログラムをLabVIEW

Fig. 1 Schematic diagram of shot image for combinational method using DICM and spotlight projection.

Fig. 2 Relation between locations of spotlight on object and image sensor.

を用いて作成した。

2・2 スポット光投影法 スポット光投影法の測定原理を図2に示す。レーザを測定対象に照射し、対象上のある地点にスポット光を作成する。スポット光のイメージセンサ上の位置を探索することでスポット光がある位置の面外変位を計算する。幾何光学的な関係から移動後の面外位置 h とスポット光位置 r の位置との間には次のような式が成り立つ。

$$h = h_0 + dh = h_0 \frac{r_0}{r} \quad (1)$$

ここで、 h_0 は基準となる面外方向初期位置、 r_0 は初期位置における画像上のスポット光位置である。複数のレーザ光を使用することで撮影範囲内の複数点における面外変位を計算し、各点の間を関数で補間することで撮影範囲全体の面外変位を推測する。

ただし、式(1)はレーザ光がカメラ撮影軸に対して平行なときにのみ成り立つ関係であり、今回のような高い精度での計測が要求される場合は、レーザ光の取り付けによる傾き誤差を考慮する必要がある。ここで、レーザ光が撮影軸に対して θ だけ傾いている場合の面外位置 h の平面上に作られるスポット光の位置関係を図3に示す。点O、A、Bはそれぞれカメラ撮影軸と対象の交点（必ずしも撮影画像内

Fig. 3 Location of laser spot with setting error on the plane whose out-of-plane distance is h .

の中心点とは一致しない), レーザ光に傾き誤差がない場合の平面上のスポット光位置, 傾きに θ の誤差がある場合のスポット光位置である. 点 AB 間の距離 d は, レーザ光のカメラ撮影軸からの傾き角度を θ とすると以下の式で計算できる.

$$d = h \cdot \tan \theta \quad (2)$$

h はレーザ光源から平面の距離 (カメラの撮影距離と等しい) である. また, 図にあるように $\angle OAB$ を φ とすると, 余弦定理より R, R', d の間には以下の関係が成り立つ.

$$R'^2 = R^2 + d^2 - 2R \cdot d \cdot \cos \varphi \quad (3)$$

さらに, 平面上の位置 R' と画像上の位置 r は比例し, r と面外方向位置 h は反比例の関係にある. レーザ光に傾き誤差がない場合の理想的な平面上の位置 R を定数であると考え, これらの関係を考慮した上で式(1)~(3)を用いて r と h の関係を表すと以下のようになる.

$$h = \frac{1}{A \tan^2 \theta - r^2} \left\{ R A \tan \theta \cos \varphi - \sqrt{A R^2 r^2 + (R A \tan \theta \cos \varphi)^2 - A^2 R^2 \tan^2 \theta} \right\} \quad (4)$$

ただし,

$$A = \frac{r_0^2 h_0^2}{R^2 + h_0^2 \tan^2 \theta - 2R h_0 \tan \theta \cos \varphi} \quad (5)$$

このうち θ, φ, R はレーザ素子ごとに与えられる取り付け誤差定数であり, 面外変位が明確である状態でのスポットの位置 r と面外変位 h の関係を計測しておくことで, それぞれの定数を数値的に同定することができる. r_0, h_0 は面外変位の無い状態 (もしくは面外方向位置が分かっている, 基準となる状態) の画像をあらかじめ撮影しておくことで求められる.

