圧電材料のヒステリシスを表す一次元スイッチングモデル*

池田 忠 繁^{*1}, 吉田 圭 吾^{*2}, 上田 哲 彦^{*2}One-Dimensional Switching Model for Hysteresis
in Piezoelectric MaterialsTadashige IKEDA^{*3}, Keigo YOSHIDA and Tetsuhiko UEDA^{*3} Department of Aerospace Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

A simple yet accurate constitutive model for piezoelectric materials is proposed. The model is derived under the following two assumptions. (i) Infinitesimal crystals in a piezoelectric material are considered, and the order of the energy required for the switching in a crystal is unchanged independently of the switching directions. (ii) The required switching energy is given in the form of a sum of two exponential functions of phase volume fraction. Comparison of electro-mechanical deformation behaviors between the calculation and the existing PLZT data verifies that this model can duplicate the hysteresis loops of the deformation behaviors among the stress, strain, electric field, and electric displacement. This indicates that the present model can provide a good tool to understand the mechanism of the deformation behavior of the piezoelectric materials and to design smart structures containing the piezoelectric elements.

Key Words: Constitutive Equation, Modeling, Smart Material, Smart Structure, Piezoelectric Materials, Hysteresis, Switching

1. 緒 言

PZT (Pb (Zr, Ti) O₃) や PLZT (lanthanum doped PZT) に代表される圧電材料は、それを構成している結晶が自発分極を持ち、その結晶構造が中心対称でないために、応力を加えるとその応力に比例した分極が生じ電場が発生する。また逆に、電場を加えて分極させると電場に比例した歪が生ずる。これらの現象を利用して圧電材料はセンサやアクチュエータとして用いることができる。小型軽量なので、応力センサ、加速度センサ、超音波トランスデューサ、精密位置決めアクチュエータなどとして広く利用されている。

この材料の挙動を表す構成方程式として、線形関係式

$$\begin{aligned} S_{ij} &= s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{ijn} E_n, \\ D_m &= d_{mkl} T_{kl} + \epsilon_{mn}^T E_n \end{aligned} \quad (1)$$

が用いられることが多く、小さな応力や電場が加えられたときは、その挙動を概ね表現することができる。

ここで S_{ij} , D_m , T_{kl} , E_n はそれぞれ歪, 電束密度, 応力, 電場を表し, s_{ijkl}^E , d_{ijn} , ϵ_{mn}^T はそれぞれ電場一定での弾性コンプライアンス, 圧電歪定数, 応力一定での誘電率を表す。また, 下付き添え字 i, j, k, l, m, n は 1 から 3 の整数をとり, 座標軸を表す。

しかし、大きな応力や電場が加えられると、電場-電束密度, 電場-歪, 応力-電束密度, 応力-歪のそれぞれの間に非線形なヒステリシスが現れ、その挙動を式(1)で表現することはできない。このヒステリシスはスイッチングと呼ばれる現象に伴うエネルギー損失が原因であると考えられる。スイッチングとは、ある絶対値以上の応力や電場が外部から加えられた際に結晶の分極の向きが変わることであり、これにより歪や電束密度に大きな変化が生ずる。圧電材料をセンサやアクチュエータとして有効に用いるためには、その挙動を正確に表現できる構成モデルが必要である。このためいくつかのモデル⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾が提案されている。

このような状況の中で、形状記憶合金の構成モデルの理論を用いて圧電材料の構成モデルを構築する研究⁽⁶⁾、さらに、圧電材料に代表される強誘電体

* 原稿受付 2008 年 5 月 19 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*2} 名古屋大学大学院工学研究科。

E-mail: ikeda@nuae.nagoya-u.ac.jp

(ferroelectric materials), 形状記憶合金に代表される強弾性体 (ferroelastic materials), そして強磁性体 (ferromagnetic materials) まで含めた ferroic materials について, 統一的な構成モデルを構築する研究⁽⁷⁾が行われている。

一方, 簡単でかつ精度良く形状記憶合金の挙動を表現できる構成モデルとして, Nae ら⁽⁸⁾, Ikeda ら^{(9), (10)}により構築された構成モデルがある。Nae ら⁽⁸⁾はモデルの構築にあたり, 形状記憶合金をいくつかの種類の結晶方向を持つ結晶粒の集まりとし, 微小相変態中のエネルギー平衡より変態条件を, 平均操作と Reuss の仮定を用いて歪の関係式を導出した。また, 熱力学第二法則より熱エネルギー変換方程式を導出し, 歪速度の影響も考慮した。次に Ikeda ら^{(9), (10)}は, この結晶粒レベルのモデルにおいて結晶粒の数を数学的に無限大にすることにより, 試験片レベルの巨視的モデルを導出した。このモデルの特徴は, ①各結晶粒の持つ相変態に対するエネルギー障壁の大小の順は相変態前後の相に依らないと仮定していることと, ②相変態に対するエネルギー障壁の大きさを二つの指数関数の和の形式で近似していることである。このため取り扱いが容易になり, かつ, 試験片レベルの応力-歪-温度関係についてヒステリシスの形を精度良く表すことができる。今回, この形状記憶合金の構成モデルを圧電材料に適用することにより, より良い圧電材料の構成モデルを得ることができると考えた。

以上の背景を踏まえ, 本研究では Ikeda ら^{(9), (10)}の形状記憶合金の構成モデルの理論を圧電材料に適用し, 圧電材料の構成モデルを構築する。また, Lynch⁽¹¹⁾の PLZT に対する実験結果と比較することにより, その妥当性を示す。

2 構成方程式

本章では, Ikeda ら^{(9), (10)}の形状記憶合金の構成モデルに基づき, 圧電材料の構成方程式を導出する。本モデルでは形状記憶合金の表現にならって, 結晶の分極方向を「相」と呼ぶことで区別する。今, 自発分極方向に分極した結晶を 0° 相, それに対して 180° スwitchングした結晶を 180° 相, α° スwitchングした結晶を α° 相と定義する。なお, 下付き添え字付き文字は総和規約に従うテンソルとし, 下付き添え字 i, j, k 等は 1 から 3 の整数をとり, 座標軸の方向を表すものとする。

2.1 歪, 電束密度の関係式 歪 S_{ij} , 電束密度 D_m はそれぞれ, 非線形なスitchングによる歪 S_{ij}^{SW} , 電束密度 D_m^{SW} , 応力による歪 S_{ij}^{ST} , 電束密度 D_m^{ST} , 電場

による歪 S_{ij}^{EL} , 電束密度 D_m^{EL} の和として,

$$\begin{aligned} S_{ij} &= S_{ij}^{SW} + S_{ij}^{ST} + S_{ij}^{EL}, \\ D_m &= D_m^{SW} + D_m^{ST} + D_m^{EL} \end{aligned} \quad (2)$$

と表すことができるかと仮定する。

応力による歪 S_{ij}^{ST} , 電束密度 D_m^{ST} , 電場による歪 S_{ij}^{EL} , 電束密度 D_m^{EL} は, 式(1)より

$$\begin{aligned} S_{ij}^{ST} &= s_{ijkl}^E T_{kl}, \\ D_m^{ST} &= d_{mkl} T_{kl}, \\ S_{ij}^{EL} &= d_{ijn} E_n, \\ D_m^{EL} &= \epsilon_{mn}^T E_n \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで平均操作と Reuss の仮定を用いることにより s_{ijkl}^E , d_{mkl} , ϵ_{mn}^T , S_{ij}^{SW} , D_m^{SW} はそれぞれ各相の体積分率 z^α の関数として

$$\begin{aligned} s_{ijkl}^E &= z^\alpha s_{ijkl}^{E,\alpha}, \\ d_{mkl} &= z^\alpha d_{mkl}^\alpha, \\ \epsilon_{mn}^T &= z^\alpha \epsilon_{mn}^{T,\alpha}, \\ S_{ij}^{SW} &= z^\alpha S_{ij}^\alpha, \\ D_m^{SW} &= z^\alpha D_m^\alpha \end{aligned} \quad (4)$$