2.3 デジタル画像相関法 デジタル画像では, 画像情報は画素ごとのデジタル情報 (輝度値) によって表すことができる. 8 bit のグレースケール画像の場合は, 任意の画素は 0~255 の 256 段階の整数値によって明暗を表現される. デジタル画像相関法はこのデジタル情報を用いて変形前後の画像における同一領域の探索を行う手法である. 図4のように, 変形前の画像から任意の領域 (ROI: Region Of Interest) を取り出し, その領域が変形後の画像上でどこに移動したかを探索することで, 画像の面内変形量を計算することができる. このとき, 変形前後の領域を比較して, 式(6)にある相関係数 R が最大となる点を同一点とする.

$$R(u, v) = \frac{\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \{ (F(x, y) - \bar{F})(G(x+u, y+v) - \bar{G}) \}}{\sqrt{\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m (F(x, y) - \bar{F})^2} \sqrt{\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m (G(x+u, y+v) - \bar{G})^2}} \quad (6)$$

ここで, F, G はそれぞれ変形前後の画像から切り取った ROI の輝度値であり, $\bar{F}, \bar{G}$ は各 ROI の全領域における平均輝度値, u, v がそれぞれ x, y 方向の ROI の移動量, n, m が ROI の x, y 方向の大きさである.

ROI は必ずしも画素倍数だけ移動したとは限らず, 実際には各画素の中間にあることが大半である. 上記の方法では画素単位の探索しかできず, 640×480 pixel の画像であれば, 移動量計算精度は最大でも $1/640 \approx 10^{-3} = 1000 \mu$ となり, ひずみ計測には不十分である. そのため, より高精度な計測を行うためにはサブピクセル単位での同一点探索が不可欠である. サブピクセル精度の同一点探索を行うためには, 変形後の画像上において画素間の輝度値の補間を行った上で相関係数が最大となる点を探索する必要がある. 本研究では補間法としてバイリニア補間法を使用する.

バイリニア補間法とは, 画素間の x 方向分布, y 方向分布それぞれを直線で近似し, 任意の中間点における値を求める補間法である. 今, 変形後の画像上で画素要素 $(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$ で囲まれた領域をバイリニア補間法で補間し, 任意の中間点の輝度 $G'(i+x', j+y')$ を求めたいとする (ただし, x', y' は 0~1). 画像から得られる輝度情報は不連続な離散値であり, 画素ごとの輝度値を図で表せば図5(a)のようになる. ここで, 画素ごとの輝度情報は, その画素の中心における輝度値であるとする. これらの輝度情報を, 互いに直線で結んだ様子を図5(b)に示す. このとき, 任意の中間点 $(i+x', j+y')$ における輝度 G' は次のように表せる.

$$G' = y' \cdot G_1 + (1 - y') \cdot G_2 \quad (7)$$

ここで, G_1, G_2 は図5(b)にあるようにそれぞれ $(x, y) = (i+x', j), (i+x', j+1)$ における輝度値であり, 以下の式で表すことができる.

$$G_1 = x' \cdot G(i+1, j) + (1 - x') \cdot G(i, j) \quad (8)$$

$$G_2 = x' \cdot G(i+1, j+1) + (1 - x') \cdot G(i, j+1) \quad (9)$$

これらの式を使用して変形後の画像を補間し, サブピクセル精度での同一点探索を行うことで, より高い精度で画像中に発生した面内変形量を計算する.

2.4 面内変形補正 タイヤのような面外変位を伴う

Before deformation After deformation
Fig. 4 Displacement of ROI in image before and after deformation

対象に対し、デジタル画像相関法を用いて画像上の面内の離散点変形量を求めても、その値は必ずしも実際の対象の面内変形量とは一致しない。なぜならば、面外変位が存在することで対象とカメラの間の撮影距離が変化し、それに伴って撮影画像が画像中心点を対象点として拡大・縮小されるからである。その一例を図6に示す。そこで、本研究では事前スリット光投影法を用いて計測した面外変位情報を利用して、画像内の面内変形情報を補正することで、正確な撮影対象の面内変形量を計算する。

デジタル画像相関法で計算できる見かけ上の画像内半径方向位置を r' 、面外変位に起因する面内変形量を dr とすると、面外変位の影響を除去した真の面内位置 r は以下の

Fig. 5 Gray level calculated by bilinear interpolation method.

Fig. 6 Typical apparent in-plane displacement field introduced by rigid-body out-of-plane displacement.