と書ける。上付き添え字 α は α° 相の値であることを示す。 S_{ij}^α , D_m^α はそれぞれ任意に与える基準状態から計測した α° 相の歪, 電束密度である。但し, 上付き添え字 α については総和をとる。

2.2 スitchング条件 α° 相から β° 相へスitchングが生ずる場合のエネルギー平衡よりスitchング条件を導出する。図 1, 2 にそれぞれ微小なスitchング中の電場-電束密度線図, 応力-歪線図におけるエネルギー平衡の図的解釈を示す。微小なスitchングは一定応力および一定電場の下で生ずるものとする。

電場-電束密度線図について微小なスitchング中のエネルギー平衡方程式は, 図 1 にあるように (i) 印加電場による仕事, (ii) 散逸されるエネルギー, (iii) 誘電率の差によって蓄えられる静電エネルギー変化によって構成され,

$$E_m \frac{\partial D_m}{\partial z^\beta} dz^\beta = \Psi^{E-D} dz^\beta + \frac{1}{2} E_m \frac{\partial D_m^{EL}}{\partial z^\beta} dz^\beta \quad (5)$$

と書くことができる。ここで Ψ^{E-D} はスitchング中に結晶間の相互干渉によって散逸される単位体積分率当たりのエネルギーであり, 上付き添え字 $E-D$ は電場-電束密度線図における値であることを示す。相間および結晶粒間の相互干渉がない場合, すなわち散逸がない場合, 電場 0 [MV/m] でスitchングが生ずる。式(5)に式(2.2)を代入すると

Fig. 1 Geometric explanation of energy balance on electric field-electric displacement diagram.

Fig. 2 Geometric explanation of energy balance on stress-strain diagram.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_m \frac{\partial D_m^{EL}}{\partial z^\beta} dz^\beta + E_m \frac{\partial D_m^{SW}}{\partial z^\beta} dz^\beta \\ + E_m \frac{\partial D_m^{ST}}{\partial z^\beta} dz^\beta = \Psi^{E-D} dz^\beta \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

同様に、応力-歪線図について微小なスイッチング中のエネルギー平衡方程式は、図2にあるように (i) 印加応力による仕事、(ii) 散逸されるエネルギー、(iii) 弾性コンプライアンスの差によって蓄えられる弾性エネルギー変化によって構成され、

$$T_{ij} \frac{\partial S_{ij}}{\partial z^\beta} dz^\beta = \Psi^{T-S} dz^\beta + \frac{1}{2} T_{ij} \frac{\partial S_{ij}^{ST}}{\partial z^\beta} dz^\beta \quad (7)$$

と書くことができる。但し、上付き添え字 $T-S$ は応力-歪線図における値であることを示す。また相間および結晶粒間の相互干渉がない場合、すなわち散逸がない場合、応力 0 [MPa] でスイッチングが生ずる。式(7)に式(2.1)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_{ij} \frac{\partial S_{ij}^{ST}}{\partial z^\beta} dz^\beta + T_{ij} \frac{\partial S_{ij}^{SW}}{\partial z^\beta} dz^\beta \\ + T_{ij} \frac{\partial S_{ij}^{EL}}{\partial z^\beta} dz^\beta = \Psi^{T-S} dz^\beta \end{aligned} \quad (8)$$

となる。

式(6), (8)を足し合わせることで、応力、電場双方の影響を考慮したエネルギー平衡方程式として

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_m \frac{\partial D_m^{EL}}{\partial z^\beta} dz^\beta + E_m \frac{\partial D_m^{SW}}{\partial z^\beta} dz^\beta \\ + E_m \frac{\partial D_m^{ST}}{\partial z^\beta} dz^\beta + \frac{1}{2} T_{ij} \frac{\partial S_{ij}^{ST}}{\partial z^\beta} dz^\beta \\ + T_{ij} \frac{\partial S_{ij}^{SW}}{\partial z^\beta} dz^\beta + T_{ij} \frac{\partial S_{ij}^{EL}}{\partial z^\beta} dz^\beta \\ = \Psi^{E-D} dz^\beta + \Psi^{T-S} dz^\beta \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。ここで式(3.2), (3.3), (4.2)と $z^\alpha + z^\beta = 1$ より

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_m^{ST}}{\partial z^\beta} &= (d_{mkl}^\beta - d_{mkl}^\alpha) T_{kl}, \\ \frac{\partial S_{ij}^{EL}}{\partial z^\beta} &= (d_{ijn}^\beta - d_{ijn}^\alpha) E_n \end{aligned} \quad (10)$$

であり、また、相反則を考えれば、

$$d_{mkl} = d_{ktm} \quad (11)$$

であるので、式(9)左辺の第3項と第6項は同じになる。これは電場-電束密度線図および応力-歪線図についてそれぞれ別々にエネルギー平衡を計算したために電気機械結合に関する項が重複してしまったためである。また散逸されるエネルギー Ψ^{E-D} , Ψ^{T-S} も重複している。

従ってそれらを各々まとめ、整理するとスイッチング条件は

$$\Pi_{\alpha \rightarrow \beta} = \Psi_{\alpha \rightarrow \beta}. \quad (12)$$

但し

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha \rightarrow \beta} &= \frac{1}{2} E_m (\epsilon_{mn}^{T,\beta} - \epsilon_{mn}^{T,\alpha}) E_n \\ &+ E_m (D_m^\beta - D_m^\alpha) + E_m (d_{mkl}^\beta - d_{mkl}^\alpha) T_{kl} \\ &+ \frac{1}{2} T_{ij} (s_{ijkl}^{E,\beta} - s_{ijkl}^{E,\alpha}) T_{kl} + T_{ij} (S_{ij}^\beta - S_{ij}^\alpha) \end{aligned}$$

となる。ここで $\Pi_{\alpha \rightarrow \beta}$, $\Psi_{\alpha \rightarrow \beta}$ はそれぞれ、 α° 相から β° 相へスイッチングするための熱力学的駆動エネルギー、 α° 相から β° 相へのスイッチングに必要なエネルギー (Required Switching Energy : RSE) を表し、式(12)が満たされたときスイッチングが生ずることを示す。

また、この RSE がエネルギー障壁に相当する。

2・3 一次元スイッチングモデル このモデルでは、微小な結晶粒の RSE の大小の順番はスイッチングの種類によって不変であると仮定する。図 3 では、 0° 相、 90° 相、 180° 相の三相で構成された棒状の圧電材料要素を考えている。ここで、微小な結晶粒は RSE の小さい順に下から上へ向かって並べられている。棒要素は、始め 0° 相のみの状態にあり (図 3 (a))、電場を 180° 方向に加えていくと、まず 0° 相から 90° 相へのスイッチングが生じ (図 3 (b))、さらに電場を強くしていくと、 0° 相から 90° 相へのスイッチングは上方へ進行し、 90° 相から 180° 相へのスイッチングが生ずる (図 3 (c))。実際には、 0° 相から 180° 相へのスイッチングも生じるが、この例では生じていない。次に電場を固定し、圧縮力を増加させていくと、 180° 相から 90° 相へのスイッチングが生じ、上方へ進行していく (図 3 (d))。さらに圧縮力を増加させれば、 0° 相から 90° 相へのスイッチングも 0° 相の下端から生じ、上方へ進行していき、最終的には全て 90° 相の状態になる。

図 3 に示されるように、スイッチングは必ず下から上へ一次元的に生ずるので、このモデルを一次元スイッチングモデルと名付ける。また、ある相の領域の長さの和を棒要素全体の長さで無次元化した値は、その相の体積分率に相当するので、縦軸を体積分率座標 (Volume Fraction Coordinate : VFC) と呼び、0~1 で表す。