ように表すことができる。

$$r = r' - dr = r' \left(1 + \frac{dh}{h_0} \right) \quad (10)$$

この式より、画像内の任意の離散点の純粋な半径方向の位置が分かり、初期位置からの移動量から面内変形量 (u, v) が求められる。離散変形量に対して数値微分を実行することで、任意の領域のひずみを計算することができる。

3. AI梁への適用

3・1 実験目的 計測システムをタイヤに適用する前に計測システムの有効性・精度確認のため、梁の式により理論的な面外変位（梁のたわみ）、および面内ひずみ（梁表面ひずみ）が計算できるAI梁の三点曲げを対象に、面外変位・面内ひずみの同時計測を行う。また、今回のような自作の計測ユニットを使用する場合はレーザーの取り付け誤差を無視することができないため、AI梁の計測結果から各レーザーに対しての取り付け誤差 θ, ϕ, R を求める。

3・2 実験方法 実験に使用する計測ユニットの外観を図7に示す。一枚の基板の上に26万画素CCDカラーカメラ（RGB 32bit, 640×480 pixels）、赤色レーザーダイオードを8個、タイヤ内を照らすための光源として青色LEDを10個取り付けしたものを使用した。実験は図8に示すようにAI梁の三点曲げを実施し、その様子をカメラで撮影した。試験片はA5052Pで、長さ500mm、幅50mm、厚さ10mmとした。試験には島津製作所製万能試験機を使用し、撮影の際には試験機を一時停止させた。0.2mm押し込むごとに画像を撮影し、合計12mmの変位を梁に加えた。AI梁とカメラとの撮影距離は約70mmである。また、計測結果比較のため、正確な梁のたわみをKEYENCE製レーザー変位セン

Fig.7 Measurement unit for monitoring in-plane strain and out-of-plane displacement.

Fig.8 Experimental setup for acquiring image of three-point bending test using AI beam.

サLB-60を用いて計測した。撮影した画像は日本NI社製画像収録ボードPXI-1411で収録し、PCに取り込んだ。なお、梁表面には光反射防止のため、また同一点探索を実行しやすくするために、白色スプレーを一面に塗布した後、黒色スプレーでランダムパターンを描いた。

3.3 面外変位・面内ひずみ計測結果 撮影画像の一例を図9に示す。厳密式に使用するレーザダイオードごとの各定数 R_0 , θ_0 , ϕ_i ($i=1\sim 8$) は、測定したスポット光の位置 r_i とレーザ変位計の計測値を元に梁の式により計算した理論値 h_{theory} から、非線形最小2乗問題の代表的な解法であるレーベンバーグ・マルカート法 (Levenberg-Marquardt Method: LM法)⁽⁴⁾を用いて計算した。理論値と比較した

Fig.9 Surface of Al beam of three-point bending test (stroke is 0 mm).

(a) Out-of-plane displacement of experimental (using exact and inverse model) and theoretical results.

(b) Measurement error of out-of-plane displacement of exact and inverse models.

Fig.10 Comparison of theoretical and experimental out-of-plane displacements at the center of shooting area of Al beam.

際のレーザダイオードの取り付け誤差を考慮していない単純な反比例の式(1), および誤差を考慮した厳密式(4)によって求めた面外位置の一例を図10(a)に、計測誤差の平均値を図10(b)に示す。それぞれ横軸が梁中心における押し込み量、縦軸が各手法により計算した梁の面外変位、および計測誤差である。ここで、計測誤差は次の式により表される。

$$error = \frac{|h_{measure} - h_{theory}|}{h_{measure}} \quad (11)$$

$h_{measure}$ が測定した面外方向位置、 h_{theory} がレーザ変位計の計測値を元に梁の式により計算した理論的な面外方向位置である。レーザダイオードの取り付け誤差を考慮していない場合は、変位が大きくなるごとに計測誤差も増大しているが、厳密式を使用した場合は計測誤差 0.05 % という、高精度かつ安定した測定が可能であることが分かる。これは、単純な反比例式を用いた場合は計算式に起因する計測誤差が存在し、一方、厳密式の場合は計算式に起因する誤差がほとんど存在せず、計測システム自体に存在する僅かな計測誤差のみが検出されているためと考えられる。