この一次元スイッチングモデルを定式化すると、

$$\Psi_{\alpha \rightarrow \beta} = \Psi_{\alpha \rightarrow \beta}(z_1^\alpha) \quad (13)$$

となる。 $\Psi_{\alpha \rightarrow \beta}$ は、要素全体が α° 相のみの状態から β° 相のみの状態へ完全にスイッチングする時の RSE を表す関数である。 z_1^α は、図 3 に示すような、 α° 相における最小の VFC の値である。

3. 数値解析および実験値との比較

本章では、第 2 章で導出した構成モデルを用いて、圧電材料についての数値解析を行い、またモデルの検証のために Lynch⁽¹¹⁾ の PLZT に対する実験データとの比較を行う。Lynch の実験では、一軸の応力、電場のみを加えており、ここではその応力を T_{33} 、電場を E_3 とし、その方向の歪 S_{33} 、電束密度 D_3 を調べることにする。この場合テンソルの下付き添え字は全て 3 であり、簡略化のためそれらを省略し、また、 α° 相に関する量を表す添え字は下付きとする。

3・1 材料定数 数値解析に用いる材料定数は以

Fig. 3 Concept of the one-dimensional switching model.

下のように決定する。まず、電場-電束密度線図 (図 6 (a) の丸印) より、 0° 相、 180° 相の誘電率 ϵ_0^T , ϵ_{180}^T および固有電束密度 D_0 , D_{180} を、電場-歪線図 (図 7 (a) の丸印) より圧電歪定数 d_0 , d_{180} および固有歪 S_0 , S_{180} を、応力-歪線図 (図 9 の丸印) より弾性コンプライアンス s_0^E , s_{180}^E を推定する。 90° 相の固有電束密度 D_{90} 、圧電歪定数 d_{90} 、誘電率 ϵ_{90}^T は全て 0 とする。 90° 相の弾性コンプライアンス s_{90}^E および固有歪 S_{90} は以下の方法で決定する。PLZT の応力-電束密度線図 (図 8 の丸印) より、応力を負荷し除荷した後もある一定の電束密度が残っていることから、この応力負荷過程では 90° スwitching が完全に完了していないと考えられる。応力-電束密度線図 (図 8 の丸印) より除荷後の 0° 相および 90° 相の体積分率が推定できるので、応力-歪線図 (図 9 の丸印) より得られる 90° 相の弾性コンプライアンス、固有歪をもとに、 s_{90}^E , S_{90} を推定することができる。

次に実験データより体積分率に対する RSE を推定する。まず、各相の体積分率の時間変化を計算する。ここで実験データは準静的であると仮定し、時間軸は任意に決定した。電場-電束密度線図 (図 6 (a) の丸印) および電場-歪線図 (図 7 (a) の丸印)、式(2), (3), (4)、および全ての相の体積分率の和は 1 であることを考慮することで、電場を 0.8 [MV/m] から -0.8 [MV/m] へ変化させたときの各相の体積分率の時間変化として図 4 を得る。ここで体積分率の値が 0~1 以外の値をとっているのは、圧電セラミックスが 0° 相、 90° 相、 180° 相のみで構成されると仮定したためである。この図より、電場が抗電場の約 -0.4 [MV/m] に達するまでは、 0° 相から 90° 相へのスイッチングのみが、抗電場以降では 0° 相から 180° 相へのスイッチングと 90° 相から 180° 相へのスイッチングが生ずると考えられる。以上

Fig. 4 Time variation of volume fractions.

Fig. 5 Comparison of the approximation for required switching energy curves with the estimation from Lynch's experimental data⁽¹¹⁾.

より、ある電場の値に対応する0°相、90°相、180°相の最小のVFCの値を得ることができ、また式(12)より体積分率に対するRSEを推定することができる。0°相から90°相へのRSEについては、より広範囲の体積分率に対する値を得るため、応力-電束密度線図(図8の丸印)と式(2.2), (3.2), (3.4), (4.2), (4.5), (12)を用いて推定する。

図5の丸印が実験データから推定した0°相から90°相へのRSEである。ここで、RSEの値が体積分率0.8程度までしか得られていないのは、今回用いた応力-電束密度線図(図8の丸印)において電束密度が0 [C/m²]となっており、0°相から90°相へスイッチングが完全には完了していないとしたためである。このグラフより、0°相から90°相へのRSEは最小VFCを

Table 1 Material constants.

s_0^E [m ² /N]	4.00×10^{-11}	$\Psi_{c1,0 \rightarrow 90}$ [J/m ³]	0.00
s_{90}^E [m ² /N]	9.64×10^{-12}	$\Psi_{c2,0 \rightarrow 90}$ [J/m ³]	8.00×10^4
s_{180}^E [m ² /N]	4.00×10^{-11}	$a_{1,0 \rightarrow 90}$	10^4
d_0 [m/V]	9.00×10^{-10}	$a_{2,0 \rightarrow 90}$	10^3
d_{90} [m/V]	0.00	$b_{0 \rightarrow 90}$	4.8
d_{180} [m/V]	-9.00×10^{-10}	$\Psi_{c1,0 \rightarrow 180}$ [J/m ³]	1.00×10^4
ϵ_0^T [F/m]	3.54×10^{-8}	$\Psi_{c2,0 \rightarrow 180}$ [J/m ³]	1.70×10^5
ϵ_{90}^T [F/m]	0.00	$a_{1,0 \rightarrow 180}$	10^{13}
ϵ_{180}^T [F/m]	3.54×10^{-8}	$a_{2,0 \rightarrow 180}$	10^8
S_0	0.00146	$b_{0 \rightarrow 180}$	1
S_{90}	-0.00185	$\Psi_{c1,90 \rightarrow 180}$ [J/m ³]	1.00×10^4
S_{180}	0.00146	$\Psi_{c2,90 \rightarrow 180}$ [J/m ³]	8.30×10^4
D_0 [C/m ²]	0.25	$a_{1,90 \rightarrow 180}$	10^{20}
D_{90} [C/m ²]	0.00	$a_{2,90 \rightarrow 180}$	10^3
D_{180} [C/m ²]	-0.25	$b_{90 \rightarrow 180}$	5

変数とする2つの指数関数の和

$$\Psi_{\alpha \rightarrow \beta} = \Psi_{c1,\alpha \rightarrow \beta} + \Psi_{c2,\alpha \rightarrow \beta} \times \left\{ 1 - a_{1,\alpha \rightarrow \beta}^{-z_1^\alpha} + b_{\alpha \rightarrow \beta} a_{2,\alpha \rightarrow \beta}^{-(1-z_1^\alpha)} \right\} \quad (14)$$

によって近似する。ここで $-z_1^\alpha$ 、 $-(1-z_1^\alpha)$ は指数である。 $\Psi_{c1,\alpha \rightarrow \beta}$ 、 $\Psi_{c2,\alpha \rightarrow \beta}$ 、 $a_{1,\alpha \rightarrow \beta}$ 、 $a_{2,\alpha \rightarrow \beta}$ 、 $b_{\alpha \rightarrow \beta}$ はそれぞれ定数であり、これらの値は試行錯誤により簡単に概ね実験データからの推定値と合うように選ぶことができる。0°相から90°相へのRSEの体積分率が0.8程度以上の範囲に関しては適当に推測し決定した。図5の実線が0°相から90°相へのRSEの近似曲線である。図より、式(14)がRSEの特徴を定量的に捉えていることが分かる。