デジタル画像相関法を用いて梁長手方向の面内変形量を計算し、先に計算した面外変位量の結果で面内位置を補正する。この際、撮影範囲内の面外変位分布は、梁の式に基づいて補間計算した。その後、変形量の差異から計算した撮影画像の中心における梁長手方向 (画像横方向) ひずみの計測値と理論値との比較を図11に示す。ひずみの絶対値に関わらず 300μ 程度の計測誤差が発生しており、これはパターンマッチングの精度に起因するものであると考えられる。しかし、実際のタイヤにおいては絶対値の計測精度はあまり重視されず、タイヤ円周方向のひずみの分布を知ることが重要となるので、実用性を考えた場合、図11の結果でひずみ計測精度は十分出ていると考えてよい。

4. タイヤへの適用

4.1 実験方法 市販ラジアルタイヤ (タイヤ幅 185 mm, 扁平率 65 %, リム径 14 インチ) に対し圧縮試験を実施し、その際のタイヤ底面の面外変位、面内ひずみを計測

Fig.11 Comparison of experimental and theoretical strains at the center of shooting area of Al beam.

する。試験は図12に示すように、タイヤホイール内部に計測ユニット、および面外変位を計測するためのレーザ変位計を設置し、そこに万能試験機で圧縮変位を加えた。計測ユニットはホイールリム部にゴムバンドを用いて固定し、計測ユニットの電源および映像出力ケーブルはホイールリムの一部を切り取り、そこから外部に接続した。よって、今回の実験ではタイヤには高圧空気による内部圧力は負荷していない。そのため、今回の実験では実際に使用されているタイヤとは異なるひずみ・変形が発生する。また、タイヤは梁のように理論的にひずみを計算することが非常に困難なので、タイヤ底面に低弾性材料用ひずみゲージ (KYOWA KFML 5-350-C1) を貼付し、圧縮時に発生す

Fig.12 Experimental setup for in-plane strain and out-of-plane displacement measurement of tire.

Fig.13 Comparison of proposed method and laser displacement sensor result of out-of-plane displacement of tire.

Fig.14 Comparison of proposed method and strain gauge result of in-plane strain of tire.

るひずみを計測した。クロスヘッドスピードは 2 mm/min で最大 20 mm の圧縮を加えた。実際の回転タイヤでは撮影範囲が接地したときに画像を撮影するが、今回は静的な変形なので画像撮影間隔は 3 sec/画像とした。タイヤ底面にはマッチングがしやすいように、白色スプレーで適当なランダムパターンを描いた。

4・2 面外変位・面内ひずみ計測結果 計測ユニット - タイヤ底面間の面外方向変位について、レーザ変位計の計測値と開発したシステムによる計測結果の平均値との比較を図13に示す。横軸がタイヤの圧縮変位、縦軸が計測された面外変位である。両者の結果に最大で約0.1 mmの差異が発生しているが、タイヤ底面には元々わずかな凹凸があるために、測定箇所によって結果に違いが出たと考えられる。

タイヤ底面における円周方向ひずみについて、ひずみゲージの計測値と開発したシステムによる計測結果との比較を図14に示す。計算方法はAI梁と同じである。AI梁のときと同精度で計測ができており、開発したシステムはタイヤにも有効であることが確認された。

4・3 面内ひずみ分布計測 タイヤに圧縮荷重が負荷されるとタイヤ底面内表面の中心部で引張、周囲の接地端部で圧縮ひずみが発生する。すなわち、ひずみが引張から圧縮に変化する場所を計測することによって、タイヤの接地面積を直接的に計測することができる。本研究で用いている光学的計測は一度の撮影で撮影範囲内全体のひずみ計測が可能であるので、撮影範囲内におけるタイヤ表面のひずみ分布計測を試みた。

低弾性材料用ひずみゲージで計測したタイヤ圧縮時のひずみ分布変化を図15に示す。横軸がタイヤ底面における円周方向座標、縦軸がひずみである。測定点はいずれも引張の範囲内であり、圧縮変位が増大するごとに引張方向にひずみが増大する。x = 0 mmのタイヤ中央付近では変化量が小さいが、これはタイヤに圧力が負荷されておらず初期状態で相当の変形がすでに発生しているため、圧縮変位が負

Fig.15 Incremental strain distribution of ground plane of tire measured using strain gauge.

(a) Stroke is 10 mm.

(b) Stroke is 20 mm.

Fig.16 Strain distribution of ground plane of tire measured by combinational method using DICM and spotlight projection.

荷されてもあまりひずみが増大する余地がないからである。開発したシステムで計測した圧縮変位 10, 20 mm における円周方向ひずみ分布を図 16 に示す。横軸がタイヤ底面における円周方向座標、縦軸がタイヤ幅方向座標である。一点のひずみ計測よりは計測精度は低下しているものの、ひずみゲージで計測したときと同様の分布傾向が計測できていることを実証した。

以上の結果から、静的な変形に対しては開発したシステムによってひずみ・転がり半径の計測が可能であることが分かった。今後の課題としては、システムを動的な回転タイヤに適用させるために画像計測の無線化、電源としてバッテリーを使用、処理の高速化などを行う。

5. 結 言

タイヤのひずみ、および転がり半径を非接触同時計測する手法として、ホイール部に設置したカメラの画像撮影による計測法を提案した。スポット光投影法とデジタル画像相関法を組み合わせることで、一台のカメラによる一度の撮影で対象の面外変位と面内ひずみの同時計測が可能なシステムを開発した。AI 梁とタイヤに同システムを適用することで、面外変位と面内ひずみを高精度で計測することが可能であることを実証した。タイヤ内側面内ひずみ分布を計測した結果、分布の傾向を計測することが可能であることを実証した。

参考文献

- (1) Ryosuke Matsuzaki, Akira Todoroki, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, 2-2, 2008, 269-280, doi: 10.1299/jmmp.2.269.
- (2) S. Patwardhan, H.-S. Tan and M. Tomizuka, *Control Eng. Practice*, Vol. 5, No.11, 1997, 1615-1622.
- (3) Alfred Pohl, Reinhard Steindl, Leonhard Reindl, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 48, No. 6, 1999, 1041-1046.
- (4) O. Yilmazoglu, M. Brandt, J. Sigmund, E. Genc, H.L. Hartnegel, *Sensors and Actuators*, Vol. 94, Issue 1-2, 2001, 59-63.
- (5) Ryosuke Matsuzaki, Akira Todoroki, *Sensors and Actuators*, Vol. 119, Issue 2, 2005, 323-331.
- (6) Ryosuke Matsuzaki, Akira Todoroki, *Sensors and Actuators*, Vol. 126, Issue 2, 2006, 277-286.
- (7) Ryosuke Matsuzaki, Akira Todoroki, *Sensors and Actuators*, Vol. 140, Issue 1, 2007, 32-42.
- (8) Y. Morimoto and M. Fujigaki, *Optics and Lasers in Engineering*, Vol.18, Issue 3, 1993, 195-212.
- (9) Shun-Fa Hwang, Jhih-Te Horn and Hou-Jiun Wang, *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 46, Issue 3, 2008, 281-289.
- (10) P. J. Rae, S. J. P. Palmer, H. T. Goldrein, A. L. Lewis and J. E. Field, *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 41, Issue 4, 2004, 635-648.
- (11) Jinlong Chen, Ganmin Xia, Kebin Zhou, Guisuo Xia and Yuwen Qin, *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 43, Issue 8, 2005, 836-846.
- (12) Jean Brillaud and Fabienne Lagattu, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, Vol. 117, Issue 9, 2006, 411-417.
- (13) W. D. Lockwood and A. P. Reynolds, *Materials Characterization*, Vol. 42, Issues 2-3, 1999, 123-134.
- (14) G.A. Watson, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 208, Issue 2, 2007, 331-340.