図5の四角印、バツ印がそれぞれ実験データから推定した0°相から180°相、90°相から180°相へのRSEである。ここで実験データから推定した0°相から180°相へのRSEの値が体積分率0.4程度以上でしか得られていない。これは、抗電場以降でのみ0°相から180°相へのスイッチングが生ずるためである。また、実験値から推定した90°相から180°相へのRSEの値が体積分率0.4程度までしか得られていないのは、応力を負荷していない場合の電場-歪線図において90°相は4割程度しか生じないためである。実験データから推定できない範囲のRSEの値は0°相から90°相の場合と同様に決定した。0°相から180°相、90°相から180°相へのRSEの全体の近似曲線は図5においてそれぞれ破線、一点鎖線で示す。これらの場合も近似曲線が、実験データから推定したRSEの特徴を定量

Fig. 6 Electric field-electric displacement curve under various applied stresses.

(a) 0MPa, (b) -3MPa, (c) -6MPa, (d) -10MPa.

的に捉えていることがわかる。

なお今回 0° 相から 90° 相へのスイッチングと 180° 相から 90° 相へのスイッチング、 0° 相から 180° 相へのスイッチングと 180° 相から 0° 相へのスイッチング、 90° 相から 180° 相へのスイッチングと 90° 相から 0° 相へのスイッチングの RSE はそれぞれ等しいと仮定した。以上の方法を用いて得た材料定数を表 1 にまとめる。

3・2 実験データとの比較 表 1 の材料定数を用いた際の数値解析結果と Lynch⁽¹¹⁾ の PLZT に対する実験データとの比較を図 6～9 に示す。図 6～9 はそれぞれ、いくつかの圧縮応力に対する電場－電束密度線図および電場－歪線図、電場 0 [MV/m] における応力－電束密度線図および応力－歪線図である。ここで数値解析結果は実線、実験データは丸印で表している。

電場－電束密度線図および電場－歪線図の実験データには以下のような特徴がある。圧縮応力が 0 [MPa] のとき (図 6 (a), 7 (a)) , 電場を 0.8 [MV/m] から小さくすると、電束密度および歪はほぼ線形的に減少していく。電場が 0 [MV/m] に近づくと、 90° 相へのスイッチングが生じ、電束密度および歪が大きく減少し始める。電場が約 -0.4 [MV/m] において 180° 相へのスイッチングが開始し、電束密度はさらに大きく減少し、歪は急激に大きくなる。さらに電場を小さくすると、電束密度は 0.8 [MV/m] の値と反対の符号の値に、歪は 0.8 [MV/m] の値と等しい値になる。次にその状態から電場を大きくすると、逆の現象が生じ、電束密度および歪は元の値に戻る。図からわかるように、電場－電束密度線図および電場－歪線図は電場の減少時と増加時において同じ経路を通らず、大きなヒステリシスループ

Fig. 7 Electric field-strain curve under various applied stresses.

(a) 0MPa, (b) -3MPa, (c) -6MPa, (d) -10MPa

Fig. 8 Stress-electric displacement curve.

Fig. 9 Stress-strain curve.

を描く。特に、電場－歪線図はバタフライ形状になる。圧縮応力を大きくすると、電場－電束密度線図は徐々に正の傾きの方向へ傾いた形状をとるようになる（図 6(b)～(d)）。一方、電場－歪線図は、バタフライ形ヒステリシス全体が歪の負の方向へ移動するとともに、バタフライ形状の「羽」の上部と下部が横に広がっていく（図 7(b)～(d)）。

また、応力－電束密度線図および応力－歪線図の実験データには以下のような特徴がある。圧縮応力を 0 [MPa]から大きくすると、電束密度は約 0.25 [C/m²]から、歪は約 0.15 [%]からほぼ線形的に減少していく。応力が約 -20 [MPa]に近づくと 90° 相へのスイッチングが開始し、電束密度および歪は大きく減少する。その後、除荷をしても、スイッチングは生じず、電束密度および歪は線形的に増加し、元の値には戻らない。

数値解析結果と実験データの比較より本モデルは、圧縮応力が 0 [MPa]のときは定量的に電場－電束密度線図、電場－歪線図のヒステリシスを捉え、圧縮応力が大きくなるに従い、実験データとの差は多少大きくなるものの、定性的にその変化の特徴を捉えていることがわかる。また、電場 0 [MV/m]における応力－電束密度線図、応力－歪線図のヒステリシスも定量的に捉えていることがわかる。

4. 結 言

簡単な形式で精度良く圧電材料の電気機械的変形特性を表現することができる構成モデルを提案した。このモデルでは、①無限小の結晶粒を考え、結晶粒のスイッチングに必要なエネルギーは、スイッチングの方向に依らず不変であり、②必要エネルギーは各極方向を向いた結晶粒の体積分率に関する指数関数の和の形で表されると仮定している。このモデルにより、既存の PLZT の電気機械的変形特性に関する実験データを再現した結果、材料定数の同定に用いた条件での変形特性は定量的に捉えることができ、その他の条件でも、多少の誤差はあるものの、パラメータ変化に対する変形特性の変化の様子を定性的には捉えることができた。

以上のことから、ここで提案したモデルは、簡単な形式で精度が比較的良好いので、圧電材料の電気機械的変形挙動の理解や圧電材料を含むスマート構造物の設計に役に立つ道具になることが期待できる。

文 献

- (1) Chen, P. J. and Peercy, P. S., One Dimensional Dynamic Electromechanical Constitutive Relations of Ferroelectric Materials, *Acta Mechanica*, Vol. 31, No. 3-4 (1979), pp. 231-241.
- (2) Chan, K. H. and Hagood, N. W., Modeling of Nonlinear Piezoceramics for Structural Actuation, *Proceedings of the SPIE, Smart Structures and Materials 1994*, Vol. 2190 (1994), pp. 194-205.
- (3) Hwang, S. C., Lynch, C. S. and McMeeking, R. M., Ferroelectric/Ferroelastic Interactions and a Polarization Switching Model, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 43, No. 5 (1995), pp. 2073-2084.
- (4) Kamla, M. and Jiang, Q., A Constitutive Model for Ferroelectric PZT Ceramics under Uniaxial Loading, *Smart Materials and Structures*, Vol. 8 (1999), pp. 441-459.
- (5) Li, W. F. and Weng, G. J., A Theory of Ferroelectric Hysteresis with a Superimposed Stress, *Journal of Applied Physics*, Vol. 91, No. 6 (2002), pp. 3806-3815.
- (6) Smith, R. C., Seelecke, S., Ounaies, Z. and Smith, J., A Free Energy Model for Hysteresis in Ferroelectric Materials, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 14, No. 11 (2003), pp. 719-739.
- (7) Smith, R. C., Seelecke, S., Dapino, M. J. and Ounaies, Z., A Unified Model for Hysteresis in Ferroic Materials, *Proceedings of the SPIE, Smart Structures and Materials 2003*, Vol. 5049 (2003), pp. 88-99.
- (8) Nae, F. A., Matsuzaki, Y. and Ikeda, T., Micromechanical Modeling of Polycrystalline Shape-memory Alloys Including Thermo-mechanical Coupling, *Smart Materials and Structures*, Vol. 12 (2003), pp. 6-17.
- (9) Ikeda, T., Nae, F. A., Naito, H. and Matsuzaki, Y., Constitutive Model of Shape Memory Alloys for Unidirectional Loading Considering Inner Hysteresis Loops, *Smart Materials and Structures*, Vol. 13 (2004), pp. 916-925.
- (10) Ikeda, T., Modeling of Ferroelastic Behavior of Shape Memory Alloys, *Proceedings of the SPIE, Smart Structures and Materials 2005*, Vol. 5757 (2005), pp. 344-352.
- (11) Lynch, C. S., The Effect of Uniaxial Stress on the Electro-mechanical Response of 8/65/35 PLZT, *Acta Materialia*, Vol. 44, No. 10 (1996), pp. 4137-4148.